

ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG KIỂU PRESIC VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Văn Lương¹, Trần Thị Hương², Hoàng Lê Minh³

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi đưa ra một số ứng dụng của định lý điểm bất động chung kiểu Presic vào giải các bài toán về sự hội tụ của dãy số và giải các hệ phương trình đối xứng phi tuyến.

Từ khóa: *Điểm bất động chung, định lý điểm bất động kiểu Presic, dãy truy hồi, hệ phương trình đối xứng.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Nguyên lý ánh xạ co được phát biểu và chứng minh trong luận án tiến sĩ của Banach năm 1922 và trở thành một công cụ quan trọng có nhiều ứng dụng trong giải tích, toán học cũng như các lĩnh vực khoa học khác. Bởi tầm quan trọng đó, nhiều nhà toán học đã tìm cách mở rộng nguyên lý ánh xạ co và đưa ra các ứng dụng mới. Việc mở rộng nguyên lý ánh xạ co về cơ bản theo hai hướng: mở rộng lớp ánh xạ và mở rộng không gian. Năm 1965, Presic [7] chứng minh một định lý điểm bất động thỏa mãn điều kiện kiểu co cho “ánh xạ nhiều biến” trên không gian tích. Kết quả này có nhiều ứng dụng, đặc biệt là trong lý thuyết phương trình sai phân, do đó nhiều nhà toán học mở rộng kết quả của Presic cho các trường hợp tổng quát hơn [3, 5, 6, 8, 9] và các tài liệu được trích dẫn trong các bài báo đó). Trong bài báo [4], các tác giả đã áp dụng định lý của Presic vào nghiên cứu sự hội tụ của các dãy số cho ở dạng truy hồi và vào giải các hệ phương trình đối xứng phi tuyến. Trên cơ sở ý tưởng của bài báo [4], trong bài báo này chúng tôi đưa ra một số áp dụng tương tự của định lý điểm bất động chung kiểu Presic. Để làm được điều đó, trước tiên chúng tôi sẽ chứng minh một định lý về điểm bất động chung cho hai ánh xạ trên tập số thực. Lưu ý rằng, sự tồn tại điểm chung, điểm bất động chung của các ánh xạ thỏa mãn điều kiện của định lý là đã biết. Tuy nhiên, chúng tôi xây dựng các dãy số “chứa trễ” và chứng minh các dãy số này hội tụ về giá trị chung của các ánh xạ. Kết quả này là mới và có vai trò quan trọng trong việc đưa ra các áp dụng. Phần còn lại của bài báo được bố cục như sau. Trong mục 2, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về dãy số được sử dụng trong bài báo. Trong mục 3, chúng tôi chứng minh định lý điểm bất động (chung) kiểu Presic cho các ánh xạ trên tập số thực. Áp dụng sơ cấp của định lý sẽ được trình bày trong mục 4.

^{1,3} Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

² Trường Trung học phổ thông Sầm Sơn, Thanh Hóa

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Một số khái niệm và kết quả sơ bộ

Định nghĩa 2.1. Cho E là một tập con khác rỗng của \mathbb{R} , k là một số nguyên dương và $f: E^k \rightarrow E$ là một hàm số. Số thực $x \in E$ được gọi là điểm bất động của f nếu $f(x, x, \dots, x) = x$.

Định nghĩa 2.2. Cho E là một tập con khác rỗng của \mathbb{R} , k là một số nguyên dương và $f: E^k \rightarrow E$ và $g: E \rightarrow E$ là các hàm số.

- (1) Số thực $x \in E$ được gọi là điểm bất động chung của f và g nếu $f(x, x, \dots, x) = g(x)$.
- (2) Nếu $y = f(x, \dots, x) = g(x)$ thì y được gọi là giá trị chung của f và g .
- (3) Nếu $x = f(x, \dots, x) = g(x)$ thì x được gọi là điểm bất động chung của f và g .
- (4) f và g được gọi là giao hoán tại x nếu $g(f(x, \dots, x)) = f(g(x), \dots, g(x))$.
- (5) f và g được gọi là tương thích yếu nếu các hàm số giao hoán tại các điểm chung.

Bổ đề 2.3. ([1]) Cho E là một tập con khác rỗng của \mathbb{R} , k là một số nguyên dương và $f: E^k \rightarrow E$ và $g: E \rightarrow E$ là các hàm số tương thích yếu. Nếu f và g có duy nhất một giá trị chung y thì y là điểm bất động chung của f và g .

Kết quả sau tương tự như kết quả của Presic [7]. Tuy nhiên, để sử dụng cho việc chứng minh kết quả trong phần sau, chúng tôi đã cho phép “trễ” trong điều kiện chính (2.1). Bổ đề được chứng minh tương tự như kết quả của Presic.

Bổ đề 2.4. Cho k là một số nguyên dương, p là số nguyên không âm và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các số thực không âm thỏa mãn $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \alpha < 1$. Nếu $\{\Delta_n\}$ là một dãy số thực không âm thỏa mãn: $\Delta_{n+p+k} \leq \alpha_1 \Delta_n + \alpha_2 \Delta_{n+1} + \dots + \alpha_k \Delta_{n+k-1}$ (2.1)

với mọi $n \geq 1$, thì tồn tại $L > 0$ và $\theta \in (0, 1)$ sao cho $\Delta_n \leq L \cdot \theta^n, \forall n \geq 1$. (2.2)

Chứng minh.

Giả sử tồn tại i sao cho $\alpha_i \neq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\alpha_1 \neq 0$. Xét hàm số liên tục $f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_k x^{k-1} - x^{p+k}$.

Vì $f(1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k - 1 = \alpha - 1 < 0$ và $f(0) = \alpha_1 > 0$, nên tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho $f(\theta) = 0$, tức là $\theta^{p+k} = \alpha_1 + \alpha_2 \theta + \dots + \alpha_k \theta^{k-1}$.

$$\text{Đặt } L = \max \left\{ \frac{\Delta_1}{\theta}, \frac{\Delta_2}{\theta^2}, \dots, \frac{\Delta_{p+k}}{\theta^{p+k}} \right\}.$$

Khi đó bất đẳng thức (2.2) đúng với $n = 1, 2, \dots, p+k$. Giả sử (2.2) đúng với k giá trị liên tiếp của n là $m, m+1, \dots, m+k-1$ ta sẽ chứng minh (2.2) cũng đúng với $n = m+p+k$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} \Delta_{m+p+k} &\leq \alpha_1 \Delta_m + \alpha_2 \Delta_{m+1} + \dots + \alpha_k \Delta_{m+k-1} \\ &\leq \alpha_1 L \theta^m + \alpha_2 L \theta^{m+1} + \dots + \alpha_k L \theta^{m+k-1} \\ &\leq L \theta^m (\alpha_1 + \alpha_2 \theta + \dots + \alpha_k \theta^{k-1}) = L \theta^{m+p+k}. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Nếu $\alpha_i = 0$ với mọi i , thì dễ thấy bất đẳng thức (2.2) đúng với L như trên, trong đó $\theta \in (0, 1)$ bất kỳ.

Bổ đề 2.5. Cho $k \geq 0$ là một số nguyên, $0 \leq q < 1$ và $\{x_n\}, \{b_n\}$ là hai dãy số không âm thỏa mãn $x_{n+1} \leq qx_{n-k} + b_n$, với mọi $n \geq k$. Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Chứng minh.

Vì $0 \leq q < 1$, tồn tại $a > 0$ sao cho $q + a < 1$. Giả sử dãy số $\{x_n\}$ không hội tụ về 0. Khi đó tồn tại dãy con $\{x_{n_i}\}$ của $\{x_n\}$ không hội tụ về 0 và $ax_{n_i} \geq b_{n_i}$ với mọi i . Khi đó, với mọi i ta có $x_{n_i+1} \leq qx_{n_i-k} + ax_{n_i}$.

Áp dụng Bổ đề 2.4, ta suy ra $x_{n_i} \rightarrow 0$ khi $i \rightarrow \infty$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Trường hợp $k = 1$ có thể xem trong [2]. Chú ý rằng, trong [2], chứng minh cho trường hợp $k = 1$ khá dài, sử dụng định lý Stolz - Cesaro.

2.2. Định lý điểm bất động chung kiểu Presic

Trong phần này, chúng tôi sẽ chứng minh điểm bất động chung kiểu Presic cho hai ánh xạ. Sự tồn tại giá trị chung và điểm bất động chung cho hai ánh xạ thỏa mãn các điều kiện ở định lý dưới đây là một kết quả đã biết cho không gian metric tổng quát (ví dụ ở bài báo [9]). Tuy nhiên, ở định lý dưới đây, chúng tôi phát biểu kết quả trong tập các số thực. Ngoài ra, khi xây dựng các dãy lặp hội tụ về giá trị chung của các hàm số, chúng tôi xây dựng các dãy số có chứa trẻ.

Định lý 3.1. Cho E là một tập con khác rỗng của \mathbb{R} , k là một số nguyên dương và $f: E^k \rightarrow E$ và $g: E \rightarrow E$ là các ánh xạ thỏa mãn $f(E^k) \subset g(E)$ và $g(E)$ là tập con đóng của \mathbb{R} . Giả sử tồn tại các số thực không âm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ và $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \alpha < 1$ sao cho

$$|f(x_0, x_1, \dots, x_k) - f(x_1, x_2, \dots, x_k)| \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i |g(x_{i-1}) - g(x_i)|$$

với mọi $x_0, x_1, \dots, x_k \in E$. Khi đó

(i) f và g có một giá trị chung duy nhất, kí hiệu là x^* .

(ii) Giả sử l là một số nguyên dương cho trước. Với $x_0, x_1, \dots, x_{n-l} \in E$ cho trước, ta có thể xây dựng được dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn

$$g(x_n) = f(x_{n-l}, x_{n-l}, \dots, x_{n-l}), \quad \forall n \geq l$$

và dãy số $\{g(x_n)\}$ hội tụ tới x^* .

(iii) Giả sử p là một số nguyên dương cho trước. Với $y_0, y_1, \dots, y_{k+p-2} \in E$ cho trước, ta có thể xây dựng được dãy số $\{y_n\}$ thỏa mãn

$$g(y_n) = f(y_{n-p}, y_{n-p-1}, \dots, y_{n-p-k+1}), \quad \forall n \geq p+k-1$$

và dãy số $\{g(y_n)\}$ hội tụ tới x^* .

(iv) Giả sử q là một số nguyên dương cho trước. Với $z_0, z_1, \dots, z_{k+q-2} \in E$ cho trước, ta có thể xây dựng được dãy số $\{z_n\}$ thỏa mãn

$$g(z_n) = f(z_{n-q-k+1}, x_{n-q-k+2}, \dots, x_{n-q}), \quad \forall n \geq q+k-1$$

và dãy số $\{g(z_n)\}$ hội tụ tới x^* .

(v) Nếu f và g là hai ánh xạ tương thích yếu, thì f và g có điểm bất động chung duy nhất.

Chứng minh.

(i), (ii). Với $x_0, x_1, \dots, x_{n-l-1} \in E$ cho trước, vì $f(E^k) \subset g(E)$ nên dãy số $\{g(x_n)\}$ hoàn toàn xác định. Với $n \geq l$, ta có

$$\begin{aligned} |g(x_n) - g(x_{n+1})| &= |f(x_{n-l}, x_{n-l}, \dots, x_{n-l}) - f(x_{n-l+1}, x_{n-l+1}, \dots, x_{n-l+1})| \\ &\leq |f(x_{n-l}, x_{n-l}, \dots, x_{n-l}) - f(x_{n-l}, \dots, x_{n-l}, x_{n-l+1})| \\ &\quad + |f(x_{n-l}, \dots, x_{n-l}, x_{n-l+1}) - f(x_{n-l}, \dots, x_{n-l}, x_{n-l+1}, x_{n-l+1})| + \dots \\ &\quad + |f(x_{n-l}, x_{n-l+1}, \dots, x_{n-l+1}) - f(x_{n-l+1}, \dots, x_{n-l+1}, x_{n-l+1})| \\ &\leq \alpha_k |g(x_{n-l}) - g(x_{n-l+1})| + \dots + \alpha_1 |g(x_{n-l}) - g(x_{n-l+1})| \\ &= \alpha |g(x_{n-l}) - g(x_{n-l+1})|. \end{aligned}$$

Đặt $L_1 = \max \{|g(x_{n-l}) - g(x_{n-l+1})| : 0 \leq l \leq l+1\}$. Với mọi $n \geq l$, ta có

$$|g(x_n) - g(x_{n+1})| \leq \alpha^{\left[\frac{n}{l}\right]} L_1.$$

Với $m > n \geq l$, ta có

$$\begin{aligned} |g(x_n) - g(x_m)| &= |g(x_n) - g(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) - g(x_{n+2}) + \dots + g(x_{m-1}) - g(x_m)| \\ &\leq |g(x_n) - g(x_{n+1})| + |g(x_{n+1}) - g(x_{n+2})| + \dots + |g(x_{m-1}) - g(x_m)| \\ &\leq \alpha^{\left[\frac{n}{l}\right]} L_1 + \alpha^{\left[\frac{n+1}{l}\right]} L_1 + \dots + \alpha^{\left[\frac{m-1}{l}\right]} L_1 \leq \left(\alpha^{\left[\frac{n}{l}\right]} + \alpha^{\left[\frac{n}{l}\right]+1} + \dots \right) L_1 \cdot l \\ &\leq \frac{\alpha^{\left[\frac{n}{l}\right]}}{1-\alpha} L_1 \cdot l. \end{aligned}$$

Do đó $\lim_{m,n \rightarrow \infty} |g(x_n) - g(x_m)| = 0$.

Tức là, dãy số $\{g(x_n)\}$ là dãy Cauchy. Vì $g(E)$ là tập đóng nên $\{g(x_n)\}$ hội tụ tới $x^* \in g(E)$. Vì $x^* \in g(E)$ nên tồn tại $u \in E$ sao cho $g(u) = x^*$.

Với $m > n \geq l$, ta có

$$\begin{aligned} |g(x_n) - f(u, u, \dots, u)| &= |f(x_{n-l}, x_{n-l}, \dots, x_{n-l}) - f(u, u, \dots, u)| \\ &= |f(x_{n-l}, x_{n-l}, \dots, x_{n-l}) - f(x_{n-l}, \dots, x_{n-l}, u) + \dots + f(x_{n-l}, u, \dots, u) - f(u, u, \dots, u)| \\ &\leq |f(x_{n-l}, x_{n-l}, \dots, x_{n-l}) - f(x_{n-l}, \dots, x_{n-l}, u)| + \dots + |f(x_{n-l}, u, \dots, u) - f(u, u, \dots, u)| \\ &\leq \alpha_k |g(x_{n-l}) - g(u)| + \dots + \alpha_1 |g(x_{n-l}) - g(u)| = \alpha |g(x_{n-l}) - g(u)|. \end{aligned}$$

Vì $g(x_n) \rightarrow g(u)$ khi $n \rightarrow \infty$, nên suy ra $g(x_n) \rightarrow f(u, u, \dots, u)$ khi $n \rightarrow \infty$. Do giới hạn là duy nhất nên ta có $g(u) = f(u, u, \dots, u) = x^*$.

Do đó u là một điểm chung của f và g , còn x^* là một giá trị chung của f và g .

Giả sử f và g có giá trị chung y^* với $y^* \neq x^*$. Khi đó tồn tại $w \in E$ sao cho

$$g(w) = f(w, w, \dots, w) = y^*.$$

Ta có

$$\begin{aligned} |g(u) - g(w)| &= |f(u, u, \dots, u) - f(w, w, \dots, w)| \\ &= |f(u, u, \dots, u) - f(u, \dots, u, w) + \dots + f(u, w, \dots, w) - f(w, w, \dots, w)| \\ &\leq |f(u, u, \dots, u) - f(u, \dots, u, w)| + \dots + |f(u, w, \dots, w) - f(w, w, \dots, w)| \\ &\leq \alpha_k |g(u) - g(w)| + \dots + \alpha_1 |g(u) - g(w)| = \alpha |g(u) - g(w)|. \end{aligned}$$

Vì $\alpha < 1$, nên ta có $g(u) = g(w)$, hay $x^* = y^*$. Điều này vô lý, suy ra f và g có một giá trị chung duy nhất.

(iii) Với $y_0, y_1, \dots, y_{k+p-2} \in E$ cho trước, vì $f(E^k) \subset g(E)$ nên dãy số $\{g(y_n)\}$ hoàn toàn xác định. Với $n \geq p+k-1$, ta có

$$\begin{aligned} |g(y_n) - g(y_{n+1})| &= |f(y_{n-p}, y_{n-p-1}, \dots, y_{n-p-k+1}) - f(y_{n-p+1}, y_{n-p}, \dots, y_{n-p-k+2})| \\ &\leq \alpha_1 |g(y_{n-p}) - g(y_{n-p+1})| + \dots + \alpha_k |g(y_{n-p-k+1}) - g(y_{n-p-k+2})|. \end{aligned}$$

Đặt $\Delta_{n+1} = |g(y_n) - g(y_{n+1})|, n \geq p+k-1$. Khi đó

$$\Delta_{n+1} = \alpha_1 \Delta_{n-p+1} + \alpha_2 \Delta_{n-p} + \dots + \alpha_k \Delta_{n-p-k+2}, \quad \forall n \geq p+k-1,$$

với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0$ và $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \alpha < 1$. Do đó theo Bổ đề 2.4 tồn tại số $L > 0$ và $\theta \in (0, 1)$

sao cho $\Delta_n \leq L\theta^n, \quad \forall n \geq p+k-1$.

Hay $|g(y_{n-1}) - g(y_n)| \leq L\theta^n, \quad \forall n \geq p+k-1$.

Với $m > n \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} |g(y_n) - g(y_m)| &= |g(y_n) - g(y_{n+1}) + g(y_{n+1}) - g(y_{n+2}) + \dots + g(y_{m-1}) - g(y_m)| \\ &\leq |g(y_n) - g(y_{n+1})| + |g(y_{n+1}) - g(y_{n+2})| + \dots + |g(y_{m-1}) - g(y_m)| \\ &\leq L\theta^{n+1} + L\theta^{n+2} + \dots + L\theta^m \\ &\leq L\theta^{n+1} (1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{m-n-1} + \dots) \\ &\leq L\theta^{n+1} \cdot \frac{\theta}{1-\theta}. \end{aligned}$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta^{n+1} = 0$, do đó $\lim_{m, n \rightarrow \infty} |g(y_n) - g(y_m)| = 0$. Tức dãy $\{g(y_n)\}$ là dãy Cauchy.

Vì $g(E)$ là tập đóng nên $\{g(y_n)\}$ hội tụ. Ta chứng minh $\{g(y_n)\}$ hội tụ tới x^* . Với $n \geq p+k-1$, ta có

$$\begin{aligned} |g(y_{n+1}) - x^*| &= |f(y_{n-p+1}, y_{n-p}, \dots, y_{n-p-k+2}) - f(u, u, \dots, u)| \\ &\leq |f(y_{n-p+1}, y_{n-p}, \dots, y_{n-p-k+2}) - f(y_{n-p}, y_{n-p-1}, \dots, y_{n-p-k+2}, u)| + \dots \\ &\quad + |f(y_{n-p-k+2}, u, \dots, u) - f(u, u, \dots, u)| \\ &\leq [\alpha_1 |g(y_{n-p}) - g(y_{n-p+1})| + \dots + \alpha_k |g(y_{n-p-k+2}) - x^*|] \\ &\quad + [\alpha_1 |g(y_{n-p-1}) - g(y_{n-p})| + \dots + \alpha_{k-1} |g(y_{n-p-k+2}) - x^*| + \alpha_k |x^* - x^*|] + \dots \\ &\quad + [\alpha_1 |g(y_{n-p-k+2}) - x^*| + \alpha_2 |x^* - x^*| + \dots + \alpha_k |x^* - x^*|] \\ &\leq [\alpha_1 L\theta^{n-p+1} + \dots + \alpha_{k-1} L\theta^{n-p-k+3} + \alpha_k |g(y_{n-p-k+2}) - x^*|] \\ &\quad + [\alpha_1 L\theta^{n-p} + \dots + \alpha_{k-1} |g(y_{n-p-k+2}) - x^*| + \alpha_k \cdot 0] + \dots \\ &\quad + [\alpha_1 |g(y_{n-p-k+2}) - x^*| + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 0] \\ &= \alpha_1 L\theta^{n-p+1} + (\alpha_1 + \alpha_2) L\theta^{n-p} + \dots + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) |g(y_{n-p-k+2}) - x^*|. \end{aligned}$$

Khi đó $|g(y_{n+1}) - x^*| \leq \alpha |g(y_{n-p-k+2}) - x^*| + L\theta^n [\alpha_1 \theta^{1-p} + \dots + (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}) \theta^{3-p-k}]$.

Vì $\theta \in (0, 1)$, ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} L\theta^n [\alpha_1 \theta^{1-p} + \dots + (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}) \theta^{3-p-k}] = 0$.

Áp dụng Bổ đề 2.5, ta được $\lim_{n \rightarrow \infty} |g(y_{n+1}) - x^*| = 0$,

hay $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = x^*$.

(iv). Chứng minh tương tự như (iii).

(v). Kết luận suy ra từ Bổ đề 2.3.

Ví dụ 3.2. Cho $E = [0, 32]$ và các hàm số $f : E \times E \rightarrow E, g : E \rightarrow E$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + 34} - \sqrt{x_2 + 2}, \quad \forall x_1, x_2 \in E,$$

$$\text{và} \quad g(x) = \sqrt{8x}, \quad \forall x \in E$$

Với mọi $x, y, z \in E$ ta có

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(y, z)| &\leq \frac{|x - y|}{\sqrt{x + 34} + \sqrt{y + 34}} + \frac{|x - y|}{\sqrt{y + 2} + \sqrt{z + 2}} \\ &= \frac{\sqrt{8x} + \sqrt{8y}}{8(\sqrt{x + 34} + \sqrt{y + 34})} |g(x) - g(y)| + \frac{\sqrt{8y} + \sqrt{8z}}{8(\sqrt{y + 2} + \sqrt{z + 2})} |g(y) - g(z)| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} |g(x) - g(y)| + \frac{\sqrt{2}}{4} |g(y) - g(z)| \\ &= \alpha_1 |g(x) - g(y)| + \alpha_2 |g(y) - g(z)|. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Nên điều kiện của Định lý 3.1 thỏa mãn. Ngoài ra có thể kiểm tra các điều kiện khác của Định lý 3.1 (trừ tính tương thích yếu của f và g) cũng thỏa mãn và ta có $x = 2$ thỏa mãn $g(x) = f(x, x) = 4$.

2.3. Ứng dụng vào các bài toán sơ cấp

Trong phần này, chúng tôi áp dụng kết quả trình bày ở phần trước vào giải một số bài toán sơ cấp. Cụ thể, chúng tôi áp dụng Định lý 3.1 chứng minh sự hội tụ của dãy số cho dưới dạng truy hồi và giải hệ phương trình đối xứng.

2.3.1. Sự hội tụ của dãy số

Chúng tôi sẽ áp dụng Định lý 3.1 để chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn dãy số $\{x_n\}$ cho trước thỏa mãn một trong các điều kiện: $g(x_n) = f(x_{n-p}, x_{n-p-1}, \dots, x_{n-p-k+1})$ với p, k là các số nguyên dương và $f: E^k \rightarrow E, g: E \rightarrow E$ là các hàm số.

Nếu ta chỉ ra rằng các hàm số f và g thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1, thì dãy $\{g(x_n)\}$ hội tụ. Hơn nữa, nếu g^{-1} tồn tại, liên tục thì $\{x_n\}$ hội tụ tới x là nghiệm của phương trình $g(x) = f(x, x, \dots, x)$.

Ví dụ 4.1. (Đề thi Olympic 30/4 năm 2018 cho khối 11). Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn

$$\text{điều kiện sau: } \begin{cases} x_1 = 30, & x_2 = 4 \\ x_{n+2} = \sqrt[3]{3x_{n+1} + \sqrt{2 + x_n}} \end{cases}$$

với mọi n nguyên dương. Tìm giới hạn của dãy số $\{x_n\}$.

Lời giải.

Trước tiên, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được rằng $x_n \geq 2$ với mọi n . Dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn: $x_{n+2}^3 = 3x_{n+1} + \sqrt{2+x_n}$, hay $g(x_{n+2}) = f(x_n, x_{n+1})$,

trong đó $g: [2, \infty) \rightarrow [2, \infty)$ xác định bởi $g(x) = x^3$ và $f: [2, \infty)^2 \rightarrow [2, \infty)$ xác định bởi $f(x, y) = 3y + \sqrt{2+x}$. Với mọi $x, y, z \in [2, \infty)$, ta có

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(y, z)| &= |3y + \sqrt{2+x} - 3z - \sqrt{2+y}| \\ &\leq 3|y-z| + \frac{|x-y|}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2+y}} \\ &\leq \frac{3}{y^2 + yz + z^2} |y^3 - z^3| + \frac{|x^3 - y^3|}{(x^2 + xy + y^2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2+y})} \\ &\leq \frac{1}{4} |g(y) - g(z)| + \frac{1}{48} |g(x) - g(y)|. \end{aligned}$$

Do đó điều kiện (3.1) trong Định lý 3.1 thỏa mãn. Ta dễ dàng kiểm tra các điều kiện khác của Định lý 3.1 thỏa mãn. Do đó $\{g(x_n)\}$ hội tụ. Từ đó suy ra $\{x_n\}$ hội tụ tới nghiệm phương trình $x^3 = 3x + \sqrt{2+x}$ trên $[2, \infty)$. Giải ra ta được $x = 2$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Xuất phát từ ví dụ trên, ta có thể chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của các dãy số sau:

Ví dụ 4.2. Chứng minh các dãy số sau hội tụ và tìm giới hạn:

(a) Cho $x_1, x_2, x_3 > 2$ và $x_{n+3} = \sqrt[3]{3x_{n+1} + \sqrt{2+x_n}}$

(b) Cho $x_1, x_2, x_3 > 2$ và $x_{n+3} = \sqrt[3]{3x_{n+2} + \sqrt{2+x_n}}$

(c) Cho $x_1 > 2$ và $x_{n+1} = \sqrt[3]{3x_n + \sqrt{2+x_n}}$

2.3.2. Giải hệ phương trình phi tuyến đối xứng

Trong phần này chúng tôi áp dụng Định lý 3.1 vào giải hệ phương trình phi tuyến đối xứng dạng

$$\begin{cases} g(x_1) = f(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \\ g(x_2) = f(x_3, x_4, \dots, x_{k+2}) \\ \dots \\ g(x_{n-1}) = f(x_n, x_1, \dots, x_{k-1}) \\ g(x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{cases}$$

với $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm số, $E \subset \mathbb{R}$ và k, n là các số nguyên dương thỏa mãn $1 \leq k \leq n$.

$$\text{trong } \mathbb{R}^3 \begin{cases} \sqrt{8x} = \sqrt{y+34} - \sqrt{z+2} \\ \sqrt{8y} = \sqrt{z+34} - \sqrt{x+2} \\ \sqrt{8z} = \sqrt{x+34} - \sqrt{y+2} \end{cases}$$

$$\text{Lời giải. Điều kiện để hệ có nghĩa: } \begin{cases} x - y + 32 \geq 0 \\ z - x + 32 \geq 0 \\ y - z + 32 \geq 0 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f : B \rightarrow E$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + 34} - \sqrt{x_2 + 2}, \quad \forall (x_1, x_2) \in B,$$

và $g : E \rightarrow E$ xác định bởi: $g(x) = \sqrt{8x}, \quad \forall x \in E,$

ở đây $E = [0, \infty); B = \{(x_1, x_2) \in E^2 : x_1 - x_2 + 32 \geq 0\}.$

Như trong Ví dụ 3.2, ta có thể kiểm tra điều kiện của Định lý 3.1 thỏa mãn. Do đó tồn tại duy nhất $u \in E$ sao cho tồn tại $x^* \in E$ thỏa mãn $u = f(x^*, x^*) = g(x^*)$. Như trong Ví dụ 3.2, ta có $u = 4$ và $x^* = 2$.

Giả sử (x, y, z) là một nghiệm của hệ. Ta có:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |f(y, z) - f(z, x)| \leq \alpha_1 |g(y) - g(z)| + \alpha_2 |g(z) - g(x)| \\ |g(y) - g(z)| &= |f(z, x) - f(x, y)| \leq \alpha_1 |g(z) - g(x)| + \alpha_2 |g(x) - g(y)| \\ |g(z) - g(x)| &= |f(x, y) - f(y, z)| \leq \alpha_1 |g(x) - g(y)| + \alpha_2 |g(y) - g(z)| \end{aligned}$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức trên với chú ý $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, ta được

$$|g(x) - g(y)| + |g(y) - g(z)| + |g(z) - g(x)| = 0.$$

Hay $g(x) = g(y) = g(z)$. Từ đó suy ra $x = y = z$. Do đó hệ có nghiệm duy nhất $(2, 2, 2)$.

Bạn đọc có thể tham khảo thêm các ví dụ khác trong bài báo [4] trong trường hợp g là hàm số đồng nhất.

3. KẾT LUẬN

Bài báo đã đưa ra và chứng minh một định lý điểm bất động chung kiểu Presic cho các ánh xạ trên tập số thực. Các kết quả về sự tồn tại điểm bất động chung của các ánh xạ dạng này là đã biết. Tuy nhiên, ở đây, chúng tôi xây dựng các dãy số truy hồi có trễ và chứng minh các dãy này hội tụ về giá trị chung (và điểm bất động chung) của các ánh xạ. Các kết quả này được áp dụng vào giải một số bài toán sơ cấp: Chứng minh dãy truy hồi hội tụ, giải hệ phương trình phi tuyến đối xứng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Abbas, G. Jungck(2008), *Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. 341, 416 - 420.
- [2] V. Berinde(2009), *On a family of first order difference inequalities used in the iterative approximation of fixed point*, Creat. Math. Inform. 18,110-122.
- [3] V. Berinde, A.R.Khan, M. Pacurar (2015), *Analytic and empirical study of the rate of convergence of some iterative methods*, J. Numer. Anal. Approx. Theory, 44, 25 - 37.
- [4] V. Berinde, M. Pacurar (2011), *Two elementary applications of some Presic type fixed point theorems*, Creat. Math. Inform. 20, 32 - 42.
- [5] L.B. Ciric, S.B. Presic(2007), *On Presic type generalization of the Banach contraction mapping principle*, Acta Math. Univ. Comenianae. 76, 143 -147.
- [6] Y.Z. Chen(2009), *A Presic type contractive condition and its applications*, Nonlinear Anal. 71, e2012 – e 2017.
- [7] S.B. Presic(1965), *Sur une classe d' inéquations aux differences finites et sur la convergence de certaines suites*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S) 5, 75- 78.
- [8] M. Pacurar (2009), *Approximating common fixed point of Presic - Kannan type operators by a multi-stepIterative method*, Univ. "Ovidius" Constant a Ser. Mat. 17, 153- 168.
- [9] S. Shukla, S. Radenovic (2015), *Some generalizations of Presic type mappings and applications*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics, DOI: 10.1515/aicu-2015-0026.

A COMMON FIXED POINT THEOREM OF PRESIC TYPE AND APPLICATIONS

Nguyen Van Luong, Tran Thi Huong, Hoang Le Minh

ABSTRACT

In this paper, we present some applications of a common fixed point theorem of Presic type to study the convergence of recurrent sequences and to solve cyclic nonlinear systems of equations.

Keywords: *Common fixed point, Presic type fixed point theorem, recurrent sequences, cyclic systems of equations.*

Ngày nộp bài: 23/10/2018; Ngày gửi phản biện: 19/11/2018; Ngày duyệt đăng: 6/8/2019.