Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

CẤU TRÚC CĂN CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

Lê Quang Huy[1], Hoàng Thị Minh Nhàn[2]

TÓM TẮT

Bài báo giới thiệu về cấu trúc căn của iđêan đơn thức trong vành đa thức nhiều biến.

Từ khóa: *Vành, cấu trúc căn iđêan, vành đa thức.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cho R là vành giao hoán có đơn vị, trong tập hợp các iđêan của R chúng ta có thể xây dựng được các iđêan mới qua các phép toán như tổng, tích, lũy thừa và chia. Bên cạnh đó, như một sự mở rộng tự nhiên của các phép toán trên tập hợp số đối với các iđêan I của R, khái niệm iđêan căn của iđêan được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Iđêan $\sqrt{I}=\{x\in R \mid \exists n\in\mathbb{N}:\ x^n\in I\}$ được gọi là căn của I, khái niệm này được trình bày trong [1], [2], [3], [4] và [5]. Mục đích chính của bài báo này là mô tả cấu trúc của iđêan $\sqrt{I}$ trong trường hợp I là iđêan đơn thức (iđêan sinh bởi các đơn thức).

Trong nội dung nghiên cứu của bài báo được chi thành hai mục

Mục 2.1 giới thiệu một số kết quả cần thiết của tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ để áp dụng vào chứng minh kết quả chính của bài báo.

Mục 2.2 trình bày kết quả mô tả cấu trúc căn của iđêan đơn thức (Định lý 3.5) và đưa ra một số ứng dụng của định lý này trong tính toán iđêan căn một số lớp iđêan đơn thức (Định lý 2.2.6).

2. NỘI DUNG

2.1. Tập lồi trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.1.1

i) Cho tập $X\subseteq\mathbb{R}^n$ và $X\neq\varnothing$ gọi là tập lồi nếu với mọi $x,y\in X$ thì $tx+(1-t)y\in X$ với mọi $0\le t\le 1$.

ii) Một tổ hợp lồi của các phần tử $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m\}\subset X$ là biểu thức $\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i$, trong đó $a_i\in\mathbb{R}$, $0\le a_i\le 1$ và $\sum_{i=1}^{m} a_i=1$.

[1] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

[2] *Đại học Sư phạm Toán K17A, khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

Bổ đề 2.1.2

Giả sử tập $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi và $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} \subset X$.

Khi đó $\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i \in X$, trong đó $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le a_i \le 1$ và $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$.

Chứng minh

Ta chứng minh quy nạp theo *m*:

Với $m = 1, 2$, suy ra từ định nghĩa tập lồi.

Giả sử mệnh đề đúng đến *k*, nghĩa là ta có $\sum_{i=1}^{k} a_i\alpha_i \in X$, trong đó $a_i \in \mathbb{R}$ và $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$.

Ta cần chứng minh mệnh đề cũng đúng đến $k + 1$, tức là cần chứng minh.

$\sum_{i=1}^{k+1} a_i\alpha_i \in X$, trong đó $a_i \in \mathbb{R}$ và $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 1$. Ta có

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{k} a_i\alpha_i + a_{k+1}\alpha_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i\left(\frac{a_1}{\sum_{i=1}^{k} a_i}\alpha_1 + ... + \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i}\alpha_k\right) + a_{k+1}\alpha_{k+1}$$

Lại có $\frac{a_1}{\sum_{i=1}^{k} a_i}\alpha_1 + ... + \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i}\alpha_k = 1$

nên theo giả thiết quy nạp ta có

$$x = \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{k} a_i}\alpha_1 + ... + \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i}\alpha_k \in X$$

Do đó, $\sum_{i=1}^{k+1} a_i\alpha_i = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)x + a_{k+1}y$. Vì $x, y \in X$, $\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} = 1$, nên theo Định nghĩa 2.1 ta có $\frac{a_1}{\sum_{i=1}^{k} a_i}\alpha_1 + ... + \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i}\alpha_k \in X$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Định nghĩa và Bổ đề 2.1.3

Cho *Y* là 1 tập con hữu hạn của $\mathbb{R}^n$. Kí hiệu

$$Conv(Y) = \left\{\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i \,\middle|\, \alpha_i \in Y,\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \le a_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{m} a_i = 1,\ m \ge 1\right\}$$

Khi đó ta nói *Conv(Y)* là một tập lồi và được gọi là bao lồi của *Y*.

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

Chứng minh

Với mọi *x, y* $\in$ *Conv(Y)*, khi đó ta có thể viết dưới dạng:

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i,\ \alpha_i \in Y,\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \le \alpha_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{m} a_i = 1,\ m \ge 1,$$

$$y = \sum_{j=1}^{u} b_j\beta_j,\ \beta_j \in Y,\ b_j \in \mathbb{R},\ 0 \le b_j \le 1,\ \sum_{j=1}^{u} b_j = 1,\ u \ge 1.$$

Ta có: $tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{m} ta_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{u}(1-t)b_j\beta_j.$

Mặt khác: $\sum_{i=1}^{m} ta_i + \sum_{j=1}^{u}(1-t)b_j = t\sum_{i=1}^{m} a_i + (1-t)\sum_{j=1}^{u} b_j = t + 1 - t = 1.$

Suy ra $tx + (1-t)y \in Conv(Y)$.

Vậy *Conv(Y)* là một tập lồi.

Nếu $Y = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$, để cho đơn giản ta kí hiệu: *Conv(Y)* = *Conv*($\alpha_1, ..., \alpha_m$).

Mệnh đề 2.1.4

Cho $\alpha_1, ..., \alpha_m$ là một dãy các phần tử đôi một phân biệt của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, tồn tại $j \in \{1, 2, ..., m\}$ sao cho $\alpha_j \notin Conv(\alpha_1, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_m)$. Nghĩa là không tồn tại $\begin{cases} 0 \le a_i \le 1 \\ \forall\ i \ne j \end{cases}$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{m} a_i = 1$, sao cho ta có thể viết được $\alpha_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{m} a_i\alpha_i$.

Chứng minh

Ta chứng minh quy nạp theo *m*: Với *m* = 1, 2, hiển nhiên đúng.

Giả sử đúng đến *m*-1, nghĩa là với mọi họ có *m*-1 phần tử $\{\beta_1, ..., \beta_{m-1}\}$, luôn tồn tại t sao cho $\beta_t \notin Conv(\beta_1, ..., \beta_{t-1}, \beta_{t+1}, ..., \beta_{m-1})$. Ta cần chứng minh đúng đến *m*. Thật vậy giả sử $\alpha_j \in Conv(\alpha_1, ..., \alpha_{t-1}, \alpha_{t+1}, ..., \alpha_{m-1})\ \forall j \in \overline{1, m}$, nghĩa là tồn tại $\exists\, a_{jk},\ 0 \le a_{jk} \le 1, \forall j = \overline{1, m}, \forall k = \overline{1, m}, k \ne j$ sao cho:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{1_2}\alpha_2 + a_{1_3}\alpha_3 + \ldots + a_{1_m}\alpha_m \quad (1) \\ \alpha_2 = a_{2_1}\alpha_1 + a_{2_3}\alpha_3 + \ldots + a_{2_m}\alpha_m \quad (2) \\ \vdots \\ \alpha_j = a_{j_1}\alpha_1 + \ldots + a_{j_{j-1}}\alpha_{j-1} + a_{j_{j+1}}\alpha_{j+1} + \ldots + a_{j_m}\alpha_m \quad (j) \\ \vdots \\ \alpha_m = a_{m_1}\alpha_1 + a_{m_2}\alpha_2 + \ldots + a_{m_m}\alpha_m \quad (m) \end{cases}$$

Rút α_{j-1} ở phương trình (*j* - 1) thay vào phương trình thứ *(j)* với $2 \le j \le m$ ta được:

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

$$\begin{cases} \alpha_2 = \beta_{2_3}\alpha_3 + \ldots + \beta_{2_m}\alpha_m \\ \vdots \\ \alpha_m = \beta_{m_1}\alpha_2 + \ldots + \beta_{m_{m-1}}\alpha_{m-1} \end{cases}, \text{ trong đó } \begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{m} \beta_{jk} = 1 \\ \forall\ 2 \le j \le m. \\ k \neq j \end{cases}$$

Do vậy: $\alpha_j \in Conv(\alpha_1, \ldots, \alpha_{t-1}, \alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_{m-1})$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết quy nạp. Vậy mệnh đề được chứng minh.

2.2. Cấu trúc căn của iđêan đơn thức

Trong mục này, luôn xem $R = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là vành đa thức *n* biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Từ* là biểu thức có dạng $\alpha x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$, trong đó $\alpha \in K$ được gọi là *hệ số của từ*. Kí hiệu: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ và $x^a = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$. Đa thức n biến $x_1, \ldots, x_n$ trên vành *R* là một tổng hình thức của các từ $f(x) = \sum\limits_{a \in \mathbb{N}^n} \alpha_a x^a$, trong đó chỉ có một số hữu hạn hệ số $\alpha_a \neq 0$. Từ $\alpha_a x^a$ với $\alpha_a \neq 0$ được gọi là từ của đa thức f (x) và x^a là đơn thức của f (x).

Mệnh đề 2.2.1 (Xem [1, Bổ đề 4.3])

Cho *I* là một iđêan của *R*, khi đó các điều kiện sau tương đương

i) *I* là iđêan đơn thức.

ii) Với mọi đa thức $f \in R$ thì $f \in I$ khi và chỉ khi các từ của $f \in I$.

Bổ đề 2.2.2

Cho đa thức $f = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \ldots + a_t x^{\alpha_t}$ (biến $x_1, \ldots, x_n$). Khi đó tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ sao cho $\alpha_i \notin Conv(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_t)$.

Chứng minh

Ta có $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{R}^n$ đôi một khác nhau, theo Mệnh đề 2.1.4 ta có điều phải chứng minh.

Mệnh đề 2.2.3

Nếu *I* là một iđêan đơn thức thì $\sqrt{I}$ cũng là một iđêan đơn thức.

Chứng minh

Lấy *f* là một đa thức $f = \sum\limits_{i=1}^{t} h_i x^{a_i} \in \sqrt{I}$. Suy ra tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $f^k \in I$. Cần chứng minh $x^{a_i} \in \sqrt{I}$ với mọi a_i, $i = \overline{1, t}$.

Ta chứng minh quy nạp theo t: Với t = 1, mệnh đề hiển nhiên đúng.

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

Giả sử mệnh đề đúng với mọi đa thức có *t -1* số hạng.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với mọi đa thức có *t* số hạng. Thật vậy, không mất tính tổng quát giả sử trong khai triển f^k, $\exists k_1, k_2, ..., k_t$ sao cho

$x^{a_i k} = x^{a_1 k_1}.x^{a_2 k_2}\ldots x^{a_t k_t}$ $\forall\ i = \overline{1, t}$, trong đó $k = k_1 + k_2 + ... + k_t$ $(0 \le k_i \le k)$.

Suy ra: $a_i k = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_{i-1} k_{i-1} + a_{i+1} k_{i+1} + \ldots + a_t k_t$

$$\Leftrightarrow a_i = a_1 . \frac{k_1}{k-k_i} + \ldots + a_{i-1} . \frac{k_{i-1}}{k-k_i} + a_{i+1} . \frac{k_{i+1}}{k-k_i} + a_t . \frac{k_t}{k-k_i}.$$

Mặt khác, ta có $\Leftrightarrow a_i = a_1 . \frac{k_1}{k-k_i} + \ldots + a_{i-1} . \frac{k_{i-1}}{k-k_i} + a_{i+1} . \frac{k_{i+1}}{k-k_i} + a_t . \frac{k_t}{k-k_i}$.

Theo Định nghĩa và Bổ đề 2.1.3, ta có $a_i \in \mathrm{Conv}(a_1, a_2, ..., a_t), i = \overline{1, t}$. Điều này mâu thuẫn với Bổ đề 2.2.2. Do đó, tồn tại $i \in \{1, ..., t\}$ sao cho $a_i \notin Conv(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_t)$ $\forall\ i = \overline{1, t}$. Suy ra $x^{ka_i} \in I$, do đó $x^{a_i} \in \sqrt{I}$. Khi đó đa thức $g = f - h_i x^{a_i} \in \sqrt{I}$, mà *g* có *k -1* số hạng nên theo giả thiết quy nạp ta có tất cả các đơn thức còn lại của *f* đều thuộc $\sqrt{I}$. Nên theo Mệnh đề 2.2.3, $\sqrt{I}$ là iđêan đơn thức.

Ta có điều phải chứng minh.

Định nghĩa 2.2.4

Giả sử $x^{\alpha} = x^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_n}$. Ký hiệu $\sqrt{x^{\alpha}} = x_1 \ldots x_n$ là căn của đơn thức x^{α}.

Áp dụng các kết quả trên, ta nhận được kết quả của định lý sau:

Định lý 2.2.5 (Xem [3, Proposition 1.2.4])

Cho iđêan đơn thức $I = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Khi đó $\sqrt{I} = \left(\sqrt{f_1}, \sqrt{f_2}, \ldots, \sqrt{f_n}\right)$.

Áp dụng kết quả của Định lý 2.2.5 ta dễ dàng nhận được các kết quả sau:

Định lý 2.2.6

Cho $K[x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức *n* biến trên trường *K*. Giả sử $\{x_{i_1}, ..., x_{i_1}\} \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$.

Khi đó, ta có

i) $\sqrt{\left(x_{i_1}^{\alpha_1}, ..., x_{i_k}^{\alpha_k}\right)} = \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right)$.

ii) $\sqrt{\left(x_{i_1}^{\alpha_1}, ..., x_{i_k}^{\alpha_k}, u_1, ..., u_t\right)} = \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right)$, trong đó $u_1, ..., u_t$ là các đơn thức chỉ chứa các biến thuộc tập $\left\{x_{i_1}, ..., x_{i_k}\right\}$ và $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

iii) $\sqrt{\left(x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}, u_1, \ldots, u_t\right)} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$, trong đó $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ và $u_1, \ldots, u_t$ là các đơn thức tùy ý của $K\left[x_1, \ldots, x_n\right]$.

Chứng minh

i) Ta có $\sqrt{x_{i_j}^{\alpha_j}} = x_{i_j}, \forall j = \overline{1, k}$. Áp dụng Định lý 3.5 ta được điều phải chứng minh.

ii) Áp dụng Định lý 2.2.5 ta có

$$\sqrt{\left(x_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, x_{i_k}^{\alpha_k}, u_1, \ldots, u_t\right)} = \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \sqrt{u_1}, \ldots, \sqrt{u_t}\right)$$

Vì $u_1, \ldots, u_t$ chỉ chứa các biến thuộc tập $\left\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right\}$, nên $\forall\, u_i, i = \overline{1, t},$ luôn tồn tại i_j mà $j \in \{1, \ldots, k\}$, sao cho $u_i \vdots x_{i_j}$ ha $\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \sqrt{u_1}, \ldots, \sqrt{u_t}\right) = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$.

iii) Áp dụng ii) cho $k = n$, ta nhận được kết quả của iii).

Ví dụ 2.2.7

Giả sử $K\left[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\right]$ là đa thức 7 biến trên trường *K*. Khi đó ta có

i) Nếu $I = \left(x_1, x_2, x_3^{11}, x_3^{3}\right)$ thì $\sqrt{I} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$.

ii) Nếu $I = \left(x_1^{13}, x_2^{25}, x_3^{5}, x_4^{3}, x_5^{8}, x_1 x_3^{2} x_4 x_5^{4}\right)$ thì $\sqrt{I} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right)$.

iii) Nếu $I = \left(x_1^{12}, x_2^{7}, x_3^{3}, x_4^{9}, x_5^{8}, x_1 x_3^{2} x_4 x_5^{4}, x_2 x_3 x_4^{2} x_5^{7}\right)$ thì $\sqrt{I} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right)$.

iv) Nếu $I = \left(x_1^{33}, x_2^{71}, x_3, x_4^{13}, x_5^{8}, x_1 x_4 x_5^{4}, x_2 x_4^{2}\right)$ thì $\sqrt{I} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right)$.

v) Nếu $I = \left(x_1^{3}, x_2^{5}, x_3^{44}, x_4^{3}, x_5, x_6^{11}, x_1^{8} x_2^{9}, x_1 x_3^{5} x_4^{2}, x_3^{7} x_4^{2}, x_1 x_3^{5} x_6\right)$

thì $\sqrt{I} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\right)$.

vi) Nếu $I = (x_1^{5}, x_2^{7}, x_3, x_4^{7}, x_5^{30}, x_6^{8}, x_7^{5}, x_1^{3} x_2^{5} x_5, x_4 x_5^{8}, x_2 x_4^{2} x_5^{8} x_7^{2})$

thì $\sqrt{I} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\right)$.

3. KẾT LUẬN

Cho $R = K\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$ là vành đa thức n biến.

Khi đó với mọi iđêan đơn thức $I = \left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right)$, iđêan căn được xác định bởi công thức $\sqrt{I} = \left(\sqrt{f_1}, \sqrt{f_2}, \ldots, \sqrt{f_n}\right)$.

Đối với một số lớp iđêan đặc biệt, từ công thức trên ta có thể tính toán cụ thể được iđêan căn như sau:

Edited with the trial version of
Foxit Advanced PDF Editor
To remove this notice, visit:
www.foxitsoftware.com/shopping

Giả sử

$$\left\{x_{i_1}, ..., x_{i_1}\right\} \subseteq \left\{x_1, ..., x_n\right\}.$$

Khi đó, ta có

i) $\sqrt{\left(x_{i_1}^{\alpha_1}, ..., x_{i_k}^{\alpha_k}\right)} = \left(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\right)$.

ii) $\sqrt{\left(x_{i_1}^{\alpha_1}, ..., x_{i_k}^{\alpha_k}, u_1, ..., u_t\right)} = \left(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\right)$, trong đó $u_1, ..., u_t$ là các đơn thức chỉ chứa các biến thuộc tập $\left\{x_{i_1}, ..., x_{i_k}\right\}$ và $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

iii) $\sqrt{\left(x_1^{\alpha_1}, ..., x_n^{\alpha_n}, u_1, ..., u_t\right)} = \left(x_1, \dots, x_n\right)$, trong đó $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ và $u_1, ..., u_t$ là các đơn thức tùy ý của $K\left[x_1, ..., x_n\right]$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Tuấn Hoa (2013), *Đại số máy tính*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
[2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald (1969), *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley.
[3] J. Herzog and T. Hibi (2011), *Monomial ideals*, Springer Press.
[4] H. Matsumura (1986), *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press.
[5] R.Y. Sharp (1990), *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press.

THE RADICAL OF MONOMIAL IDEAL STRUCTURE

Le Quang Huy, Hoang Thi Minh Nhan

ABSTRACT

This paper gives the radical of monomial ideal structure of polynomial rings in the indeterminates.

Keywords: *Ring, radical of monomial ideal, polynomial ring.*