MÔĐUN CHÉO TÁC ĐỘNG

Phạm Thị Cúc[1]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, trước hết, chúng tôi chứng minh chi tiết các kết quả liên quan đến vị nhóm các dẫn xuất của một môđun chéo. Sau đó, chứng minh các kết quả về nhóm Whitehead các dẫn xuất chính qui và các đặc trưng của dẫn xuất chính qui. Từ đó, xây dựng môđun chéo tác động của một môđun chéo cho trước.

Từ khóa: *Môđun chéo, nhóm Whitehead, dẫn xuất chính qui, môđun chéo tác động.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Môđun chéo được J. H. C. Whitehead đưa ra cách đây hơn 70 năm trong công trình nghiên cứu của ông về lý thuyết đồng luân kết hợp [1]. Kể từ đó, khái niệm môđun chéo đóng một vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực của toán học, bao gồm lý thuyết đồng luân, đồng điều và đối đồng điều nhóm, K - lý thuyết đại số, đồng điều cyclic, hình học vi phân,... Bởi những ứng dụng phong phú của nó, khái niệm môđun chéo đã được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau [2][3][4][5][6]. Những cấu trúc cụ thể như môđun chéo cảm sinh [7], môđun chéo tác động [8],... cũng đóng vai trò quan trọng trong các ứng dụng của Định lý Van-Kampen chiều 2 và tính toán các 2 - dạng đồng luân. Một trong những hướng phát triển của khái niệm môđun chéo là người ta tìm kiếm các cấu trúc tương tự như trong lý thuyết nhóm: nhóm các tự đẳng cấu, tác động nhóm, tích trực tiếp,...

Nếu (B, D, d, θ) là một môđun chéo thì tập $\mathrm{Der}(D, B)$ các dẫn xuất từ D đến B có cấu trúc vị nhóm. Nhóm $\mathbf{D}(D, B)$ các phần tử khả nghịch của $\mathrm{Der}(D, B)$ được gọi là nhóm Whitehead các dẫn xuất chính qui. Đặc trưng của các dẫn xuất chính qui đã được ứng dụng vào nhiều tình huống khác nhau liên quan tới môđun chéo. Chẳng hạn, nhóm các dẫn xuất chính qui xuất hiện trong cấu trúc tự đẳng cấu của môđun chéo được nghiên cứu bởi K. Norrie [8]. Cũng trong bài báo [8], K. Norrie đã sử dụng khái niệm môđun chéo tác động để xây dựng tích nửa trực tiếp của các môđun chéo và toàn hình (holomorph) của các môđun chéo. Tuy nhiên, đặc trưng của các dẫn xuất chính qui không được chứng minh, cũng như định nghĩa môđun chéo tác động không được xây dựng tường minh, mà được các tác giả công nhận sự tồn tại của nó.

Trong bài báo này, sau mục giới thiệu, mục 2 dành để nhắc lại một số khái niệm liên quan đến môđun chéo như: môđun chéo con, môđun chéo con chuẩn tắc, đồng cấu môđun chéo, ảnh và hạt nhân của đồng cấu môđun chéo. Trong mục 3, chúng tôi chỉ ra cấu trúc vị nhóm trên tập $\mathrm{Der}(D, B)$ các dẫn xuất từ D đến B, chứng minh chi tiết tính chất đặc trưng của các dẫn xuất chính qui. Trên cơ sở đó, chúng tôi xây dựng môđun chéo tác động trong mục 4.

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: phamthicuc@hdu.edu.vn*

2. MÔĐUN CHÉO

Định nghĩa 2.1. [10] Một *môđun chéo* là một bộ bốn (B, D, d, θ) trong đó $d: B \to D$, $\theta: D \to \mathrm{Aut}B$ là các đồng cấu nhóm thỏa mãn điều kiện

$$\theta d = \mu \tag{1}$$

và thỏa mãn hệ thức Peiffer:

$$d(\theta_x(b)) = \mu_x(d(b)), x \in D, b \in B, \tag{2}$$

trong đó μ_x là tự đẳng cấu trong sinh bởi x.

Để cho tiện, ta ký hiệu phép toán trong B là phép cộng và phép toán trong D là phép nhân.

Một số ví dụ điển hình về môđun chéo có thể kể đến là:

i) (B, D, i, θ^0), trong đó $i: B \to D$ là đồng cấu bao hàm của một nhóm con chuẩn tắc, θ^0 được cho bởi liên hợp.

ii) $(B, D, \mathbf{0}, \theta)$, trong đó $\mathbf{0}: B \to D$ là đồng cấu không, B là D- môđun và θ là tác động môđun.

iii) $(B, \mathrm{Aut}B, \mu, id)$, với $\mu: A \to \mathrm{Aut}\, B$ là ánh xạ tự đẳng cấu trong của nhóm B. Môđun chéo này được gọi là *môđun chéo các tự đẳng cấu của nhóm* B.

iv) (B, D, p, θ^0), trong đó $p: B \to D$ là toàn cấu nhóm với hạt nhân chứa trong tâm của B, θ^0 được cho bởi liên hợp.

Định nghĩa 2.2. [6] a) Ta nói rằng (B', D', d', θ') là một *môđun chéo con* của môđun chéo (B, D, d, θ) nếu:

i) B' là một nhóm con của B và D' là một nhóm con của D;

ii) d' là hạn chế của d trên B';

iii) đồng cấu θ' được cảm sinh bởi đồng cấu θ, nghĩa là: $\theta'_x(b) = \theta_x(b)$ với mọi $x \in D', b \in B'$.

b) Một môđun chéo con (B', D', d', θ') của (B, D, d, θ) được gọi là *chuẩn tắc* nếu:

i) D' là nhóm con chuẩn tắc của D;

ii) $\theta_x(b) \in B'$ với mọi $x \in D, b \in B'$;

iii) $\theta_x(b) - b \in B'$ với mọi $x \in D', b \in B$.

Định nghĩa 2.3. [4] Cho $(B, D, d, \theta), (B', D', d', \theta')$ là các môđun chéo. Một *mũi tên* (hay *đồng cấu*) $(f_1, f_0): (B, D, d, \theta) \to (B', D', d', \theta')$ giữa 2 môđun chéo bao gồm các đồng cấu nhóm $f_1: B \to B'$, $f_0: D \to D'$ sao cho

$$d' f_1 = f_0 d \tag{3}$$

và f_1 là một *đồng cấu toán tử*, nghĩa là: $f_1(\theta_x b) = \theta'_{f_0(x)} f_1(b)$, (4)

với mọi $x \in D, b \in B$.

Ta nói rằng (f_1, f_0) là *đẳng cấu* nếu cả f_0, f_1 là những đẳng cấu. Tương tự, (f_1, f_0) là *đơn cấu* (*toàn cấu*) nếu f_0, f_1 là những đơn cấu (toàn cấu). Một đẳng cấu (f_1, f_0) từ môđun chéo (B, D, d, θ) vào chính nó được gọi là một *tự đẳng cấu*. Ký hiệu $\mathrm{Aut}(B, D, d, \theta)$ là nhóm các tự đẳng cấu của (B, D, d, θ) với phép hợp thành được cho bởi:

$$(f_1, f_0)(f_{1'}, f_{0'}) = (f_{1'} f_1, f_{0'} f_0).$$

Định nghĩa 2.4. [6] Cho đồng cấu môđun chéo $(f_1, f_0) : (B, D, d, \theta) \to (B', D', d', \theta')$. Người ta gọi:

a) bộ bốn $\mathrm{Ker}(f_1, f_0) = (\mathrm{Ker} f_1, \mathrm{Ker} f_0, d, \theta)$ là *hạt nhân* của đồng cấu (f_1, f_0);

b) bộ bốn $\mathrm{Im}(f_1, f_0) = (\mathrm{Im} f_1, \mathrm{Im} f_0, d', \theta')$ là *ảnh* của đồng cấu (f_1, f_0).

Từ định nghĩa trên, chúng tôi chứng minh được bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.5. *a)* $\mathrm{Ker}(f_1, f_0)$ *là môđun chéo con chuẩn tắc của môđun chéo* (B, D, d, θ).

b) $\mathrm{Im}(f_1, f_0)$ *là môđun chéo con của môđun chéo* (B', D', d', θ').

Chứng minh. a) Hiển nhiên $\mathrm{Ker} f_0$ là nhóm con chuẩn tắc của D nên điều kiện i) trong định nghĩa môđun chéo con chuẩn tắc đúng.

Mặt khác, với mọi $x \in D, b \in \mathrm{Ker} f_1$, ta có: $f_1(\theta_x b) \overset{(3)}{=} \theta'_{f_0(x)} f_1(b) = \theta'_{f_0(x)}(0) = 0.$

Vậy $\theta_x b \in \mathrm{Ker} f_1$, nghĩa là điều kiện ii) trong định nghĩa môđun chéo con chuẩn tắc đúng.

Cuối cùng, với mọi $x \in \mathrm{Ker} f_0, b \in B$, ta có:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_x b - b) &= f_1(\theta_x b) - f_1(b) \overset{(4)}{=} \theta'_{f_0(x)} f_1(b) - f_1(b) \\ &= \theta'_1 f_1(b) - f_1(b) = id(f_1 b) - f_1 b = f_1 b - f_1 b = 0. \end{aligned}$$

Do đó $\theta_x b - b \in \mathrm{Ker} f_1$.

b) Điều này là hiển nhiên vì $\mathrm{Im} f_1, \mathrm{Im} f_0$ lần lượt là các nhóm con của B' và D'.

3. DẪN XUẤT CHÍNH QUI - NHÓM WHITEHEAD

Định nghĩa 3.1. Cho môđun chéo (B, D, d, θ). Ta gọi $\mathrm{Der}(D, B)$ là tập tất cả các dẫn xuất từ D tới B, nghĩa là tập tất cả các ánh xạ $\chi : D \to B$ thỏa mãn điều kiện

$$\chi(xy) = \chi(x) + \theta_x \chi(y), \quad \forall x, y \in D. \tag{5}$$

Nhận xét 3.2. Từ định nghĩa suy ra:

a) χ là ánh xạ biến đơn vị của D thành đơn vị của B. Thật vậy,

$$\chi(1.y) = \chi(1) + \theta_1 \chi(y) = \chi(1) + \chi(y) \Rightarrow \chi(1) = 0.$$

b) $\theta_x \chi(x^{-1}) = -\chi(x)$. Thật vậy, điều này được suy từ: $\chi(1) = \chi(x) + \theta_x \chi(x^{-1}) = 0$.

Bổ đề 3.3. *Mỗi dẫn xuất* χ *cảm sinh các tự đồng cấu* γ_χ *(viết gọn là* γ *) của D và* δ_χ *(viết gọn là* δ *) của B lần lượt được xác định bởi:*

$$\gamma(x) = d(\chi(x)).x, \tag{6}$$

$$\delta(b) = \chi(d(b)) + b. \tag{7}$$

Hơn nữa, các đồng cấu γ, δ thỏa mãn các điều kiện:

$$\gamma d(b) = d\delta(b),\ \forall b \in B \tag{8}$$

$$\delta\chi(x) = \chi\gamma(x),\ \forall x \in D. \tag{9}$$

$$\delta(\theta_x b) = \theta_\gamma(x)\delta(b),\ \forall x \in D, b \in B. \tag{10}$$

Chứng minh. Thật vậy, với mọi $x, y \in D$ ta có:

$$\gamma(xy) \overset{(6)}{=} d(\chi(xy)).xy \overset{(5)}{=} d(\chi(x) + \theta_x\chi(y)).xy$$

$$= d\chi(x).d\theta_x\chi(y).xy \overset{(2)}{=} d\chi(x).\mu_x d\chi(y).xy$$

$$= d\chi(x).xd\chi(y).x^{-1}.xy = d\chi(x).x.d\chi(y).y \overset{(6)}{=} \gamma(x)\gamma(y).$$

Và với mọi $b, c \in B$:

$$\delta(b+c) \overset{(7)}{=} \chi(d(b+c)) + b + c = \chi(db.dc) + b + c \overset{(5)}{=} \chi(db) + \theta_{db}\chi(dc) + b + c$$

$$\overset{(1)}{=} \chi(db) + \mu_b\chi(dc) + b + c = \chi(db) + b + \chi(dc) - b + b + c$$

$$= \chi(db) + b + \chi(dc) + c \overset{(7)}{=} \delta(b) + \delta(c).$$

Vậy γ và δ lần lượt là các tự đồng cấu của D và B.

Hơn nữa, $\forall x \in D, b \in B,$ ta có:

i) $\gamma(db) \overset{(6)}{=} d(\chi(db)).db = d[\chi(db) + b] \overset{(7)}{=} d\delta(b).$

ii) $\chi\gamma(x) \overset{(6)}{=} \chi[d\chi(x).x] \overset{(5)}{=} \chi d\chi(x) + \theta_{d\chi(x)}\chi(x)$

$$\overset{(1)}{=} \chi d\chi(x) + \mu_{\chi(x)}\chi(x) = \chi(d\chi(x)) + \chi(x) \overset{(7)}{=} \delta\chi(x).$$

iii) $\delta(\theta_x b) \overset{(7)}{=} \chi d(\theta_x b) + \theta_x b \overset{(2)}{=} \chi(\mu_x db) + \theta_x b = \chi(x.db.x^{-1}) + \theta_x b$

$$\overset{(5)}{=} \chi(x) + \theta_x\chi(db.x^{-1}) + \theta_x b \overset{(5)}{=} \chi(x) + \theta_x[\chi db + \theta_{db}\chi(x^{-1})] + \theta_x b$$

$$= \chi(x) + \theta_x\chi db + \theta_x\theta_{db}\chi(x^{-1}) + \theta_x b \overset{(1)}{=} \chi(x) + \theta_x\chi db + \theta_x\mu_b\chi(x^{-1}) + \theta_x b$$

$$= \chi(x) + \theta_x\chi db + \theta_x[b + \chi(x^{-1}) - b] + \theta_x b$$

$$= \chi(x) + \theta_x\chi db + \theta_x b + \theta_x\chi(x^{-1}) = \chi(x) + \theta_x\delta b - \chi(x)$$

$$= \mu_{\chi(x)}\theta_x\delta(b) \overset{(1)}{=} \theta_{d\chi(x)}\theta_x\delta(b) = \theta_{d\chi(x).x}\delta(b) \overset{(6)}{=} \theta_{\gamma(x)}\delta(b).$$

Ta trang bị cho $\mathrm{Der}(D, B)$ một phép nhân như sau: Nếu $\chi = \chi_1 \circ \chi_2$ thì:

$\chi(x) = [\chi_1 \circ \chi_2](x) = \chi_1\gamma_2(x) + \chi_2(x).$

Nhận xét 3.4. Ta cũng có: $\chi(x) = [\chi_1 \circ \chi_2](x) = \delta_1\chi_2(x) + \chi_1(x).$

Thật vậy,

$$\chi_1\gamma_2(x)+\chi_2(x)=\chi_1[d\chi_2(x).x]+\chi_2(x)=\chi_1 d\chi_2(x)+\theta_{d\chi_2(x)}\chi_1(x)+\chi_2(x)$$
$$=\delta_1\chi_2(x)-\chi_2(x)+\mu_{\chi_2(x)}\chi_1(x)+\chi_2(x)=\delta_1\chi_2(x)+\chi_1(x).$$

Nhận xét 3.5. Tập $\mathrm{Der}(D,B)$ cùng với phép nhân

$$\chi(x)=[\chi_1\circ\chi_2](x)=\chi_1\gamma_2(x)+\chi_2(x)=\delta_1\chi_2(x)+\chi_1(x)$$

là một vị nhóm. (11)

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 3.6. Phép nhân (11) thỏa mãn các tính chất sau:

a) Nếu $\chi=\chi_1\circ\chi_2$ *thì* $\gamma(x)=\gamma_1(\gamma_2(x))$, *trong đó* γ_1,γ_2 *là các đồng cấu lần lượt cảm sinh từ* χ_1,χ_2 *theo bổ đề 3.3.*

b) Nếu $\chi=\chi_1\circ\chi_2$ *thì* $\delta(b)=\delta_1(\delta_2(b))$, *trong đó* γ_1,γ_2 *là các đồng cấu lần lượt cảm sinh từ* χ_1,χ_2 *theo bổ đề 3.3.*

Chứng minh.

a) Thật vậy, $$\gamma(x)\overset{(6)}{=}d[\chi_1\circ\chi_2(x)].x\overset{(11)}{=}d[\chi_1\gamma_2(x)+\chi_2(x)].x$$
$$=d\chi_1\gamma_2(x).d\chi_2(x).x\overset{(6)}{=}d\chi_1\gamma_2(x).\gamma_2(x)\overset{(6)}{=}\gamma_1(\gamma_2(x)).$$

b) Tương tự, $$\delta(b)\overset{(7)}{=}\chi_1\circ\chi_2(db)+b\overset{(11)}{=}\delta_1\chi_2(db)+\chi_1(db)+b$$
$$\overset{(7)}{=}\delta_1\chi_2(db)+\delta_1 b=\delta_1[\chi_2(db)+b]\overset{(7)}{=}\delta_1\delta_2(b).$$

Bây giờ, ta quay lại chứng minh Mệnh đề 3.5.

Chứng minh.

Phép nhân thỏa mãn tính kết hợp. Thật vậy, với mọi $\chi_1,\chi_2,\chi_3\in\mathrm{Der}(D,B)$ và với mọi $x\in D$, ta có:

$$[(\chi_1\circ\chi_2)\circ\chi_3](x)\overset{(11)}{=}(\chi_1\circ\chi_2)\gamma_3(x)+\chi_3(x)\overset{(11)}{=}\chi_1\gamma_2[\gamma_3(x)]+\chi_2(\gamma_3(x))+\chi_3(x)$$
$$\overset{(i,11)}{=}\chi_1\gamma_{\chi_2\circ\chi_3}(x)+(\chi_2\circ\chi_3)(x)\overset{(11)}{=}[\chi_1\circ(\chi_2\circ\chi_3)](x).$$

Phần tử đơn vị của phép nhân chính là dẫn xuất biến mọi phần tử của D thành phần tử không của B. Do đó, $\mathrm{Der}(D,B)$ là một vị nhóm.

Định nghĩa 3.7. [6] Nhóm các phần tử khả nghịch của $\mathrm{Der}(D,B)$ được gọi là *nhóm Whitehead*, ký hiệu $\mathbf{D}(D,B)$. Các phần tử của nhóm $\mathbf{D}(D,B)$ được gọi là các *dẫn xuất chính qui*.

Định lý dưới đây cho chúng ta thấy đặc trưng của các dẫn xuất chính qui.

Định lý 3.8. Các khẳng định sau tương đương:

a) $\chi\in\mathbf{D}(D,B)$.

b) $\gamma\in\mathrm{Aut}D$.

c) $\delta \in \mathrm{Aut}B.$

Chứng minh. a) $\Rightarrow$ b): Nếu $\chi \in \mathbf{D}(D,B)$ thì tồn tại $\chi' \in \mathbf{D}(D,B)$ sao cho $\chi \circ \chi'(x) = \chi' \circ \chi(x) = 0$ với mọi $x \in D.$

Theo (11) ta có: $\chi \circ \chi'(x) = \chi\gamma'(x) + \chi'(x) = \delta\chi'(x) + \chi(x) = 0,$ (12)

$$\chi' \circ \chi(x) = \chi'\gamma(x) + \chi(x) = \delta'\chi(x) + \chi'(x) = 0. \quad (13)$$

Từ đó: $$\gamma\gamma'(x) = \gamma[\gamma'(x)] \overset{(6)}{=} d\chi\gamma'(x).\gamma'(x) \overset{(12)}{=} d[-\chi'(x)].\gamma'(x)$$

$$= [d\chi'(x)]^{-1}.\gamma'(x) = x.[\gamma'(x)]^{-1}.\gamma'(x) = x.$$

$$\gamma'\gamma(x) = \gamma'[\gamma(x)] \overset{(6)}{=} d\chi'\gamma(x).\gamma(x) \overset{(13)}{=} d[-\chi(x)].\gamma(x)$$

$$= [d\chi(x)]^{-1}.\gamma(x) = x.[\gamma(x)]^{-1}.\gamma(x) = x.$$

Vậy γ' là nghịch đảo của $\gamma,$ hay $\gamma \in \mathrm{Aut}D.$

a) $\Rightarrow$ c): Giả sử $\chi \in \mathbf{D}(D,B)$ thì tồn tại $\chi' \in \mathbf{D}(D,B)$ sao cho $\chi \circ \chi'(x) = \chi' \circ \chi(x) = 0$ với mọi $x \in D.$ Khi đó:

$$\delta\delta'(b) = \delta[\delta'(b)] \overset{(7)}{=} \chi d\delta'(b) + \delta'(b) \overset{(8)}{=} \chi\gamma' d(b) + \delta'(b)$$

$$\overset{(12)}{=} [-\chi' d(b)] + \delta'(b) \overset{(7)}{=} b - \delta'(b) + \delta'(b).$$

$$\delta'\delta(b) = \delta'[\delta(b)] \overset{(7)}{=} \chi' d\delta(b) + \delta(b) \overset{(8)}{=} \chi'\gamma d(b) + \delta' = (b)$$

$$\overset{(13)}{=} [-\chi d(b)] + \delta(b) \overset{(7)}{=} b - \delta(b) + \delta(b).$$

Vậy δ' là nghịch đảo của δ, hay $\delta \in \mathrm{Aut}B.$

b) $\Rightarrow$ a): Giả sử $\gamma \in \mathrm{Aut}D$ và $\chi : D \to B.$ Ta xây dựng $\chi' : D \to B$ như sau:

$$\chi'(x) = -\chi\gamma^{-1}(x). \quad (14)$$

Khi đó:

$$\chi\chi'(x) \overset{(11)}{=} \delta\chi'(x) + \chi(x) \overset{(14)}{=} \delta[-\chi\gamma^{-1}(x)] + \chi(x) \overset{(9)}{=} -\chi\gamma\gamma^{-1}(x) + \chi(x) = 0.$$

$$\chi'\chi(x) \overset{(11)}{=} \chi'\gamma(x) + \chi(x) \overset{(14)}{=} -\chi\gamma^{-1}[\gamma(x)] + \chi(x) = 0.$$

Vậy χ' là nghịch đảo của $\chi,$ hay $\chi \in \mathbf{D}(D,B).$

c) $\Rightarrow$ a): Giả sử $\delta \in \mathrm{Aut}B$ và $\chi : D \to B$. Ta xây dựng $\chi' : D \to B$ như sau:

$$\chi'(x) = -\delta^{-1}\chi(x). \quad (15)$$

Khi đó:

$$\chi\chi'(x) \overset{(11)}{=} \delta\chi'(x) + \chi(x) \overset{(15)}{=} \delta[-\delta^{-1}\chi(x)] + \chi(x) = -\chi(x) + \chi(x) = 0.$$

$$\chi'\chi(x) \overset{(11)}{=} \chi'\gamma(x) + \chi(x) \overset{(15)}{=} -\delta^{-1}[\chi\gamma(x)] + \chi(x) = -\delta^{-1}[\delta\chi(x)] + \chi(x) = 0.$$

Vậy χ' là nghịch đảo của $\chi,$ hay $\chi \in \mathbf{D}(D,B).$

Từ Bổ đề 3.6 suy ra.

Hệ quả 3.9. *Tồn tại các đồng cấu nhóm*

$$\Delta_1 : \mathbf{D}(D,B) \to \mathrm{Aut}D, \qquad \Delta_2 : \mathbf{D}(D,B) \to \mathrm{Aut}B$$
$$\chi \mapsto \gamma \qquad\qquad\qquad \chi \mapsto \delta$$

4. MÔĐUN CHÉO TÁC ĐỘNG

Với những chuẩn bị trên đây, ta phát biểu và chứng minh một trong những kết quả chính của bài báo.

Mệnh đề 4.1. Các tương ứng sau đây:
$$\Delta : \mathbf{D}(D,B) \to \mathrm{Aut}(B,D,d,\theta) \tag{16}$$
$$\chi \mapsto (\delta,\gamma)$$
$$\theta^* : \mathrm{Aut}(B,D,d,\theta) \to \mathrm{Aut}\mathbf{D}(D,B) \tag{17}$$
$$(f_1, f_0) \mapsto \theta^*_{(f_1,f_0)}(\chi) = f_1\chi f_0^{-1}$$

là các đồng cấu nhóm làm cho $(\mathbf{D}(D,B), \mathrm{Aut}(B,D,d,\theta), \Delta, \theta^*)$ *trở thành một môđun chéo.*

Chứng minh. Với $\chi \in \mathbf{D}(D,B)$, theo Định lý 3.8 thì $\delta \in \mathrm{Aut}B$ và $\gamma \in \mathrm{Aut}D$. Hơn nữa, theo các điều kiện i) và ii) của Bổ đề 3.3 thì cặp (δ,γ) là một tự đồng cấu của môđun chéo (B,D,d,θ). Theo Hệ quả 3.9 ta có Δ là một đồng cấu nhóm.

Tiếp theo, với mọi $(f_1, f_0), (f_{1'}, f_{0'}) \in \mathrm{Aut}(B,D,d,\theta)$, ta có:

$$\theta^*_{(f_1,f_0)\circ(f_1',f_0')}(\chi) = \theta^*_{(f_1\circ f_1', f_0\circ f_0')}(\chi) \overset{(17)}{=} f_1\circ f_1'\chi(f_0\circ f_0')^{-1}$$
$$= f_1\circ(f_1'\chi f_0'^{-1})\circ f_0^{-1} \overset{(17)}{=} f_1\circ\theta^*_{(f_1',f_0')}(\chi)\circ f_0^{-1} \overset{(17)}{=} \theta^*_{(f_1,f_0)}\theta^*_{(f_1',f_0')}(\chi),$$

nghĩa là θ^* là một đồng cấu nhóm.

Cuối cùng, ta chứng minh các đồng cấu này thỏa mãn các điều kiện (1), (2) của một môđun chéo. Thật vậy,

$$(\theta^*\Delta(\chi)(\chi')\circ\chi)(x) \overset{(16),(17)}{=} (\delta\chi'\gamma^{-1}\circ\chi)(x)$$
$$\overset{(11)}{=} \delta\chi'\gamma^{-1}\gamma(x) + \chi(x) = \delta\chi'(x) + \chi(x) \overset{(11)}{=} \chi\circ\chi'(x).$$

Suy ra $\theta^*\Delta(\chi)(\chi')\circ\chi = \chi\circ\chi'$ hay $\theta^*\Delta(\chi)(\chi') = \mu_\chi\chi'$ hay $\theta^*\Delta = \mu$, nghĩa là (1) được thỏa mãn.

Bây giờ ta chứng minh điều kiện (2):

$$\Delta[\theta^*_{(f_1,f_0)}(\chi)] = \mu_{(f_1,f_0)}\Delta(\chi)$$
$$\Leftrightarrow \Delta(f_1\chi f_0^{-1}) = (f_1, f_0)^\circ(\delta,\gamma)^\circ(f_1, f_0)^{-1} = (f_1\delta f_1^{-1}, f_0\gamma f_0^{-1})$$

Đặt $f_1\chi f_0^{-1} = \chi^*$. Ta có:

$$\delta^*(b) \overset{(7)}{=} f_1\chi f_0^{-1}(db) + b = f_1(\chi f_0^{-1}db + f_1^{-1}(b)) \overset{(3)}{=} f_1[\chi df_1^{-1}(b) + f_1^{-1}(b)] \overset{(7)}{=} f_1\delta f_1^{-1}(b)$$

hay $\delta^* = f_1\delta f_1^{-1}$ (do (f_1^{-1}, f_0^{-1}) là tự đồng cấu của môđun chéo (B, D, d, θ) nên theo điều kiện (3) của đồng cấu môđun chéo ta có: $f_0^{-1}d = df_1^{-1}$).

Tương tự,

$$\gamma^*(x) \overset{(6)}{=} df_1\chi f_0^{-1}(x).x \overset{(3)}{=} f_0 d\chi f_0^{-1}(x).x = f_0[d\chi f_0^{-1}(x).f_0^{-1}(x)] \overset{(6)}{=} f_0\gamma f_0^{-1}(x)$$

hay $\gamma^* = f_0\gamma f_0^{-1}$ (do (f_1, f_0) là tự đồng cấu của môđun chéo (B, D, d, θ) nên theo điều kiện H_1 của đồng cấu môđun chéo ta có: $f_0 d = df_1$).

Định nghĩa 4.2. [8] Môđun chéo nói trong Mệnh đề 4.1 được gọi là *môđun chéo tác động* của môđun chéo (B, D, d, θ), ký hiệu $\mathrm{A}(B, D, d, \theta)$.

Ví dụ

a) Nếu N là nhóm con chuẩn tắc của nhóm G, $i: N \to G$ là đồng cấu bao hàm thì môđun chéo tác động $\mathrm{A}(N, G, i, \theta^0)$ là môđun chéo $(\mathbf{D}(N, G), X, \Delta, \theta^*)$, trong đó $\mathbf{D}(N, G)$ đẳng cấu với một nhóm con của $\mathrm{Aut}G$ như sau: $\mathbf{D}(N, G) \cong \{\alpha \in \mathrm{Aut}G / \alpha(x)x^{-1} \in N\ \forall x \in G\}$, X đẳng cấu với nhóm con của nhóm $\mathrm{Aut}G$ bao gồm các tự đẳng cấu của G hạn chế trên N thành các tự đẳng cấu của N. Đồng cấu Δ được xác định bởi $\Delta(\chi) = (\gamma|_N, \gamma)$, trong đó $\gamma(x) = \chi(x).x,\ \forall\, x \in G$.

b) Cho M là một G- môđun thì $(B, D, 0, \theta)$ là môđun chéo, với 0 là đồng cấu tầm thường và θ là tác động môđun. Khi đó, môđun chéo tác động của môđun chéo $(B, D, 0, \theta)$ là $(\mathrm{Der}(G, M), \mathrm{Aut}(M, G, 0, \theta), \Delta, \theta^*)$, trong đó $\mathrm{Der}(G, M)$ là tập tất cả các dẫn xuất $G \to M$ (và là một $\mathrm{Aut}(M, G, 0, \theta)$-môđun), Δ là đồng cấu biến mọi dẫn xuất χ thành (id_B, id_D).

5. KẾT LUẬN

Như vậy, trong bài báo này, chúng tôi đã xây dựng tường minh khái niệm môđun chéo tác động. Các phép chứng minh cũng được trình bày chi tiết. Tuy nhiên, do khuôn khổ của bài viết nên những tính chất đặc trưng của môđun chéo tác động sẽ được thực hiện ở một nghiên cứu khác, mà chưa được trình bày ở đây.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J. H. C. Whitehead (1949), *Combinatorial homotopy II,* Bull. Amer. Math. Soc, 55, 453-496.

[2] Z. Arvasi, T. S. Kuzpinari, E. Ö. Uslu (2009), *Three-crossed modules,* Homology Homotopy and Appl., 2, 161-187.

[3] D. Conduché (1984), *Modules croisés généralisés de longeur 2*, J Pure Appl. Alg., 34, No 2-3, 155-178.

[4] N. T. Quang, P. T. Cuc (2012), *Crossed bimodules over rings and Shukla cohomology*, Math. Commun., 17(2), 575-598.

[5] N. T. Quang, P. T. Cuc (2015), *Equivariant crossed modules and cohomology of groups with operators*, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 52(4), 1077-1095.

[6] N. T. Quang, C. T. K. Phung, P. T. Cuc (2014), *Braided equivariant crossed modules and cohomology of Γ-modules*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, December, 953-975.

[7] R. Brown, P.J. Higgins (1978), *On the connection between the second relative homotopy group some related spacce*, Proc. London. Math. Soc., 36, 193-212.

[8] K. Norrie (1990), *Actions and autormorphisms of crossed modules*, Bulletin de la S. M. F., tome 118, 2, 129-146.

[9] R. Brown, C. Spencer (1976), G*-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group*, Proc. Konn. Ned. Akad. v. Wet., 79, 296 - 302.

[10] R. Brown, O. Mucuk (1994), *Covering groups of non-connected topological groups revisited*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 115, 97-110.

ACTOR CROSSED MODULES

Pham Thi Cuc

ABSTRACT

In this paper, we first prove in details the results related to the semigroup of derivations of a crossed module. Then, we prove the results on the Whitehead group of regular derivations. Finally, we construct the actor crossed module of a given crossed module.

Keywords: *Crossed modules, whitehead groups, regular derivations, actor crossed modules.*

** Ngày nộp bài:3/8/2022; Ngày gửi phản biện: 12/9/2022; Ngày duyệt đăng: 27/10/2022*

** Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở, Mã số đề tài ĐT-2021-11 của Trường Đại học Hồng Đức.*