SỰ ỔN ĐỊNH CỦA CÁC CHUYỂN ĐỘNG

Nguyễn Văn Cần[1]

TÓM TẮT

Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu một trong các phương pháp để xét sự ổn định của các chuyển động, được định danh bằng cách chuyển các hệ phương trình vi phân phi tuyến về hệ phương trình vi phân tuyến tính dẫn đến sự nghiên cứu được đơn giản hơn nhiều nhờ vào phương pháp của Aizerman.

Từ khóa:*Sự ổn định, hệ phương trình vi phân phi tuyến tính, hệ phương trình vi phân tuyến tính.*

1. ĐẶTVẤN ĐỀ

Chúng ta đã biết mọi chuyển động đều được mô tả dưới một hệ phương trình vi phân (phần lớn là hệ phi tuyến), tuy nhiên việc xét sự ổn định của chuyển động là khó và phức tạp. Trong bài viết này,chúng tôi trình bày một phương pháp quan trọng đưa các chuyển động phức tạp về chuyển động đơn giản ổn định. Kỹ thuật được dùng là đưa hệ phương trình vi phân phi tuyến về hệ phương trình tuyến tính dựa vào khai triển Taylor, nhờ đó việc xét sự ổn định của chuyển động được đơn giản và tối ưu hơn nhiều.

2. NỘI DUNG

2.1.Kiến thức liên quan

2.1.1. Một số khái niệm và kết quả về sự ổn định nghiệm của hệ phương trình vi phân

Xét hệ phương trình vi phân $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (2.1)

Trong đó $x = colon(x_1, x_2, ..., x_n)$; $f(t,x) = colon(f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n)), x \in \mathbb{R}^n$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ trong miền $\Omega = \{I^+ \times D / I^+ = (a, +\infty); D \subset R^n\}$

Giả thiết rằng hệ có tính chất

a. Tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy.

b. Nghiệm thác triển được ra vô tận bên phải.

c. Nghiệm có tính chất liên tục tích phân.

Định nghĩa 1.[7] Nghiệm $\eta(t), t \in I^+$ của hệ (1) được gọi là ổn định (theo nghĩa Liapunov) khi $t \to +\infty$, nếu với $\forall \varepsilon > 0; \forall t_0 \in I^+, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sao cho mọi nghiệm *x(t)* của hệ kể cả $\eta(t)$ thỏa mãn $\| x(t_0) - \eta(t_0) \| > \delta$, thì

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

i. Xác định trên $[t_0,+\infty)$.

ii. Thỏa mãn bất đẳng thức $\|x(t)-\eta(t)\|<\varepsilon$ với $\forall t\in[t_0,+\infty)$.

Định nghĩa 2. Nghiệm $\xi\equiv 0$ của hệ được gọi là ổn định (theo nghĩa Liapunov) khi $t\to+\infty$, nếu với $\forall\varepsilon>0$; $\forall t_0\in I^+$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$ sao cho mọi nghiệm *x(t)* của hệ thỏa mãn $\|x(t_0)\|>\delta$, thì

i. Xác định trên $[t_0,+\infty)$.

ii. Thỏa mãn bất đẳng thức $\|x(t)\|<\varepsilon$ với $\forall t\in[t_0,+\infty)$.

Định nghĩa 3. Nghiệm $\eta(t), t\in I^+$ của hệ (2.1) được gọi là không ổn định, nếu $\exists\varepsilon_0>0$; $\exists t_0\in I^+$, $\forall\delta>0$; tồn tại nghiệm $x_\delta(t), \exists t_1>t_0$, thỏa mãn $\|x_\delta(t_0)-\eta(t_0)\|<\delta$ và $\|x_\delta(t_1)-\eta(t_1)\|\geq\varepsilon_0$.

Định nghĩa 4. Nghiệm $\eta(t), t\in I^+$ của hệ (2.1) được gọi là ổn định tiệm cận khi $t\to+\infty$ nếu

i. $\eta(t)$ ổn định khi $t\to+\infty$.

ii. Với $\forall t_0\in I^+$, $\exists\Delta=\Delta(t_0)>0$ sao cho mọi nghiệm x(t) của hệ thỏa mãn $\|x(t_0)-\eta(t_0)\|<\Delta$, thì: $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)-\eta(t)\|=0$.

Định nghĩa 5. Nghiệm $\xi=0$ của hệ (2.1) được gọi là ổn định tiệm cận khi $t\to+\infty$ nếu

i. Nếu nó ổn định khi $t\to+\infty$.

ii. Với $\forall t_0\in I^+$, $\exists\Delta=\Delta(t_0)>0$ sao cho mọi nghiệm x(t) của hệ thỏa mãn $\|x(t_0)\|<\Delta$, thì $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$.

Định nghĩa 6. Nghiệm $\eta(t)$, $t\in I^+$ của hệ (2.1) được gọi là ổn định tiệm cận toàn cục khi $t\to+\infty$ nếu

i. $\eta(t)$ ổn định khi $t\to+\infty$.

ii. Với $\forall t_0\in I^+$, sao cho mọi nghiệm x(t) của hệ thỏa mãn $\|x(t_0)-\eta(t_0)\|<+\infty$, thì: $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)-\eta(t)\|=0$.

2.1.2. Sự ổn định của hệ vi phân tuyến tính

Xét hệ vi phân $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)$; $A(t)$; $f(t)\in C(I^+)$. (2.2)

và hệ thuần nhất tương ứng $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$. (2.3)

Định nghĩa 7. Hệ (2.2) được gọi là ổn định (không ổn định) khi $t \to +\infty$, nếu mọi nghiệm của hệ là ổn định (hoặc không ổn định) khi $t \to +\infty$.

Chú ý: a. Nếu hệ (2.3) ổn định tiệm cận thì cũng ổn định toàn cục.

b. Hệ (2.3) ổn định khi ít nhất một nghiệm của nó ổn định và không ổn định khi có một nghiệm không ổn định.

Định lý 1. Điều kiện cần và đủ để hệ (2.2) ổn định tiệm cận là nghiệm x = 0 của hệ ổn định tiệm cận.

2.1.3. Sự ổn định của hệ vi phân với hệ số hằng số

Xét hệ vi phân: $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x + f(t); A(a_{ij})_{m\times n}; a_{ij} \in \mathbb{R}$ (2.4)

Định lý 2. Điều kiện cần và đủ để hệ (2.4) ổn định là $\operatorname{Re}\lambda_j(A) \le 0,\quad j = \overline{1,m}\quad (m \le n)$, trong đó nghiệm λ_j có $\operatorname{Re}\lambda_j(A) = 0$ chỉ có nghiệm sơ cấp đơn.

Định lý 3. Điều kiện cần và đủ để hệ (2.4) ổn định tiệm cận là $\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0$ $\forall j = \overline{1,n}$.

2.1.4. Sự ổn định theo xấp xỉ thứ nhất (Liapunov) [2]

Xét hệ vi phân $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$; giả sử $x_i(t) = 0$ là một nghiệm. Để xét sự ổn định của nghiệm tầm thường này ta tách phần tuyến tính của các hàm $f_i(f = (f_1, f_2, ..., f_n))$ trong lân cận của điểm $(x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$ nhờ công thức Taylor.

Định lý 4. (Định lý Liapunov)

Xét hệ: $\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \varphi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$,

trong đó $a_{ik} \in \mathbb{R}$; $\varphi_i(t,x) \in C(0 \le t < +\infty, \|x\| < H)$ và $\dfrac{\varphi(t,x)}{\|x\|} \xrightarrow{t} 0$, khi $x \to 0$; ở đây $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}$. Khi đó, nếu tất cả các nghiệm đặc trưng của ma trận $A = (a_{ik})$; $i,k = \overline{1,n}$ có phần thực âm, thì nghiệm không của hệ là ổn định tiệm cận.

2.1.5. Toán tử tự liên hợp [1]

Định nghĩa 8. Nếu X, Y là các không gian Hilbert và A: $X \to Y$ là toán tử tuyến tính liên tục thì toán tử liên hợp A^* của A; $A^*: Y \to X$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục xác định bởi: $(A^*y, x) = (y, Ax); x \in X, y \in Y$

Định nghĩa 9. Toán tử A: $X \to X$ trong không gian Hilbert X là tự liên hợp nếu $A = A^*$; nghĩa là: (Ax,y) = (x,Ay), với mọi x, y thuộc X.

2.1.6. Các ký hiệu được dùng

$a. R(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| \le r\}.$

$b. S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| = r\}.$

$c. \operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*).$

d. $\sigma(A)$ là phổ của toán tử A, trong đó :

A là ma trận hằng thì: $\sigma(A) = \{\lambda_j(A)\}$ với λ_j là các giá trị riêng của A.

e. $\Lambda(A) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$, là chuẩn logarit của toán tử A.

f. $S_j(A) = \lambda_j(A^* A)$, là các s- số của toán tử A.

g. $\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$.

2.2. Tính ổn định của hệ phương trình vi phân phi tuyến

Xét sự ổn định của các chuyển động; trong bài báo này chỉ đặt tiêu chí mà các chuyển động được mô tả bởi các hệ vi phân phi tuyến dạng $\dot{x} = Ax + F(x)$ (3.1)

Trong đó: $A = (a_{ik}); i,k = \overline{1,n}$; $a_{ik} \in \mathbb{R}$; và $F(x) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n); f_2(x_1, x_2, ..., x_n) ...; f_n(x_1, x_2, ..., x_n))$ là ổn định toàn cục.

Xét hệ vi phân tuyến tính: $\dot{x} = Ax + Bx$ (3.2), trong đó $B = (b_{ik}); i,k = \overline{1,n}$ được chọn sao cho $\sigma(\operatorname{Re}(A+B)) \le -\alpha$; α là hằng số dương, nghĩa là (3.2) ổn định tiệm cận.

Ký hiệu $G = \{B / \sigma(\operatorname{Re}(A+B)) \le -\alpha\}$. Ta cố định phần tử $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ và đặt tương ứng với ma trận $C(z) = (c_{ik});\ i,k = \overline{1,n}.$ Ở đây $c_{ik} = \begin{cases} \dfrac{f(z_1, z_2, ..., z_n)}{m z_k}; & z_k \ne 0 \\ d_{ik} & z_k = 0 \end{cases}$;

m là số phần tử khác 0 của véc tơ z.

$d_{ik} = \lim_{z_k \to 0} \frac{f(z_1, z_2, ..., z_n)}{z_k}$, nếu giới hạn tồn tại và $d_{ik} = 0$ khi giới hạn không tồn tại.

$$D(x) = (d_1, d_2, .., d_n); d_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) - f_i(z_1, z_2, ..., z_n) - \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(x_k - z_k).$$

Khi đó hệ (3.1) được chuyển thành hệ $\dot{x} = Ax + Bx + D(x)$. (3.3)

Định lý 5. [4] Giả sử $z=(z_1,z_2,...,z_n)\in\mathbb{R}^n$; ma trận $C(z)\in G$; các hàm $f_i(z)$ liên tục và $f_i(0,0,...,0)=0$; $i=\overline{1,n}$. Khi đó nghiệm của hệ (3.3) ổn định toàn cục.

Ví dụ 1. Nghiên cứu sự ổn định toàn cục của hệ vi phân $\begin{cases}\dot{x}=-2x-x^3\\ \dot{y}=\quad -y.\end{cases}$ (1)

Ta có $A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$; $f_1(x,y)=-x^3;f_2(x,y)=0$ là các hàm liên tục và $f_1(0,0)=0$.

Ta xác định ma trận $C=(c_{ik});i,k=1,2.$

a. *Trường hợp 1*

$z=(z_1,z_2)\in R^2$; $(z_1,z_2)\neq(0,0)$; $c_{11}=-\dfrac{z_1^2}{2}$; $c_{12}=-\dfrac{z_1^3}{2z_2}$; $c_{21}=c_{22}=0;C=\begin{bmatrix}-\dfrac{z_1^2}{2} & -\dfrac{z_1^3}{2z_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Trong trường hợp này $A+C=\begin{bmatrix}-2-\dfrac{z_1^2}{2} & -\dfrac{z_1^3}{2z_2}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ dễ thấy các trị riêng của A+C là

$$\lambda_1=-2-\frac{z_1^2}{2};\ \lambda_2=-1 \text{ đều âm. Vậy } C(z)\in G\ .$$

b. *Trường hợp 2*

$z=(z_1,0),z_1\neq 0$; Ta có $c_{11}=-\dfrac{z_1^2}{2};c_{12}=c_{21}=c_{22}=0$; Vậy $A+C=\begin{bmatrix}-2-\dfrac{z_1^2}{2} & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

Trong trường hợp này $\lambda_1=-2-\dfrac{z_1^2}{2};\ \lambda_2=-1$ đều âm nên $C(z)\in G$.

c. *Trường hợp 3*

$z=(0,z_2);z_2\neq 0.$ Ta có $c_{11}=\lim\limits_{z_1\to 0}(-\dfrac{z_1^3}{z_1})=0;c_{12}=-\dfrac{z_1^3}{z_2}$ $c_{21}=c_{22}=0.$

Vậy $A+C=\begin{bmatrix}-2 & -\dfrac{z_1^3}{z_2}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. Dễ nhận thấy ma trận A+C có 2 giá trị riêng là: $\lambda_1=-2;\ \lambda_2=-1$ đều âm. Vậy $C(z)\in G$.

d. *Trường hợp 4*

$z=(0,0)$, ta có $c_{11}=\lim\limits_{z_1\to 0}(-\dfrac{z_1^3}{z_1})=0;c_{12}=c_{21}=c_{22}=0$ và $A+C=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ có các giá trị riêng $\lambda_1=-2;\ \lambda_2=-1$ nên $C(z)\in G$.

Nhận xét: Qua ví dụ trên ta khẳng định được với $\forall z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ thì hệ (3.3) ổn định toàn cục.

Điều ngược lại của Định lý 5 là không đúng.

Ví dụ 2: Nghiên cứu sự ổn định của hệ $\begin{cases}\dot{x}=-2x+y+x^2\\ \dot{y}=x-2y+x^2y.\end{cases}$ (2)

Ta có $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ và các hàm $f_1(x,y)=x^2$; $f_2(x,y)=x^2y$ là các vô cùng bé cấp cao so với $\sqrt{x^2+y^2}$. Hơn nữa x = 0, y = 0 là nghiệm của hệ (2); các nghiệm đặc trưng của ma trận A là $\lambda_1=-1;\lambda_2=-3$, nên theo định lý Liapunov (xem [9]) thì hệ (3.3) là ổn định toàn cục.

Mặt khác theo Định lý 5, ta có với $z=(2,0)\in R^2$ thì $c_{11}=4;c_{12}=0$ do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y}=\infty$; $c_{21}=0$; $c_{22}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y}{y}=4$ nên $C=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ và $A+C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ có các trị riêng là: $\lambda_1=3;\lambda_2=1$ đều dương nghĩa là ma trận $C\notin G$, điều này cho câu khẳng định của nhận xét trên.

2.3. Phương pháp Aizerman [4]

Cho hệ phương trình: $\begin{cases}\dot{x}_1=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+bx_1\\ \dot{x}_k=\sum\limits_{j=2}^{n}a_{kj}x_j\quad,k=\overline{2,n}\end{cases}$; $a_{kj},b\in\mathbb{R}$; $\alpha<b<\beta$. (4.1)

Biết rằng nghiệm 0 của hệ là ổn định tiệm cận, xét sự ổn định toàn cục của hệ phi tuyến

$\begin{cases}\dot{x}_1=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+f(x_1)\\ \dot{x}_k=\sum\limits_{j=2}^{n}a_{kj}x_j\quad,k=\overline{2,n}\end{cases}$ (4.2) và với điều kiện $a_{kj},b\in\mathbb{R}$; $\alpha<\dfrac{f(x_1)}{x_1}<\beta$.

Định lý 6. Giả sử hệ vi phân tuyến tính $\begin{cases}\dot{x}_1=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+bx_1\\ \dot{x}_k=\sum\limits_{j=2}^{n}a_{kj}x_j\quad,k=\overline{2,n}\end{cases}$; (4.1)

là ổn định tiệm cận; $\forall b\in\mathbb{R}$, $A=(a_{ij})$ $i,j=\overline{1,n}$ là tự liên hợp và $\alpha<\dfrac{f(x_1)}{x_1}<\beta$; $-\infty<\alpha,\beta<+\infty$

f(0) = 0 khi đó hệ phi tuyến: $\begin{cases}\dot{x}_1=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+f(x_1)\\ \dot{x}_k=\sum\limits_{j=2}^{n}a_{kj}x_j\quad,k=\overline{2,n}\end{cases}$ (4.2) là ổn định toàn cục.

Nhận xét. Điều ngược lại của Định lý 6 là không đúng.

Ví dụ 3: Xét sự ổn định của hệ: $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x \\ \dot{y} = -3x - 2y \end{cases}$. (3)

Giải

Rõ ràng x = 0, y = 0 là nghiệm của hệ. Dùng khai triển Taylor tại x = 0 thì $\sin x = x + 0(x^2)$, khi đó hệ (3) trở thành $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 0(x^2) \\ \dot{y} = -3x - 2y. \end{cases}$ (4)

có ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ không là ma trận tự liên hợp và các trị riêng là $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ có $\text{Re}\lambda_1 = \text{Re}\lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$. Theo định lý Lyapunov hệ ổn định tiệm cận.

Định lý 7. Giả sử với mỗi $z \in \mathbb{R}^n$ ma trận $C(z) \in G^* = \{C : \Lambda(A+C) \le \alpha < 0\}$ $i = \overline{1,n}$ các hàm $f_i(z_1, z_2, ..., z_n)$ liên tục và $f_i(0, 0, ..., 0) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Khi đó nghiệm của hệ (4.2) là ổn định toàn cục.

Nhận xét: Điều ngược lại là không đúng.

Ví dụ 4: Nghiên cứu sự ổn định của hệ $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + x^2 \\ \dot{y} = x - 3y + x^2 y. \end{cases}$ (5)

Ta có $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ và các hàm $f_1(x,y) = x^2$; $f_2(x,y) = x^2 y$ là các vô cùng bé cấp cao so với $\sqrt{x^2 + y^2}$, hơn nữa x = 0, y = 0 là nghiệm của hệ (5); có các nghiệm đặc trưng của ma trận A là $\lambda_1 = -2 + \sqrt{2}; \lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$, nên theo định lý Liapunov (xem [2]) thì hệ (5) là ổn định tiệm cận. Mặt khác ta có với $z = (2,0) \notin G^*$ điều này cho câu khẳng định của nhận xét trên.

Định lý 8. Giả sử $\forall z \in \mathbb{R}^n$ ma trận $C(z) \in G^{**} = \left\{C : \max_j S_j(A+C) \le \alpha < 0\right\}$; các hàm $f_i(z_1, z_2, ..., z_n)$ liên tục và $f_i(0, 0, ..., 0) = 0$, $i = \overline{1,n}$, khi đó nghiệm của hệ (3.2) là ổn định toàn cục.

Hệ quả. Giả sử nghiệm của hệ: $\dot{x} = \overline{A_b^*}\,\overline{A_b} x$; (4.1) ổn định tiệm cận $\forall b \in B$,

$\alpha < \frac{f(x_1)}{x_1} < \beta$; Khi đó hệ: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + f(x_1) \\ \dot{x}_k = \sum_{j=2}^{n} a_{kj} x_j, \; k = \overline{2,n} \end{cases}$ (4.2) ổn định toàn cục.

Chứng minh

Theo Định lý 8 hệ ổn định tiệm cận, $\overline{A_b}$ tự liên hợp nên có các giá trị riêng là số thực [1].

Suy ra $\operatorname{Re}\lambda_j\left(\overline{A_b^*}\,\overline{A_b}\right) = \lambda_j\left(\overline{A_b^*}\,\overline{A_b}\right) < 0$ với $\forall j = \overline{1,m}$; $m \leq r$ theo định nghĩa s - số của toán tử $\overline{A_b}$ ta có: $S_j\left(\overline{A_b}\right) \equiv \lambda_j\left(\overline{A_b^*}\,\overline{A_b}\right) \leq \alpha < 0$.

Và Định lý 8 cho ta kết luận hệ (4.2) là ổn định toàn cục.

Ví dụ 5: Nghiên cứu sự ổn định toàn cục của hệ vi phân $\begin{cases} \dot{x} = -2x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ (6)

Trong ví dụ 1 đã khẳng định hệ là ổn định toàn cục.

Tuy nhiên với

$z = (0,1)$ ta có $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $A+C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\left(A+C\right)^*\left(A+C\right) = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ có các trị riêng là $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$ đều dương nghĩa là $C \notin G^{**}$. Đó là điều khẳng định cho nhận xét trên.

3. KẾT LUẬN

Trong bài viết chúng tôi đã đưa ra các hệ quả, nhận xét và các ví dụ chứng tỏ rằng các chuyển động được mô tả bởi các hệ vi phân phi tuyến được nêu ra chỉ là điều kiện ắt có chưa đủ để chuyển động tương ứng là ổn định; trình bày phương pháp Aizerman để đưa các chuyển động phức tạp về các chuyển động đơn giản ổn định, bằng việc sử dụng khai triển Taylor để đưa hệ phương trình vi phân phi tuyến về hệ phương trình vi phân tuyến tính. Nhờ đó việc xét tính ổn định của chuyển động được đơn giản và tối ưu hơn nhiều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phan Đức Chính (1978), *Giải tích hàm,* Nxb. Đại học và Trung học chuyên nghiệp - Hà Nội.

[2] Nguyễn Thế Hoàn, Trần Văn Nhung (2014), *Bài tập phương trình vi phân,* Nxb. Giáo dục Việt Nam (Tái bản lần thứ 5), Hà Nội.

[3] I.C Golberg, M.G Krein (1969), *Introduction to the theory of linear nonself-adjoint operators*, American mathematical society, Providence, Rhode Island 02904.

[4] А Айзерман , Ф.Р, Гантмахер (1963), *Абсолютная устойчоивстъ регулируемых ситем,* Изд Наук СССР, М.

[5] Р. Беллман (1969), *Ведение в теорию матриц*, Изд Наука, М.

[6] И.В. Бойков, К проблеме Айзерман (1994), *Прикладная математика и механика*, Том 58, выл, М.

STABILITY OF MOVEMENTS

Nguyen Van Can

ABSTRACT

In this article we introduce one of the methods to test the stability of movements, through converting nonlinear differential systems to linear systems, which simplifies the research process by using Aizerman's conjecture.

Keywords:*Stability, nonlinear differential systems, linear systems.*

Ngày nộp bài: 27/3/2019; Ngày gửi phản biện: 8/4/2019; Ngày duyệt đăng: 6/8/2019