

LUẬT SỐ LỚN CHO CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN MỜ

Phạm Chí Công¹

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập một số kết quả về luật số lớn cho các biến ngẫu nhiên mờ dưới các điều kiện khác nhau.

Từ khoá: *Biến ngẫu nhiên mờ, luật mạnh số lớn, luật yếu số lớn.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Năm 1981, Etemadi chứng minh luật mạnh số lớn cho các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một cùng phân phối mở rộng kết quả cổ điển của Kolmogorov. Năm 1983, Csörgö cùng các cộng sự đã nghiên cứu mở rộng kết quả của Etemadi bằng cách xem xét các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một không cùng phân phối. Cụ thể các tác giả đã thiết lập luật mạnh số lớn:

Nếu $X_1, X_2, \dots$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một thỏa mãn các điều kiện:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < +\infty$$

$$(b) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i - EX_1| = O(1)$$

$$\text{thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) = 0 \quad (\text{hầu chắc chắn}).$$

Năm 1986, Puri và Ralescu đưa ra khái niệm về biến ngẫu nhiên mờ (còn gọi là tập ngẫu nhiên mờ) như là sự mở rộng tự nhiên của các biến ngẫu nhiên đa trị. Nhiều định lý giới hạn trong xác suất cổ điển đã được mở rộng sang cho các biến ngẫu nhiên mờ, chẳng hạn ta có thể xem trong [4][5][6][7]. Trong bài báo này, đầu tiên chúng tôi nghiên cứu thiết lập luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên mờ độc lập đôi một, mở rộng kết quả của Csörgö cùng các cộng sự [1]. Tiếp theo, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ cho luật yếu số lớn các biến ngẫu nhiên mờ và hệ quả.

2. PHẦN CHUẨN BỊ

Ký hiệu $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ, I_A là hàm chỉ tiêu của tập A , C là một hằng số nào đó mà nó không nhất thiết phải giống nhau trong mỗi lần xuất hiện. Trong mục này, chúng ta trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản về số mờ và biến ngẫu nhiên mờ. Ký hiệu $\mathbb{R}$ là tập số thực. Một số mờ là ánh xạ $\tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ thỏa mãn 4 điều kiện sau:

¹ Khoa Giáo dục Tiểu học, Trường Đại học Hồng Đức; Email: phamchicong@hdu.edu.vn

- (i) $\tilde{u}$ là chuẩn tắc, nghĩa là tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $\tilde{u}(x) = 1$,
- (ii) $\tilde{u}$ là nửa liên tục trên,
- (iii) $\text{supp } \tilde{u} = \text{cl}\{x \in \mathbb{R}: \tilde{u}(x) > 0\}$ là tập compact
- (iv) $\tilde{u}$ là lồi, theo nghĩa $\tilde{u}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in [0; 1]$.

Ở đây, trong điều kiện (iii) ký hiệu $\text{cl}\{A\}$ là chỉ bao đóng của tập A . Ký hiệu $F(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả các số mờ. Với $\tilde{u} \in F(\mathbb{R})$, tập α – mức của $\tilde{u}$ được định nghĩa.

$$L_{\alpha} \tilde{u} = \begin{cases} \{x : \tilde{u}(x) \geq \alpha\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{supp } \tilde{u} & , \alpha = 0. \end{cases}$$

Ta biết rằng, với $\tilde{u}$ là một số mờ thì điều kiện (ii) tương đương với tập α – mức $L_{\alpha} \tilde{u}$ là một khoảng đóng với mỗi $\alpha \in [0; 1]$. Ngoài ra, số mờ $\tilde{u}$ hoàn toàn được xác định bởi các tập α – mức $L_{\alpha} \tilde{u} = [u_{\alpha}^1; u_{\alpha}^2]$.

Bổ đề. ([3]) Cho $\tilde{u} \in F(\mathbb{R})$. Ký hiệu $u^1(\alpha) = u_{\alpha}^1$, $u^2(\alpha) = u_{\alpha}^2$ và xem u^1, u^2 như là các hàm của $\alpha \in [0; 1]$. Khi đó các khẳng định sau đúng:

- (1) u^1 là hàm tăng bị chặn trên $[0; 1]$.
- (2) u^2 là hàm giảm bị chặn trên $[0; 1]$.
- (3) $u^1(1) \leq u^2(1)$
- (4) u^1 và u^2 liên tục trái trên $[0; 1]$ và liên tục phải tại 0.
- (5) Nếu v^1 và v^2 thỏa mãn các khẳng định (1) – (4), thì tồn tại duy nhất $\tilde{v} \in F(\mathbb{R})$ sao cho $v_{\alpha}^1 = v^1(\alpha)$, $v_{\alpha}^2 = v^2(\alpha)$, với mọi $\alpha \in [0; 1]$.

Bổ đề trên cho phép ta có thể đồng nhất một số mờ $\tilde{u}$ với biểu diễn tham số hoá $\{(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$, ở đây u^1 và u^2 thỏa mãn các khẳng định (1) – (4).

Giả sử $\tilde{u}, \tilde{v} \in F(\mathbb{R})$ với $\tilde{u} = \{(u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ và $\tilde{v} = \{(v_{\alpha}^1, v_{\alpha}^2) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Định nghĩa các phép toán.

$$(\tilde{u} + \tilde{v})(z) = \sup_{x+y=z} \min(\tilde{u}(x), \tilde{v}(y))$$

$$(\lambda \tilde{u})(z) = \begin{cases} \tilde{u}(z / \lambda), & \lambda \neq 0 \\ \tilde{0} & , \lambda = 0. \end{cases}$$

với $\tilde{0} = I_{\{0\}}$. Khi đó

$$\tilde{u} + \tilde{v} = \{(u_\alpha^1 + v_\alpha^1, u_\alpha^2 + v_\alpha^2) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

$$\lambda \tilde{u} = \{(\lambda u_\alpha^1, \lambda u_\alpha^2) : 0 \leq \alpha \leq 1\}. \text{ Với } \lambda > 0$$

Metric d_∞ trên $F(\mathbb{R})$ được định nghĩa bởi

$$d_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(L_\alpha \tilde{u}, L_\alpha \tilde{v})$$

Ở đây d_H là metric Hausdoff trên các tập con đóng của $\mathbb{R}$.

$$d_H([a; b], [c; d]) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$$

Chuẩn của $\tilde{u} \in F(\mathbb{R})$, ký hiệu là $\|\tilde{u}\|$, và được định nghĩa bởi:

$$\|\tilde{u}\| = d_\infty(\tilde{u}, \tilde{0}) = \max\{|u_0^1|, |u_0^2|\}$$

Hàm $\tilde{X} : \Omega \rightarrow F(\mathbb{R})$, $\tilde{X}(\omega) = \{(X_\alpha^1(\omega), X_\alpha^2(\omega)) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ được gọi là một biến ngẫu nhiên mờ nếu X_α^1 và X_α^2 là các biến ngẫu nhiên với mỗi $\alpha \in [0; 1]$. Biến ngẫu nhiên mờ $\tilde{X} = \{(X_\alpha^1, X_\alpha^2) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ được gọi là khả tích nếu X_α^1 và X_α^2 là khả tích với mỗi $\alpha \in [0; 1]$, điều này tương đương với $E\|\tilde{X}\| < \infty$. Trong trường hợp này, kỳ vọng của biến ngẫu nhiên mờ khả tích $\tilde{X}$ được xác định bởi: $E\tilde{X} = \{(EX_\alpha^1, EX_\alpha^2) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

Dãy $\{\tilde{X}_n\}$ các biến ngẫu nhiên mờ được gọi là độc lập đôi một nếu các dãy $\{X_{n,\alpha}^1\}$ và $\{X_{n,\alpha}^2\}$ là độc lập đôi một với mỗi $\alpha \in [0; 1]$.

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ THẢO LUẬN

Kết quả đầu tiên dưới đây thiết lập điều kiện đủ cho luật mạnh số lớn các biến ngẫu nhiên mờ độc lập đôi một.

Định lý 3.1. Giả sử $\{\tilde{X}_n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ độc lập đôi một. Nếu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Ed_\infty^2(\tilde{X}_n, E\tilde{X}_n)}{n^2} < +\infty \text{ và } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ed_\infty(\tilde{X}_i, E\tilde{X}_i) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty, \quad (3.1)$$

Thì ta thu được luật mạnh số lớn:

$$d_\infty\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\tilde{X}_i\right) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ (hầu chắc chắn)}. \quad (3.2)$$

Chứng minh.

$$\text{Ta có: } d_\infty\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\tilde{X}_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_\infty(\tilde{X}_i, E\tilde{X}_i). \quad (3.3)$$

$$\text{Đặt } S_n = \sum_{i=1}^n d_{\infty}(\tilde{X}_i, E\tilde{X}_i).$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{1}{n} S_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ (hầu chắc chắn)}. \quad (3.4)$$

Khi đó kết hợp (3.3) và (3.4) ta sẽ nhận được (3.2). Thật vậy, cho số $a > 1$ bất kỳ, đặt $n_k = [a^k]$ (phần nguyên của a^k). Với $\varepsilon > 0$ cho trước tùy ý, theo bất đẳng thức chebyshev, giả thiết về tính độc lập đôi một và (3.1) ta có đánh giá:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} P \left\{ \frac{S_{n_k} - ES_{n_k}}{n_k} > \varepsilon \right\} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{Var} S_{n_k}}{n_k^2} \\ &\leq C \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{Ed_{\infty}^2(\tilde{X}_i, E\tilde{X}_i)}{i^2} < \infty. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Theo bổ đề borel-cantenlli, từ (3.5) ta suy ra:

$$\frac{S_{n_k} - ES_{n_k}}{n_k} \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow +\infty \text{ (hầu chắc chắn)}. \quad (3.6)$$

Ta thấy với mỗi số nguyên dương n , luôn tồn tại số tự nhiên k sao cho $n_k \leq n < n_{k+1}$ và khi $n \rightarrow +\infty$ thì $k \rightarrow +\infty$. ta có

$$\frac{S_n}{n} \leq \frac{S_{n_{k+1}}}{n} \leq \frac{|S_{n_{k+1}} - ES_{n_{k+1}}|}{n} + \frac{ES_{n_{k+1}}}{n} \leq \frac{|S_{n_{k+1}} - ES_{n_{k+1}}|}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k} + \frac{ES_{n_{k+1}}}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k} \quad (3.7)$$

Từ (3.7) cho $n \rightarrow +\infty$, kết hợp với (3.1) và (3.6) ta được

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \text{ (hầu chắc chắn)}. \quad (3.8)$$

Từ (3.8) ta nhận được (3.4). Định lý được chứng minh.

Kết quả tiếp theo thiết lập điều kiện cần và đủ cho luật yếu số lớn đối với các biến ngẫu nhiên mờ. Để làm điều đó ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 3.2. ([7]) với mỗi $\tilde{u} \in F(\mathbb{R})$ và với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại phân hoạch

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p = 1 \text{ của } [0,1] \text{ sao cho } \max u_{\alpha_k}^1 - u_{\alpha_{k-1}}^1, u_{\alpha_{k-1}}^2 - u_{\alpha_k}^2 < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

với $u_{\alpha_k}^i$ là giới hạn phải của u^i tại α_k ($i = 1, 2$).

Định lý 3.3. Giả sử $\{\tilde{X}_n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ và $\tilde{u} \in F(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\tilde{X}_i, \tilde{u} \right) = 0. \quad (3.9)$$

Khi đó ta có:

$$d_{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i \right) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ (theo xác suất)} \quad (3.10)$$

Khi và chỉ khi với mỗi $\alpha \in [0, 1]$

$$d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha} \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EL_{\alpha} \tilde{X}_i \right) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ (theo xác suất)} \quad (3.11)$$

Và

$$d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha} \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EL_{\alpha} \tilde{X}_i \right) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ (theo xác suất)}. \quad (3.12)$$

Chứng minh.

Điều kiện cần là hiển nhiên. Để chứng minh điều kiện đủ, ta chỉ cần chứng minh

$$d_{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i, \tilde{u} \right) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ (theo xác suất)}. \quad (3.13)$$

Cho $\varepsilon > 0$ bất kỳ, theo bổ đề 3.2, tồn tại phân hoạch $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p = 1$ của

$$[0, 1] \text{ sao cho: } \max_{\alpha_k} u_{\alpha_k}^1 - u_{\alpha_{k-1}^+}^1, u_{\alpha_{k-1}^+}^2 - u_{\alpha_k}^2 < \frac{\varepsilon}{6}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (3.14)$$

Từ (3.9), ta thấy với mọi $\alpha \in [0, 1]$, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có:

$$\max \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_{i\alpha}^1 - u_{\alpha}^1 \right|, \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_{i\alpha}^2 - u_{\alpha}^2 \right| \right) < \frac{\varepsilon}{6}. \quad (3.15)$$

Chú ý rằng với $0 < \alpha \leq 1$ và $\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k$ thì $L_{\alpha_k} u \subset L_{\alpha} u \subset L_{\alpha_{k-1}^+} u$ ($k = 1, 2, \dots, p$).

Do đó sử dụng (3.14) và (3.15) ta có các đánh giá:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\alpha}^1 - u_{\alpha}^1 &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\alpha_k}^1 - u_{\alpha_{k-1}^+}^1 \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\alpha_k}^1 - u_{\alpha_k}^1 + \frac{\varepsilon}{6} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i\alpha_k}^1 - EX_{i\alpha_k}^1) + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\alpha}^1 - u_{\alpha}^1 &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\alpha_{k-1}^+}^1 - u_{\alpha_k}^1 \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\alpha_{k-1}^+}^1 - u_{\alpha_{k-1}^+}^1 - \frac{\varepsilon}{6} \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i\alpha_{k-1}^+}^1 - EX_{i\alpha_{k-1}^+}^1) - \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Vậy với $n \geq N$,

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\alpha}^1 - u_{\alpha}^1 \right| \leq \max_{1 \leq k \leq p} \max_{\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i\alpha_k}^1 - EX_{i\alpha_k}^1) \right|, \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i\alpha_{k-1}}^1 - EX_{i\alpha_{k-1}}^1) \right| \right\} + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.16)$$

Lập luận tương tự ta cũng có:

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\alpha}^2 - u_{\alpha}^2 \right| \leq \max_{1 \leq k \leq p} \max_{\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i\alpha_k}^2 - EX_{i\alpha_k}^2) \right|, \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i\alpha_{k-1}}^2 - EX_{i\alpha_{k-1}}^2) \right| \right\} + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.17)$$

Từ (3.16) và (3.17), với $n \geq N$, ta suy ra:

$$\begin{aligned} d_{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i, \tilde{u} \right) &= \max_{1 \leq k \leq p} \max_{\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha} \tilde{X}_i, L_{\alpha} \tilde{u} \right) \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq p} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha_k} \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EL_{\alpha_k} \tilde{X}_i \right) + \max_{1 \leq k \leq p} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha_{k-1}} \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EL_{\alpha_{k-1}} \tilde{X}_i \right) + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Sử dụng đánh giá trên và giả thiết ta nhận được:

$$\begin{aligned} &P \left\{ d_{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i, \tilde{u} \right) > \varepsilon \right\} \\ &\leq P \left\{ \max_{1 \leq k \leq p} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha_k} \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EL_{\alpha_k} \tilde{X}_i \right) > \frac{\varepsilon}{3} \right\} + P \left\{ \max_{1 \leq k \leq p} d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha_{k-1}} \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EL_{\alpha_{k-1}} \tilde{X}_i \right) > \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^p P \left\{ d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha_k} \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EL_{\alpha_k} \tilde{X}_i \right) > \frac{\varepsilon}{3} \right\} + \sum_{k=1}^p P \left\{ d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha_{k-1}} \tilde{X}_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EL_{\alpha_{k-1}} \tilde{X}_i \right) > \frac{\varepsilon}{3} \right\} \end{aligned}$$

$\rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định lý được chứng minh.

Từ định lý 3.3 ta thu được hệ quả trực tiếp dưới đây.

Hệ quả 3.4. Giả sử $\{\tilde{X}_n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ cùng phân phối.

$$\text{Khi đó: } d_{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i, E\tilde{X}_1 \right) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ (theo xác suất)} \quad (3.18)$$

Khi và chỉ khi với mỗi $\alpha \in [0, 1]$

$$d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha} \tilde{X}_i, L_{\alpha} E\tilde{X}_1 \right) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ (theo xác suất)} \quad (3.19)$$

Và

$$d_H \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{\alpha^+} \tilde{X}_i, L_{\alpha^+} E\tilde{X}_1 \right) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ (theo xác suất)} \quad (3.20)$$

4. KẾT LUẬN

Kết quả chính của bài báo là Định lý 3.1 và Định lý 3.3. Trong đó Định lý 3.1 mở rộng kết quả của Định lý 1 từ trường hợp dãy các biến ngẫu nhiên thực sang trường hợp các biến ngẫu nhiên mờ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. Csörgö, K. Tandori and V. Totik. (1983), On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables, *Acta Math. Hung.*, 42 (3-4), 319-330.
- [2] N. Etemadi (1981), An elementary proof of the strong law of large numbers, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, 55, 119-122.
- [3] R. Goetschel, W. Voxman. (1986), Elementary Fuzzy Calculus, *Fuzzy sets and systems*, 18, 31-43.
- [4] D. H. Hong. (2003), a convergence of fuzzy random variables, *Kybernetika*, 39, 275-280.
- [5] D. H. Hong, H. J. Kim (1994), Marcinkiewicz-type law of large numbers for fuzzy random variables, *Fuzzy Sets And Systems*, 64, 387-393.
- [6] S. Y. Joo, Y. K. Kim (2001), Kolmogorov's strong law of large numbers for fuzzy random variables, *Fuzzy Sets And Systems*, 120, 499-503.
- [7] Y. K. Kim (2000), A strong law of large numbers for fuzzy random variables, *Fuzzy Sets And Systems*, 111, 319-323.
- [8] M. L. Puri, D. A. Ralescu (1986), Fuzzy random variables, *J. Math. Anal. Appl*, 114, 409-422.

LAW OF LARGE NUMBERS FOR FUZZY RANDOM VARIABLES

Pham Chi Cong

ABSTRACT

In this paper, we establish some results on the law of large numbers for fuzzy random variables under various conditions.

Keywords: *Fuzzy random variable, strong law of large numbers, weak law of large numbers.*

** Ngày nộp bài: 7/10/2022; Ngày gửi phản biện: 7/10/2022; Ngày duyệt đăng: 27/10/2022*