

MỘT SỐ ĐỀ XUẤT DẠY HỌC NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG THEO ĐỊNH HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC

Trần Cường và Lưu Bá Thắng

Khoa Toán Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Tóm tắt. Bài báo này nhằm đề xuất việc cụ thể hóa mục tiêu, lựa chọn, bổ sung, sắp xếp nội dung cũng như một số gợi ý tổ chức hoạt động dạy học theo định hướng phát triển năng lực trong dạy học nội dung *Nguyên hàm - Tích phân* (lớp 12 trung học phổ thông). Những đề xuất này dựa trên tìm hiểu cơ sở lý luận dạy học truyền thống, một số xu hướng nghiên cứu quốc tế, thời sự về dạy học giải tích, tổng kết kinh nghiệm, bước đầu khảo sát, đánh giá thực trạng tại một số cơ sở giáo dục. Bài báo cũng trình bày xu hướng vận dụng một số ứng dụng mini-CAS trong dạy học Giải tích ở trường trung học phổ thông.

Từ khóa: Dạy học giải tích, tích phân, dạy học phát triển năng lực, mini-CAS.

1. Mở đầu

Dạy và học Giải tích toán học là một lĩnh vực đã được quan tâm nghiên cứu một cách sâu sắc, hệ thống bởi các nhà nghiên cứu quốc tế.

Tiểu ban Calculus Education tại ICME 13 (International Congress on Mathematical Education, Hamburg, 2016) đã tổng hợp 5 chủ đề nghiên cứu chính:

- (i) Về nội dung dạy học Giải tích từ tiếp cận lịch sử - khoa học luận;
- (ii) Những nghiên cứu thực nghiệm thu thập bằng chứng để phân tích hoạt động dạy và học trong từng thể chế cụ thể;
- (iii) Những nghiên cứu phân tích chương trình ở các nước;
- (iv) Quá trình chuyển tiếp giữa các bậc học (từ THCS lên THPT và từ THPT lên Đại học) khi học tập môn Giải tích;
- (v) Về tư duy giải tích (Calculus Thinking) và những khó khăn của người học.

Bản khảo sát tổng quan [1] của Tiểu ban đã điểm tổng cộng 144 công bố, trong đó khoảng thời gian giữa 2 kì ICME (2012 - 2016) có 45 công bố. Khảo sát này đã tham khảo 12 công trình có đề cập tới khái niệm tích phân trong tiêu đề, 8 trong số đó công bố sau năm 2000.

Dạy học toán theo định hướng phát triển năng lực là yêu cầu, chủ trương, giải pháp bắt buộc trong công cuộc đổi mới giáo dục ở nước ta hiện nay. Tuy chương trình giáo dục phổ thông đã được ban hành cuối năm 2018, việc triển khai vào thực tế dạy học hiện còn rất nhiều vấn đề cần nghiên cứu làm rõ.

Chương trình chỉ đưa ra những đầu mục kiến thức bắt buộc và yêu cầu cần đạt ở mỗi chủ đề. Hiện nay, từ các nhóm tác giả sách giáo khoa (SGK), cán bộ quản lý nhà trường tới đội ngũ giáo viên phổ thông đều khó khăn khi trả lời một số câu hỏi có tính nguyên tắc như: (1) Làm sao cụ thể hóa các yêu cầu cần đạt thành những hoạt động, chỉ báo cụ thể để dùng, để đánh giá?

Ngày nhận bài: 15/9/2019. Ngày sửa bài: 23/9/2019. Ngày nhận đăng: 30/9/2019.

Tác giả liên hệ: Trần Cường. Địa chỉ e-mail: trancuong@hnue.edu.vn

(2) Tổ chức hoạt động dạy học, trong môn toán, dưới dạng hoạt động trải nghiệm như thế nào để khuyến khích người học học tập tích cực, chủ động, sáng tạo? (3) Làm thế nào dạy học toán có thể gắn với thực tiễn? (4) Đánh giá năng lực toán học của học sinh ra sao?

Bài báo này tập trung đề xuất phương án trả lời cho ba câu hỏi đầu tiên, ở nội dung Nguyên hàm - Tích phân (NHTP) trong chương trình Giải tích 12.

Trước tiên, nhờ nghiên cứu lí luận có yếu tố so sánh quốc tế, một số luận điểm làm căn cứ được rút ra từ Lí luận dạy học truyền thống, Giáo dục toán học gắn với thực tiễn (RME - Realistic Mathematics Education), Lí thuyết tình huống (Théorie des Situations). Sau khi điểm lại vị trí, ý nghĩa, mục tiêu, yêu cầu cần đạt của nội dung NHTP trong chương trình phổ thông trong Chương trình 2006 và Chương trình 2018, chúng tôi mô tả lại một *khảo sát* ngẫu nhiên về kinh nghiệm, quan điểm dạy học NHTP của 59 giáo viên THPT.

Thông qua tổng kết kinh nghiệm học, dạy và nghiên cứu toán của chính mình có kết hợp với phỏng vấn lấy ý kiến một số chuyên gia giáo dục trong nước, chúng tôi nhấn mạnh một hiện tượng có khả năng tác động lớn đến dạy học toán nói chung, dạy NHTP nói riêng: sự xuất hiện của các phần mềm, tiện ích tính toán hình thức trên điện thoại thông minh và máy tính xách tay. Trước khi đi tới kết luận - bàn luận, chúng tôi trình bày tóm tắt những đề xuất có hệ thống từ việc xác định, cụ thể hóa mục tiêu - yêu cầu cần đạt đến tổ chức nội dung, gợi ý chuỗi hoạt động dạy học NHTP ở lớp 12.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Quá trình dạy học môn Toán

Quá trình dạy học bao gồm việc dạy và việc học: việc học là đối tượng điều khiển của việc dạy, hướng tới chiếm lĩnh nội dung môn học. Nội dung, cùng với mục đích và phương pháp là ba thành phần cơ bản của quá trình dạy học, có quan hệ hữu cơ, tác động qua lại lẫn nhau, trong đó mục tiêu giữ vai trò chủ đạo quyết định nội dung và phương pháp dạy học. Tuy nhiên, "trong điều kiện nào đó, phương pháp dạy học có thể tác động tích cực trở lại mục tiêu và nội dung" [2, tr. 9].

Mục đích dạy học môn Toán, được xác định một cách toàn diện, dựa trên mục tiêu giáo dục, đặc điểm môn Toán và vị trí môn Toán trong nhà trường phổ thông. Trên cơ sở (i) trang bị tri thức ở cả 4 dạng sự vật, phương pháp, chuẩn, giá trị, việc dạy học môn Toán cần (ii) rèn luyện kĩ năng cho học sinh ở ba bình diện vận dụng tri thức: trong nội bộ môn Toán, trong các môn học khác và trong cuộc sống; (iii) phát triển năng lực trí tuệ cho họ (từ tư duy logic - ngôn ngữ chính xác, khả năng suy đoán - tưởng tượng, các hoạt động trí tuệ cơ bản, tới hình thành một cách bền vững các phẩm chất trí tuệ); (iv) góp phần giáo dục chính trị tư tưởng, phẩm chất và phong cách lao động khoa học (lòng yêu nước, thế giới quan, phẩm chất đạo đức, năng lực thẩm mỹ,...) và (v) tạo cơ sở để người học học tiếp hoặc bước vào cuộc sống lao động sản xuất [2, mục 1.2].

Trong xu thế thời sự, khách quan đòi hỏi dạy học phát triển năng lực (NL) cho người học, việc dạy học môn Toán phải từng bước hình thành cho học sinh NL tư duy và lập luận toán học, NL mô hình hóa, NL giải quyết vấn đề toán học, NL giao tiếp toán học, NL sử dụng công cụ phương tiện học toán [3]. Môn Toán cũng cần góp phần hình thành và phát triển các NL chung cho học sinh gồm NL tự chủ và tự học, NL giao tiếp và hợp tác, NL giải quyết vấn đề và sáng tạo [4].

Theo quan điểm của Giáo dục toán học gắn với thực tiễn, nội dung môn Toán được trình bày trong các sách, giáo trình chưa chắc đã phản ánh đúng tiến trình chúng được phát minh ra, toán có sẵn khác với toán được tìm ra; một trong những biện pháp tốt nhất để dạy học môn Toán là hướng dẫn học sinh tiến hành hoạt động tái khám phá ra tri thức. Trong mọi trường hợp, bài

dạy nên được bắt đầu bằng một tình huống, vấn đề thực tiễn - nghĩa là gắn gũi với tri thức, kinh nghiệm của người học [5, tr. 523].

Lí thuyết tình huống (Théorie des Situations) lại đặc biệt quan tâm tới hiện tượng chuyển hóa sự phạm (didactique transposition) giữa các dạng tri thức: từ nhiều dạng thức khác nhau trong lịch sử tìm tòi khám phá của nhân loại, cô đúc thành tri thức khoa học, tiếp theo được "chế biến" ra tri thức chương trình. Người giáo viên lại "chế biến" tri thức chương trình thành tri thức dạy học để đưa đến với thế hệ sau, thành tri thức của người học. Khâu cuối phải có dụng ý sự phạm của người giáo viên, mà cách làm chủ yếu, phù hợp nhất là hoàn cảnh hóa lại, thời gian hóa lại, cá nhân hóa lại [2, tr. 153].

2.2. Nguyên hàm - Tích phân trong chương trình toán phổ thông

Trong chương trình giáo dục phổ thông 2006, khái niệm *Nguyên hàm* được đưa vào nhằm giải bài toán ngược của phép tính đạo hàm, *Tích phân* được định nghĩa nhờ nguyên hàm, còn những *Ứng dụng của tích phân* giới hạn trong phạm vi hình học [6, tr. 108]. Việc này hiện thực hóa những tư tưởng cơ bản như: đảm bảo vị trí trung tâm của khái niệm hàm số, tăng cường một số yếu tố của giải tích toán học và hình học giải tích, tăng cường và làm rõ mạch toán ứng dụng và ứng dụng toán học, sử dụng hợp lí ngôn ngữ tập hợp và logic toán nhằm đảm bảo tính cơ bản, toàn diện, thiết thực, hiện đại và có hệ thống [2, tr.64].

Chương trình quy định yêu cầu cần đạt cho học sinh gồm (i) Hiểu các định nghĩa nguyên hàm và tích phân, (ii) Biết bảng nguyên hàm và sử dụng nó một cách linh hoạt vào các bài toán cụ thể, (iii) Hiểu và vận dụng các tính chất, phương pháp tính nguyên hàm và tính tích phân và (iv) Vận dụng tích phân để xây dựng công thức tính diện tích, thể tích các hình và để giải toán [6, tr. 108].

Trong Chương trình toán phổ thông 2018, để đảm bảo tính tinh giản, thiết thực, hiện đại; tính thống nhất, nhất quán và phát triển liên tục; tính tích hợp và phân hóa; tính mở, chủ đề NHTP vẫn được sắp xếp dạy ở lớp 12. Những đề mục lớn về nội dung vẫn giữ nguyên gồm Nguyên hàm, Tích phân, Ứng dụng tích phân, tuy vậy Chương trình có điều chỉnh về yêu cầu cần đạt, nhấn mạnh bài tập thực tiễn. Dạy học NHTP phải giúp người học đạt được tới mức độ (i) Nhận biết được khái niệm nguyên hàm của một hàm số, định nghĩa và các tính chất của tích phân; (ii) Giải thích được tính chất cơ bản của nguyên hàm, xác định được nguyên hàm một số hàm sơ cấp, tính được NHTP trong những trường hợp đơn giản; và (iii) Vận dụng được tích phân để tính được diện tích một số hình phẳng, thể tích một số hình khối và giải được một số bài toán thực tiễn [3, tr. 106].

2.3. Thực tiễn và bối cảnh mới về phương tiện học tập

2.3.1. Kinh nghiệm và quan điểm của giáo viên phổ thông khi dạy Nguyên hàm Tích phân

Nhằm củng cố ý tưởng thực hiện nghiên cứu, chúng tôi đã hỏi 59 giáo viên THPT được chọn ngẫu nhiên từ 13 tỉnh thành (Tuyên Quang, Bắc Giang, Hà Nội, Yên Bái, Lạng Sơn, Vĩnh Phúc, Thái Bình, Phú Thọ, Ninh Bình, Bắc Ninh, Sơn La, Hải Dương, Cần Thơ), trong đó 80% đã dạy toán từ 10 đến dưới 20 năm và 61% khẳng định đã dạy chủ đề NHTP từ 11 lần đến mức "nhiều không nhớ nổi". Kết quả chi tiết của khảo sát độc giả có thể xem trong Phụ lục, mặc dù chưa đủ ý nghĩa thống kê để rút ra những kết luận vững chắc, nhưng cũng có một số điểm đáng chú ý và củng cố căn cứ cho nhóm tác giả khi đưa ra các nhận định, đề xuất:

54% người tham gia (NTG) chỉ yêu cầu học sinh hiểu được định nghĩa hình thức, coi nguyên hàm như phép toán ngược với đạo hàm; Về khái niệm tích phân, 49% NTG chỉ cần học sinh hiểu được nội dung phát biểu định nghĩa bằng công thức Newton - Leibniz để giải bài tập. Chỉ 12% NTG đặt mục tiêu cho học sinh hiểu được tích phân là "tổng chính xác" thu được qua phép tính giới hạn, mặc dù người ta có thể tính được xấp xỉ với độ chính xác tùy ý. 68% NTG

ước tính tỉ lệ lượng bài tập *ứng dụng NHTP trong môn học khác* (Lí, Hóa, Sinh,...) mình đã dùng là dưới 1/5. 73% dùng ít hơn 1/5 số lượng bài tập thuộc nhóm *ứng dụng NHTP trong đời sống* như kĩ thuật, kinh tế,... (trong đó 3 NGT = 5% khẳng định *không bao giờ dùng nhóm bài tập này*). 100% NTG luôn phân dạng (từ 6 đến 10 dạng) cho học sinh khi luyện tập tính NHTP.

Chỉ có 17% NTG *rất ít khi* hoặc *không bao giờ* dùng máy tính bỏ túi trong khi dạy NHTP. Ngược lại tỉ lệ *rất ít khi* hoặc *không bao giờ* dùng điện thoại thông minh trong dạy học lên tới 78%. 71% không nêu (cũng có thể là không biết / không quan tâm tới) phần mềm, ứng dụng, dịch vụ trực tuyến nào có khả năng tính được NHTP.

Sở dĩ vấn đề sử dụng ứng dụng di động, phần mềm và dịch vụ chuyên dụng được đặt ra, vì những công cụ như vậy đã và đang phát triển mạnh mẽ. Người giáo viên không thể chối bỏ, làm ngơ, bàng quan. *Những sự thay đổi, điều chỉnh trong dạy học NHTP nói riêng, dạy học toán nói chung, là không thể tránh khỏi.*

2.3.2. Bối cảnh mới cần thích ứng

Điện thoại thông minh (smartphone) đã dần trở thành công cụ lao động, học tập quen thuộc, thiết yếu. Thiết bị di động này kết nối được internet tốc độ cao, chạy các phần mềm (thậm chí rất nặng) gần như máy tính nhưng tương tác, giao diện thân thiện hơn nhiều qua màn hình cảm ứng. Có hàng triệu ứng dụng chạy trên smartphone như Trò chơi, phần mềm nghe nhạc, dự báo thời tiết, nhận và gửi email, đọc sách điện tử, văn phòng, các chương trình kế toán,... Hai hệ điều hành phổ biến nhất điều khiển smartphone là iOS (máy Apple) và Android.

Với người dùng chuyên nghiệp, những hệ tính toán đại số (CAS: Computer Algebra System) chuyên dụng, đồ sộ như Maple, Mathematica, MatLab,... đã có từ lâu, và vẫn đang tiếp tục được phát triển để ngày càng *thông minh, giới giang* hơn nhờ chất xám của một đội ngũ hùng hậu các chuyên gia về *Đại số máy tính* hay *Trí tuệ nhân tạo*.

Với học sinh và giáo viên phổ thông - trong chừng mực nào đó cả với nhà nghiên cứu toán - nhiều công cụ nhỏ gọn, hiệu quả cũng đang xuất hiện ngày càng nhiều, ngày càng mạnh mẽ. Do tính *nhỏ gọn, miễn phí, dễ dùng* và có khả năng *thực hiện* một cách *hiệu quả* nhiều *tính toán hình thức* ở phổ thông, trong khuôn khổ bài báo này, chúng được gọi là *mini-CAS*. Dưới đây giới thiệu hai ứng dụng mini-CAS rất hữu ích.

PhotoMath (phát hành năm 2014 bởi Microblink, Zagreb, Croatia - đăng kí văn phòng tại London, Vương quốc Anh) sử dụng camera trên thiết bị di động để nhận biết rồi giải và cung cấp các bước giải các bài toán phương trình, hệ phương trình, tích phân,... Ứng dụng có sẵn và miễn phí trên cả Android và iOS.

Wolfram Alpha Mathematics (WAM) là dịch vụ trực tuyến do Wolfram Research (thành lập năm 1987 tại Mỹ) phát triển từ năm 2009, có khả năng trả lời các câu hỏi về toán được nhập bằng tiếng Anh vào hộp tìm kiếm, bao gồm cả các tính toán hình thức. Một tài khoản chuyên nghiệp (mất phí) thậm chí được lập trình để hiển thị nội dung từng bước giải các bài toán. Tất nhiên WAM không hề *nhỏ gọn* nhưng vẫn có bản miễn phí, dễ dùng, hiệu quả nên khi giới hạn các nhiệm vụ trong toán phổ thông, WAM cũng được gọi là mini-CAS.

Mini-CAS làm được một số việc sau:

Đối với học sinh, mini-CAS có thể đưa ra các lời giải chi tiết, cụ thể với kết quả nhanh chóng, chính xác giúp học sinh có thể tự kiểm tra lời giải của mình trong khá nhiều bài tập tính toán. Đối với những dạng đã có thuật giải, chúng thậm chí giải được trọn vẹn với cả kết quả các bước tính toán trung gian giúp hỗ trợ hoạt động kiểm tra, đối chiếu, so sánh, phân tích, tìm tòi, khám phá. Học sinh dùng mini-CAS có thể tiết kiệm thời gian tính toán để suy ngẫm, tìm hiểu về bản chất, ý nghĩa, cách thức. Về mặt tâm lí, việc được hướng dẫn sử dụng đúng cách các phần mềm có thể gợi động cơ, gây tò mò sung sướng cho người học, thúc đẩy họ cạnh tranh tích

cực với máy tính. Tất nhiên một nguy cơ rất rõ rệt là nếu lạm dụng trong học tập sẽ rất dễ sinh tâm lí ỷ lại, tình trạng lười suy nghĩ.

Đối với giáo viên toán, mini-CAS giúp: gọi động cơ, thay đổi không khí lớp học; giải toán nhanh và ra đề toán hàng loạt với số liệu tốt; tiết kiệm thời gian công sức phải dạy quá nhiều những kiến thức, kĩ năng mà sau này ít dùng đến, thay vào đó có thể tập trung phân tích, thảo luận, giải thích, gọi cảm hứng học tập - sáng tạo,... nói gọn là *dạy toán* thay cho *chỉ dạy tính*. Sự xuất hiện của các công cụ mạnh mẽ này cũng tạo động lực tích cực, buộc người giáo viên phải đổi mới phương pháp, tiếp cận dạy học.

Thử nghiệm của chúng tôi khi giải các bài tập (BT) chương Nguyên hàm - Tích phân trong SGK lớp 12 hiện hành (Ban cơ bản) cho thấy WAM giải được trọn vẹn 50 Ví dụ, BT, còn PhotoMath chỉ không giải được Ví dụ 4 tr. 24.

Bảng 1. Kết quả thử nghiệm tính NHTP với mini-CAS và máy tính bỏ túi

Bài tập	Kết quả	PhotoMath	WAM	Casio 570 VN-Plus
Tính nguyên hàm	Tính ra kết quả	30	30	0
	Có lời giải chi tiết	30	30	0
Tính tích phân	Tính ra kết quả	49	50	20
	Có lời giải chi tiết	49	50	0

Câu hỏi tự nhiên xuất hiện là: chỉ một động tác bấm lên màn hình đã giải được toàn bộ các bài tập trong SGK, liệu có cần cầm học sinh dùng mini-CAS? *Nếu không nên (không thể) cầm, phải dạy cái gì và dạy như thế nào?*

2.4. Một số đề xuất dạy học Nguyên hàm Tích phân

2.4.1. Xác định mục tiêu

Do khuôn khổ của bài báo, chúng tôi không giải thích cặn kẽ các đề xuất cụ thể hóa mục tiêu, yêu cầu cần đạt trong Bảng 2 dưới đây.

Bảng 2. Đề xuất xác định mục tiêu, yêu cầu cần đạt khi dạy Nguyên hàm Tích phân theo định hướng phát triển năng lực (Chương trình 2018)

Mục tiêu	Yêu cầu cần đạt	Đề xuất bổ sung / cụ thể hóa
Khái niệm nguyên hàm	Nhận biết được khái niệm nguyên hàm của một hàm số	(i) Nhận biết được nguyên hàm chính là hàm biểu thị diện tích hình thang cong thay đổi nhờ hoạt động trải nghiệm với sự hỗ trợ của một số phần mềm chuyên dụng
	Giải thích được tính chất cơ bản của nguyên hàm	(ii) Kiểm nghiệm được các tính chất với hàng loạt ví dụ được tính toán với phần mềm chuyên dụng (iii) Nhận ra liên hệ giữa các tính chất của nguyên hàm với các tính chất của đạo hàm
Khái niệm tích phân	Nhận biết được định nghĩa và các tính chất của tích phân;	(iv) Hiểu ý nghĩa của các ký hiệu trong cách viết hình thức $\int f(x)dx$. (v) Thấy được / hiểu rõ hoặc tự nêu được (a) cách làm tăng độ chính xác trong khi ước tính diện tích, (b) nhu cầu dùng giới hạn để tìm công thức tổng quát và diện tích chính xác; (c) Qua đó hiểu được bản chất của khái niệm: tích phân chẳng qua là một tổng xấp

		xi được chuyển qua giới hạn để tìm giá trị chính xác. (vi) Nhận thức được ý nghĩa, giá trị của các phương pháp toán học;
Kĩ năng và Ứng dụng tích phân	Xác định được nguyên hàm một số hàm sơ cấp	
	Tính được NHTP trong những trường hợp đơn giản	(vii) Biết dùng phần mềm / máy tính bỏ túi để kiểm tra, đối chiếu kết quả; (viii) Trả lời được một số câu hỏi định tính cần hiểu bản chất thay vì các tính toán phức tạp
	Sử dụng được tích phân để tính được diện tích một số hình phẳng, thể tích một số hình khối	(ix) Ước lượng được (xấp xỉ) diện tích, thể tích một số hình khối đơn giản bằng thực nghiệm; (x) Hiểu được một số mô hình đơn giản (trong SGK) và tính được tính diện tích, thể tích bằng tích phân theo các mô hình đó;
	Giải được một số bài toán thực tiễn;	(xi) Tự lập được một số mô hình tính diện tích thể tích bằng tích phân;
Phát triển trí tuệ		Tư duy thuật toán, Tư duy hàm, Khả năng suy đoán, tưởng tượng
Phẩm chất		Cẩn thận, tỉ mỉ, kiên trì

2.4.2. Đề xuất về nội dung và phương pháp dạy học

Nội dung giáo dục toán học theo nghĩa rộng [3, tr.57] gồm có những tri thức toán học cụ thể, những phương pháp và những ý tưởng. Ở chủ đề NHTP có thể kể tới:

Nhóm 1: (a) Những tri thức toán học cụ thể như định nghĩa NHTP chặt chẽ bằng suy diễn, bảng nguyên hàm của các hàm sơ cấp thường gặp, các tính chất của NHTP, các công thức tính diện tích, thể tích - chính là những định lí toán học; (b) Những phương pháp, kĩ thuật thuần túy toán học (biến đổi vi phân, đổi biên, tích phân từng phần) và (c) Một lượng lớn các *BT* chủ yếu yêu cầu tính toán.

Nhóm 2: (d) Một số *kĩ thuật sử dụng công cụ*; (e) Những *phương pháp suy nghĩ* (tương tự hóa, khái quát hóa, quy lạ về quen, tìm tòi, suy đoán,...) và (e) Những *ý tưởng* mà các nhà toán học tiền bối đã dùng khi phát minh NHTP như *chia để trị, mô hình - đơn giản hóa* hay *xem xét sự vật trong vận động - phụ thuộc, chuyển qua giới hạn*,...

Nhóm 1, ngoài vai trò quan trọng là giá mang hoạt động dạy học - giáo dục thì sau này sẽ chỉ cần thiết cho một nhóm rất nhỏ những người làm công việc liên quan tới toán học (kĩ sư, chuyên viên phân tích, giáo viên toán, nhà toán học,...). Đa phần người học sẽ quên hết các định nghĩa, định lí, bài tập phức tạp vì hầu như không dùng đến. Nếu còn hiểu được: *tích phân bắt đầu từ một tổng xấp xỉ, muốn có tổng chính xác (thường chỉ diện tích, thể tích) phải chuyển qua giới hạn* đã có coi là thể hiểu bản chất NHTP. Ngược lại, nhóm 2, khó thấy hơn, lại cần thiết cho mọi người.

Trong lịch sử, tích phân được phát minh dưới dạng thực nghiệm từ rất sớm khi Eudoxus (390 - 337 tr. CN), Archimedes (288 - 212 tr. CN) dùng *phương pháp vét kiệt* để tính diện tích hình tròn thông qua dãy đa giác đều nội và ngoại tiếp nó (nhiều tài liệu cho thấy Archimedes dùng tới đa giác đều 96 cạnh). Kết quả mặc dù rất tuyệt vời (số pi có thể được suy ra đúng tới 5 chữ số sau dấu phẩy), nhưng “tại sao cứ tiếp tục tăng số cạnh đa giác đều lên thì bất kỳ điểm nào của hình tròn (dù gần biên tới đâu) cũng sẽ có lúc *bị vét hết?*” thì người ta chưa tìm thấy giải thích nào của Archimedes. Gần 20 thế kỷ sau, *vi phân và đạo hàm* mới được phát triển bởi

Fermat (1607 - 1665) và Descartes (1569 - 1650) khi nghiên cứu tiếp tuyến của đường cong phẳng hay Newton (1643 - 1727), Leibniz (1646 - 1716) hay Bernoulli J. (1667 - 1748) khi cần tính toán các đại lượng tức thời trong Vật lí. Lúc này *vô cùng bé* và *giới hạn* đều chưa được định nghĩa chính xác. Ngay cả Cauchy (1789 - 1857) khi đặt nền móng cho giải tích cổ điển, qua các công trình nổi tiếng của mình cũng còn mắc vào vòng luẩn quẩn: dùng *số thực* để định nghĩa *giới hạn*, đồng thời lại dùng *giới hạn* để định nghĩa *số thực!!!* Phải tới khi Dedekind (1831 - 1916) định nghĩa được *số thực nhờ lát cắt*, nền móng của *giải tích cổ điển* mới thực sự được vững chắc như ngày nay [7, ch. V].

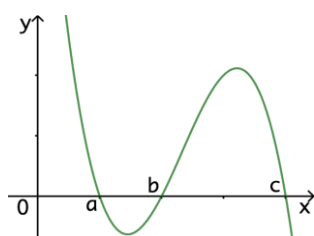
Thứ tự trong chương trình toán ở nước ta, vì nhiều lí do khác nhau, *số thực* được xây dựng ở lớp 6, *giới hạn* rồi đến *đạo hàm*, *vi phân* ở lớp 11; đến lớp 12, *nguyên hàm* mới được định nghĩa qua *đạo hàm*; cuối cùng mới đến *tích phân* được định nghĩa bằng công thức Newton - Leibniz.

Về dạy lí thuyết, nhờ vào mini-CAS và những hoạt động trải nghiệm được thiết kế hợp lí, hoàn toàn có thể *hoàn cảnh hóa lại*, *thời gian hóa lại*, *cá nhân hóa lại* tri thức để dẫn dắt học sinh *tái khám phá* khái niệm tích phân qua con đường dạy học theo thứ tự:

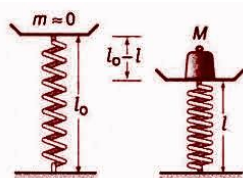
Tích phân -> *Nguyên hàm* -> *Ứng dụng của tích phân*;

Trong giờ bài tập (BT), nên giảm bớt các BT đòi hỏi nhiều kĩ thuật thuần túy toán học phức tạp để dành thời gian cho 3 dạng thiên về *hiểu bản chất* và *những chức năng trí tuệ bậc cao*: BT định tính, BT vận dụng và BT giải thích hiện tượng.

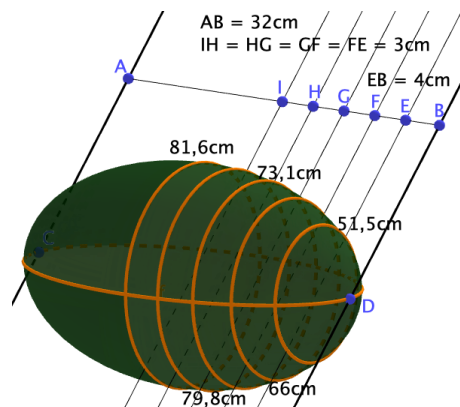
Ví dụ 1. (BT định tính) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số đạo hàm $f'(x)$ trong Hình 1. Hãy sắp thứ tự tăng dần ba số $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Ví dụ 2. (BT liên môn ứng dụng tích phân) Trong cơ học, công của một lực thay đổi theo hàm $F(x)$ của biến li độ x tác động vào một vật và gây ra sự dịch chuyển một quãng đường giữa hai li độ a , b được tính theo công thức $W = \int_a^b f(x)dx$ (khi lực $F(x)$ không đổi, ta có công thức quen thuộc $W = FS$).

Một chiếc lò xo công nghiệp (Hình 2) có độ cứng $k = 1500$ N/m dài 30,5cm ở trạng thái tự nhiên, bị nén còn 25,5cm. Tính công của lực nén.

Ví dụ 3. (BT thực tiễn) Anh chủ quán cà phê đổ hai bạn sinh viên làm thêm: Ước tính xem “quả dưa hấu không hạt vừa nhập sẽ xay được bao nhiêu cốc sinh tố?”.

Quả dưa này cao 32cm, chu vi vòng tròn chỗ lớn nhất là 81,6cm, thuộc giống có vỏ dày trung bình 1cm. Cốc ở quán là loại 330ml nhưng mỗi cốc chỉ cần dùng 260ml nước dưa hầu nguyên chất do pha thêm đá lạnh. Bạn Tuấn (học Vật lí) đã đo thêm chu vi 4 vòng liên tiếp của quả dưa hầu cho kết quả như Hình 3, để coi mỗi lát như một khối trụ rồi tính một lát ra kết quả 39 cốc. Bạn Lan (học ngành Toán) chỉ ghi một tích phân ngắn, dùng smartphone mở phần mềm gì đó chụp “tách”, rồi tuyên bố: quả dưa này xay được không quá 35 cốc. Em hãy cho biết đoán xem hai người đã tính toán cụ thể ra sao rồi đánh giá xem ai ước lượng tốt hơn?

Ví dụ 4. (BT giải thích hiện tượng) Tại sao PhotoMath không tính được tích phân trong Ví dụ 4 (trang 24 SGK Giải tích 12)?

Chuỗi hoạt động cụ thể hóa đề xuất Dạy lí thuyết cũng như Lời giải - Bình luận chi tiết các Ví dụ, độc giả quan tâm có thể xem tại địa chỉ <https://bit.ly/2LTVIPm>.

3. Kết luận

Kết quả chính trong bài báo là những đề xuất về dạy học Nguyên hàm Tích phân theo hướng phát triển năng lực học sinh thông qua các hoạt động trải nghiệm. Những đề xuất này căn cứ trên tổng kết kinh nghiệm, phỏng vấn chuyên gia, nghiên cứu lí luận, quan sát điều tra (mẫu ngẫu nhiên 59 giáo viên THPT tại 13 tỉnh, thành phố) và thử nghiệm kĩ thuật kiểm chứng khả năng của một số ứng dụng mini-CAS:

Về *mục tiêu dạy học* có 11 dấu hiệu (dưới dạng các hành động, chỉ báo cụ thể) có thể giúp giáo viên lập bảng kiểm đánh giá mức đạt của học sinh về kiến thức, kĩ năng;

Về *nội dung dạy NHTP*, chúng tôi khuyến nghị các giáo viên toán (I) nên thiết kế nhiều hoạt động trải nghiệm, tận dụng sức mạnh của mini-CAS để dạy theo trình tự Tích phân → Nguyên hàm → Ứng dụng và (II) tăng cường 3 nhóm BT định tính, liên môn, thực tiễn và giải thích hiện tượng.

Về *phương pháp dạy học*, chúng tôi đề xuất một chuỗi hoạt động trải nghiệm với sự hỗ trợ của các phần mềm mini-CAS tại <https://bit.ly/2LTVIPm> để có thể lấy được ý kiến các đồng nghiệp quan tâm.

Cần lưu ý, do chủ động giới hạn về phạm vi nên việc khảo sát điều tra còn ở mức độ ngẫu nhiên với số lượng nhỏ, chưa có nhiều ý nghĩa thống kê.

Bài báo có thể tiếp tục phát triển thành nghiên cứu thực nghiệm quy mô đủ độ tin cậy, từ mức độ tìm hiểu đánh giá kinh nghiệm, nhận thức, thái độ của giáo viên tới đánh giá hiệu quả, điều chỉnh hệ thống các đề xuất sư phạm. Trả lời cho câu hỏi "làm thế nào để đánh giá năng lực của học sinh sau khi học NHTP" cũng là một vấn đề mở thú vị.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] David Bressoud, Imène Ghedamsi, Victor Martinez-Luaces and Günter Törner, 2016. Teaching and Learning of Calculus. ICME-13 Topical Surveys, Springer.
- [2] Nguyễn Bá Kim, 2017. *Phương pháp dạy học môn Toán*, Nxb Đại học Sư phạm Hà Nội.

- [3] Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018. Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán.
- [4] Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018. Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể.
- [5] S. Lerman (ed), 2014. *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer Netherlands.
- [6] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Trần Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, và Cấn Văn Tuất, 2010. *Giải tích 12 - Sách giáo viên*, Nxb Giáo dục, Tái bản lần 3.
- [7] Nguyễn Thủy Thanh, 2008. *Lịch sử toán học giản yếu*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
- [8] Farmaki, V. and Paschos T., 2007. *Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities*, Educational Studies in Mathematics, 66 (1), pp 83 - 106.
- [9] Bùi Văn Nghị, 2014. *Giáo dục toán học hướng vào năng lực người học*. Tạp chí khoa học trường ĐHSP Hà Nội, số 2A, pp. 3-6.
- [10] Borovik, A., and Katz, M., 2012. *Who gave you the Cauchy–Weierstrass tale? The dual history of rigorous calculus*. Foundations of Science, 17(3), pp. 245-276.
- [11] Nguyễn Tiến Dũng, Học toán và dạy toán như thế nào, Tủ sách Sputnik, sách điện tử SE002, phiên bản ngày 31/05/2015, <http://shop.sputnikedu.com/files/MathTeaching2015.pdf>.

ABSTRACT

Proposals for teaching the concept of integral at high school under orientation towards competency based learning

Tran Cuong and Luu Ba Thang

Faculty of Mathematics and Informatics, Hanoi National University of Education

This paper aims at proposing the materialisation of objectives, options, additions, and content arrangement as well as some suggestions for organizing teaching activities in order to implement the approach of Competency-Based Learning in teaching the concepts of integral for grade 12 in high school. These proposals are based on research of traditional teaching theories, some current international research trends and news with respect to Calculus Education, experience synthesis, conduct of initial surveys and assessment of the situation in some educational institutions. Our work notably focuses on the tendency of using some applications named mini-CAS in Calculus Education in high school.

Keywords: Calculus education, concept of integral, competency based learning, mini-CAS.