

MỘT SỐ VẤN ĐỀ CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP LUẬN VỀ DẠY HỌC PHÉP NHÂN HAI SỐ TỰ NHIÊN CHO HỌC SINH TIỂU HỌC

Nguyễn Thị Hồng Duyên¹ và Nguyễn Phú Lộc²

¹Khoa Sư phạm, Trường Cao đẳng Cộng đồng Sóc Trăng

²Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ

Tóm tắt. Bằng phương pháp nghiên cứu lí luận, chủ yếu là phương pháp nghiên cứu tài liệu, bài báo này trình bày một nghiên cứu tổng quan về hướng tiếp cận Giáo dục Toán thực (Realistic Mathematics Education, viết tắt là RME) và một phân tích tri thức luận đối với khái niệm phép nhân hai số tự nhiên. Trên cơ sở đó, bài báo phân tích và minh họa các ý tưởng dạy học phép nhân hai số tự nhiên cho học sinh tiểu học theo tiếp cận RME. Theo đó, các hoạt động dạy học phép nhân hai số tự nhiên cho học sinh tiểu học được thiết kế theo một tiến trình xác định, và dưới sự hướng dẫn của giáo viên, học sinh có cơ hội trải nghiệm các quá trình toán học hóa để khám phá lại tri thức được dạy – phép nhân hai số tự nhiên. Có thể thấy rằng, các ý tưởng dạy học toán theo quan điểm của RME là hoàn toàn phù hợp với mục tiêu giáo dục môn Toán hiện nay ở Việt Nam. Cùng với nhiều kết quả nghiên cứu về hiệu quả của RME, các kết quả nghiên cứu được trình bày ở bài báo này góp phần giới thiệu một hướng tiếp cận hiệu quả để dạy học môn Toán theo định hướng phát triển năng lực của người học.

Từ khóa: Giáo dục Toán thực, RME, toán học hóa, phép nhân hai số tự nhiên, tiểu học.

1. Mở đầu

Giáo dục Toán thực (Realistic Mathematics Education) là một lý thuyết dạy học toán được đặt nền móng và phát triển từ năm 1971, dựa trên hai quan điểm chính của Freudenthal về toán học: toán học là một hoạt động của con người (mathematics as human activity) và toán học phải được kết nối với thực tế (mathematics must be connected with reality). RME được Freudenthal và các cộng sự của mình phát triển như một nghiên cứu chiến lược nhằm cải thiện chất lượng dạy học toán ở các trường học ở Hà Lan. Hiệu quả mà RME mang lại thể hiện rõ qua những thành tích mà Hà Lan đạt được trong những đánh giá, so sánh quốc tế về Toán (PISA và TIMSS). RME tiếp tục được phát triển ở Mỹ thành cách tiếp cận toán học trong ngữ cảnh (Mathematics in Context, MiC) và MiC tạo ra những học sinh với thành tích học tập ấn tượng. Tiếp đó, MiC và RME lan sang Anh với dự án Making Sense of Maths. Học sinh từ các lớp thuộc dự án có nhiều khả năng để có được câu trả lời chính xác và cũng có nhiều khả năng tiếp cận các câu hỏi theo cách cho thấy học sinh thực sự hiểu vấn đề (Dickinson, P. & Hough, S., 2012) [1]. Ở Châu Á, RME được phát triển mạnh ở Indonesia, với phiên bản Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI). PMRI là một phong trào nhằm cải cách giáo dục toán ở Indonesia trên nền tảng lý thuyết RME. Khởi đầu như một cuộc thử nghiệm nhỏ, đến nay nó đã phát triển thành một phong trào quốc gia. (Sembiring, R., 2010) [2]. Có thể thấy, dạy học toán

Ngày nhận bài: 9/7/2021. Ngày sửa bài: 26/7/2021. Ngày nhận đăng: 16/9/2021.

Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Hồng Duyên. Địa chỉ e-mail: nthduyen@stcc.edu.vn

theo RME là một hướng tiếp cận cho phép học sinh thực sự hiểu toán và phát triển được năng lực toán học.

Nghiên cứu vận dụng RME vào giáo dục toán ở Việt Nam bắt đầu xuất hiện từ năm 2005 bởi Nguyễn Thanh Thủy, nghiên cứu về vấn đề đào tạo sinh viên sư phạm Toán trong việc vận dụng RME vào dạy học (Nguyễn Thanh Thủy, 2005) [3]. Sau đó, các nghiên cứu vận dụng RME vào dạy học được thực hiện như: vận dụng RME vào dạy học hình học phẳng ở lớp 7 (Lê Tuấn Anh, 2007) [4]; vận dụng vận dụng RME vào dạy học hàm số bậc nhất ở lớp 10 (Mai Hoàn Hảo, 2016) [5]. Cho đến nay, lí thuyết RME vẫn đang là đề tài được quan tâm nghiên cứu ở trong nước, như những nghiên cứu nhằm đưa ra những khuyến nghị cho việc nghiên cứu và vận dụng RME ở Việt Nam, gợi ý cho việc nghiên cứu phát triển chương trình giáo dục toán học ở Việt Nam hay các nghiên cứu tìm cách kết hợp các quan điểm của RME và lí thuyết tình huống của Didactic Toán trong thiết kế các kế hoạch dạy học môn Toán (Nguyễn Tiến Trung, 2020) [6];

Với chủ trương một chương trình nhiều bộ sách giáo khoa, chương trình giáo dục phổ thông hiện hành của Việt Nam đã được xây dựng theo hướng mở, tạo điều kiện cho giáo viên phát huy tính chủ động, sáng tạo trong thực hiện chương trình (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018) [7]. Do vậy, trên cơ sở xem xét một số vấn đề cơ sở phương pháp luận về dạy học phép nhân hai số tự nhiên cho học sinh tiểu học, bài báo phân tích, minh họa các ý tưởng dạy học phép nhân hai số tự nhiên cho học sinh tiểu học theo tiếp cận RME. Qua đó, kết quả nghiên cứu góp phần giới thiệu về một xu hướng dạy học hiệu quả đã và đang được một số nước trên thế giới và trong nước quan tâm, góp phần giúp giáo viên thấy rõ ý tưởng cơ bản cần đảm bảo khi dạy học toán nói chung và dạy học phép nhân hai số tự nhiên cho học sinh tiểu học nói riêng.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Phương pháp nghiên cứu

Trong nghiên cứu này, phương pháp nghiên cứu chính là phương pháp nghiên cứu lí luận, và chủ yếu là phương pháp nghiên cứu tài liệu. Hai công việc chính là phân tích tài liệu và tổng hợp tài liệu, chúng tôi tổng quan về lý thuyết RME bằng cách chỉ ra các thuật ngữ cơ bản và các nguyên lý cơ bản của RME và thực hiện một phân tích tri thức luận đối với khái niệm phép nhân hai số tự nhiên. Trên cơ sở khung lý thuyết tham chiếu có được, chúng tôi thiết kế tiến trình dạy học phép nhân hai số tự nhiên theo tiếp cận RME. Đồng thời, chúng tôi phân tích và minh họa các ý tưởng dạy học trong tiến trình đó bởi các hoạt động mà giáo viên có thể tổ chức cho học sinh hoạt động, trải nghiệm các quá trình toán học hóa để chiếm lĩnh tri thức được dạy.

2.2. Kết quả nghiên cứu

2.2.1. Tổng quan về RME (Các thuật ngữ cơ bản và các nguyên lý cơ bản của RME)

*** Các thuật ngữ cơ bản**

Khám phá lại dưới sự hướng dẫn (guided reinvention)

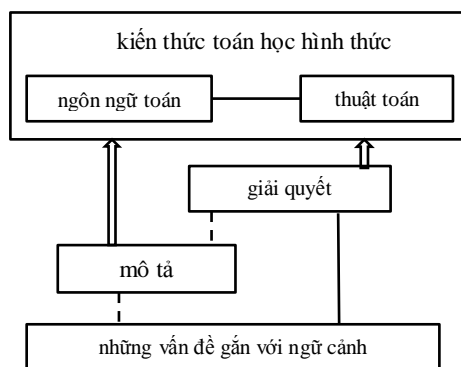
Freudenthal diễn giải: toán học được xem như là một hoạt động và việc học toán nên là quá trình khám phá lại dưới sự hướng dẫn. “Khám phá lại” (reinvention) có nghĩa là người học sẽ khám phá ra một cái gì đó mới đối với bản thân người học. “Dưới sự hướng dẫn”, hay “có hướng dẫn” (guided) chỉ rõ vai trò của giáo viên là hướng dẫn, giúp đỡ học sinh khám phá lại tri thức toán được dạy. Mức độ hướng dẫn nhiều hay ít tùy thuộc vào mỗi trường hợp cụ thể mà người học cần (Freudenthal, 1991) [8] Theo Treffer, việc học sinh khám phá lại tri thức dưới sự hướng dẫn của giáo viên là khả thi, bởi vì tri thức toán học có thể được phát triển từ kiến thức không chính thức của người học (Treffer, 1991a) [9]. Điều này có nghĩa là, bằng cách thực hiện một số hoạt động để giải quyết các vấn đề gắn với ngữ cảnh (context problems), các học sinh có

thể sử dụng kiến thức không chính thức của họ để khám phá lại toán học. Các vấn đề gắn với ngữ cảnh được định nghĩa là “những vấn đề mà tình huống của vấn đề có thực với học sinh” (Gravemeijer, K. & Doorman, M., 1999) [10].

Toán học hóa (mathematization):

Toán học hóa là một quá trình học sinh thực hiện một số hoạt động để giải quyết các vấn đề gắn với ngữ cảnh, qua đó khám phá lại tri thức toán. Kết thúc quá trình toán học hóa, học sinh phải khám phá được một tri thức toán mới – mới với bản thân học sinh.

Tiến trình khám phá lại được Gravemeijer mô tả thành sơ đồ như hình 1 (Gravemeijer, 1994) [11].



Hình 1. Tiến trình khám phá lại (Toán học hóa ngang (- -); Toán học hóa dọc (\Rightarrow))

Trong tiến trình này, quá trình toán học hóa được phân biệt thành hai loại: toán học hóa ngang (horizontal mathematization) và toán học hóa dọc (vertical mathematization). Ý tưởng phân loại này đã được đề xuất bởi Treffers từ năm 1987. Treffers mô tả toán học hóa ngang như “đi từ thế giới sự sống đến thế giới của các biểu tượng”, toán học hóa dọc là “chuyển động trong nội tại thế giới của các biểu tượng” (Marja van den Heuvel-Panhuizen, 2003) [12]. Freudenthal giải thích thêm: thế giới của cuộc sống là những gì được trải nghiệm như thực tế, thế giới biểu tượng liên quan đến sự trừu tượng của nó. Toán học hóa dọc diễn ra khi các biểu tượng được định hình, định hình lại và thao tác trong thế giới của các biểu tượng (Freudenthal, 1991) [8].

Theo đó, có thể hiểu hai quá trình này như sau: Toán học hóa ngang là quá trình người học huy động kinh nghiệm đã có và tri thức toán đã biết của bản thân để mô tả, hoặc phát biểu, hoặc hình dung những vấn đề gắn với ngữ cảnh bằng các biểu tượng. Các biểu tượng có thể thuộc toán học (công thức toán, thuật toán, mô hình toán học...) hoặc không thuộc toán học (hình vẽ, sơ đồ,...). Tùy theo khả năng của người học, các biểu tượng có thể được trình bày ra một cách tường minh (ghi ra, vẽ ra,...) hoặc thậm chí, người học có thể chỉ hình dung, tưởng tượng về các biểu tượng đó. Trên các biểu tượng, người học tiếp tục thực hiện các thao tác toán học (sử dụng tri thức toán đã biết) để đưa ra/tìm ra câu trả lời cho các vấn đề gắn với ngữ cảnh. Quá trình người học thực hiện các thao tác toán học trên các biểu tượng là quá trình toán học hóa dọc.

Freudenthal nhấn mạnh toán học hóa là toán học hóa thực tế, những mảnh của thực tế. Nhiệm vụ của người dạy là lựa chọn các tình huống học tập có trong thực tại của người học và phù hợp để toán học hóa, trước hết là toán học hóa ngang. Để lựa chọn các tình huống học tập trong thực tiễn hiện tại của người học, phù hợp với toán học ngang, ông gợi ý nên tìm kiếm từ các nguồn nguyên thủy. Tuy nhiên, ông cảnh báo rằng, các nguồn nguyên thủy này rất nhiều, các nhà giáo dục toán sẽ khó đưa ra được sự lựa chọn bởi sự đa dạng mà họ tìm thấy. Lúc này, ông cho rằng một cách tiếp cận toàn diện là cần thiết (Freudenthal, 1991) [8]. Gravemeijer thì gợi ý có thể tìm kiếm từ những hiểu biết về lịch sử toán học, lịch sử hình thành và phát triển các tri thức toán học. Điều này có thể giúp người dạy có thể bố trí các bước trung gian, để nhờ đó,

tri thức toán cần dạy có thể được khám phá lại (Gravemeijer, 1999) [13]. Tương đồng với quan điểm này, Didactic Toán có khái niệm “phân tích tri thức luận”. Phân tích tri thức luận là nghiên cứu lịch sử hình thành tri thức nhằm làm rõ nghĩa của tri thức, những bài toán, những vấn đề mà tri thức đó cho phép giải quyết, những trở ngại cho sự hình thành tri thức, những điều kiện sản sinh ra tri thức, những bước nhảy cần thiết trong quan niệm để thúc đẩy quá trình hình thành và phát triển tri thức. Phân tích này là cơ sở cho việc kiến tạo những tình huống dạy học tri thức đó (Lê Thị Hoài Châu, 2017b) [14]. Chúng tôi nhận thấy rằng, phân tích tri thức luận một tri thức trước khi thiết kế tình huống dạy học tri thức đó là một trong những cách tiếp cận toàn diện mà Freudenthal đã đề cập.

Trở lại với phạm vi nghiên cứu là dạy học phép nhân hai số tự nhiên ở tiểu học, theo Freudenthal, khi phép cộng được kết hợp vào thực tế của người học nó có thể đóng vai trò nguồn gốc của phép nhân. Sau một quá trình, tổng các số hạng bằng nhau được nhận ra và giải quyết bằng một phép toán – một tiến trình bắt đầu bằng toán học hóa ngang và kết thúc bằng toán học hóa dọc. 5 lần 8 (vật) có thể được toán học hóa ngang bởi sơ đồ hình chữ nhật 5 dòng, mỗi dòng có 8 vật. Toán học hóa dọc là việc đọc chuỗi 8, 16, 24, 32, 40 (Freudenthal, 1991) [8].

Phép nhân hai số tự nhiên bắt đầu được dạy ở lớp 2. Học sinh bước vào thế giới nhân bằng cách sử dụng các vật cụ thể để thực hiện các tình huống nhóm và chia các vật. Có một vài nền tảng cần thiết để học sinh có thể thực hiện toán học hóa dọc khi học phép nhân hai số tự nhiên: kinh nghiệm về đếm, đếm tới, đếm lùi, đếm nhanh...; nhận biết được lực lượng của một tập; đã có các biểu tượng về số tự nhiên; kinh nghiệm về gấp đôi và giảm một nửa những số nhỏ.

* Các nguyên lý cơ bản của RME

Nguyên lý cơ bản thứ nhất là *khám phá lại có hướng dẫn thông qua toán học hóa lũy tiến* (guided reinvention through progressive mathematization).

Theo nguyên lý này, Gravemeijer cho rằng một *lộ trình học tập dự đoán* (conjectured learning trajectory) phải được vạch ra, có chỉ dẫn, cho phép học sinh trải nghiệm một tiến trình khám phá lại toán học. Gravemeijer cũng chỉ ra rằng *lộ trình học tập dự đoán* nên chú trọng vào sự tự nhiên của quá trình học tập hơn là kết quả (khám phá ra tri thức toán học) (Gravemeijer, 1994) [11]. Để thiết kế được lộ trình học tập như vậy, Gravemeijer đề nghị người dạy nên xuất phát từ những hiểu biết về lịch sử toán học, một tri thức đã được phát triển như thế nào để tìm cách bố trí các bước trung gian mà nhờ đó tri thức toán cần dạy có thể được học sinh khám phá lại. Ngoài ra, người dạy cũng có thể thiết kế lộ trình học tập bằng cách đưa ra một vấn đề gắn với ngữ cảnh mà nó có thể có nhiều giải pháp không chính thức. Các giải pháp này sẽ tiếp tục được toán học hóa thành tri thức toán học (Gravemeijer, 1994, 1997) [11], [15]. Nói cách khác, các vấn đề gắn với ngữ cảnh được đưa vào *lộ trình học tập dự đoán* phải đảm bảo sao cho các câu trả lời (học sinh tìm ra ở cuối mỗi quá trình toán học hóa dọc) có thể được tiến triển dần dần thành một tri thức toán học mới. Sau quá trình giải quyết chuỗi các vấn đề gắn với ngữ cảnh, học sinh tự mình khám phá ra tri thức mới đó (trường hợp lý tưởng) hoặc tri thức mới sẽ được người dạy thông báo, giới thiệu một cách chính thức. Khi đó, tiến trình khám phá lại mới thực sự kết thúc. Như vậy, dưới sự hướng dẫn của giáo viên, học sinh trải nghiệm các quá trình toán học hóa để tích lũy các câu trả lời và dần dần phát triển chúng thành tri thức toán cần khám phá. Vì thế, khi chuyển ngữ tên của nguyên lý cơ bản thứ nhất trong RME, cụm từ “progressive mathematization” được chúng tôi dịch thành “toán học hóa lũy tiến”.

Nguyên lý cơ bản thứ hai là nguyên lý *hiện tượng học didactic* (didactical phenomenology). Nguyên lý này ngụ ý rằng, trong dạy toán, chúng ta nên bắt đầu từ những hiện tượng học mà nó có nghĩa với học sinh. Để đảm bảo nguyên lý này, người dạy phải cung cấp cho học sinh các vấn đề theo ngữ cảnh được lấy từ các hiện tượng có thật và có ý nghĩa đối với học sinh. Marja van den Heuvel-Panhuizen giải thích: nhãn “thật” (real) hoặc “thực tế” (realistic) trong RME không chỉ đề cập đến một vật thể “thực sự” có thật hoặc tình huống “thực

sự” có thật trong môi trường xung quanh mà còn có thể đề cập đến các tình huống có vấn đề mà người học có thể tưởng tượng (bản dịch tiếng Hà Lan của động từ 'tưởng tượng' là 'zich REALISeren'). (Marja van den Heuvel-Panhuizen, 2001) [16]. Theo Gravemeijer, mục tiêu của việc nghiên cứu một hiện tượng học là tìm ra những tình huống có vấn đề mà các cách tiếp cận tình huống cụ thể có thể được khái quát hóa, và tìm ra những tình huống có thể gợi lên các quy trình giải pháp mô hình, các quy trình này có thể lấy làm nền tảng cho toán học hóa đọc. Mục tiêu này bắt nguồn từ sự thật là toán học được phát triển từ việc giải quyết các vấn đề thực tế (Gravemeijer, 1994, 1999) [11], [13].

Nguyên lý cơ bản thứ ba là nguyên lý *các mô hình tự phát triển* (self-developed models, emergent models). Nguyên lý này đóng một vai trò quan trọng trong việc thu hẹp khoảng cách giữa kiến thức không chính thức và kiến thức hình thức. Theo đó, người dạy phải tạo cơ hội cho các học sinh sử dụng và phát triển các mô hình của riêng họ khi họ đang giải quyết các vấn đề ngữ cảnh. Lúc đầu, các học sinh sẽ phát triển một mô hình quen thuộc với họ. Sau quá trình khái quát hóa và chính thức hóa, mô hình dần dần trở thành một mô hình tổng quát để tiệm cận kiến thức hình thức. Gravemeijer gọi quá trình này là sự chuyển đổi từ *mô hình-của* (model of) sang *mô hình-cho* (model for) (Gravemeijer, 1994, 1999) [11], [13]. Sau quá trình chuyển đổi, mô hình có thể được sử dụng làm mô hình cho lý luận toán học (Treffers, 1991a) [9].

2.2.2. Phân tích tri thức luận đối với khái niệm phép nhân hai số tự nhiên

Vì lịch sử hình thành và phát triển các phép tính với số tự nhiên không thể tách rời lịch sử hình thành và phát triển khái niệm số tự nhiên nên chúng tôi trình bày kết quả phân tích tri thức luận đối với cả khái niệm số tự nhiên.

Số tự nhiên nảy sinh từ nhu cầu đếm các đồ vật, đếm để xác định số lượng của các vật trong dãy hoặc là đếm để xác định thứ tự của các vật nằm trong dãy. Cùng với sự phát triển khái niệm số tự nhiên, các phép tính cũng nảy sinh từ nhu cầu tính toán trong các hoạt động kinh tế, tài chính, đo đạc khoảng cách, thời gian, diện tích, thể tích. Theo Từ điển bách khoa phổ thông Toán học, xuất hiện trước tiên là phép cộng và phép trừ, như là phép tính với chính các tập hợp, dưới dạng gom hai tập hợp làm một và lấy ra một phần của một tập hợp. Phép nhân có lẽ xuất hiện từ cách đếm nhiều phần bằng nhau (lấy hai, lấy ba, v.v...), phép chia- chia một tập hợp ra các phần bằng nhau. Số tự nhiên quá quen thuộc và đơn giản đến nỗi trong một thời gian dài, con người không có nhu cầu định nghĩa nó bằng các thuật ngữ, những khái niệm đơn giản hơn nào đó. Mãi cho đến giữa thế kỉ 19, với sự phát triển phương pháp tiên đề trong toán học và nhu cầu xem xét lại, phê phán nền tảng của giải tích toán học, vấn đề cơ sở của khái niệm số tự nhiên mới được đặt ra. Vào những năm 70 của thế kỉ 19, nhà bác học Đức, Cantor định nghĩa khái niệm số tự nhiên dựa trên khái niệm tập hợp. Năm 1889, nhà bác học Ý, Peano định nghĩa khái niệm số tự nhiên dựa trên phân tích hệ thức thứ tự - điều mà có thể tiên đề hóa được, hay còn được gọi là hệ tiên đề Peano về số tự nhiên. (Nikolski, 1997) [17]

Định nghĩa số tự nhiên của Cantor: Mỗi số tự nhiên là bản số của tập hợp hữu hạn, và mỗi tập hợp hữu hạn có bản số là số tự nhiên (Robert R.Stoll, 1963) [18].

Với định nghĩa số tự nhiên như trên, các phép toán cộng và nhân trên số tự nhiên được xác định như sau:

Tổng, $u + v$, của hai bản số u và v là $\text{card}(A \cup B)$, trong đó A và B rời nhau, lần lượt đại diện cho u , v .

Tích, $u \cdot v$, của hai bản số u và v là $\text{card}(A \times B)$, trong đó A và B , lần lượt đại diện cho u , v .

Hệ tiên đề Peano về số tự nhiên (Robert R.Stoll, 1963) [18]

Tập hợp số tự nhiên là một cấu trúc $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ với tập hợp \mathbb{N} có 0 là phần tử và σ là ánh xạ từ \mathbb{N} vào \mathbb{N} thỏa mãn tiên đề Peano:

P1. $0 \in \mathbb{N}$ (phần tử đầu tiên).

P2. Nếu $n \in \mathbb{N}$ thì $\sigma n \in \mathbb{N}$ (phần tử σn được gọi là phần tử kế tiếp của n).

P3. $\sigma n = \sigma m$ thì $n = m$ (hai số tự nhiên không cùng phần tử kế tiếp).

P4. $\sigma n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ (0 không là phần tử kế tiếp của bất kỳ số tự nhiên nào).

P5. Nếu $S \subseteq \mathbb{N}$ thỏa mãn $0 \in S$ và với mọi $n \in S$ dẫn đến $\sigma n \in S$ thì $S = \mathbb{N}$ (P5 khẳng định sự kế tiếp của các bước rời rạc, bắt đầu từ số 0 và liên tục chuyển từ một số sang số liền sau, mang lại tất cả các số tự nhiên).

Trong định nghĩa số tự nhiên, Peano đã xác định được một cấu trúc logic “phần tử kế tiếp”. Chính cấu trúc này đã xác định quan hệ thứ tự và các phép toán trên \mathbb{N} .

Quan hệ thứ tự \leq trong \mathbb{N} : $m \leq n$ nếu $m = n$ hoặc $m < n$; $m < n$ nếu và chỉ nếu $n \in Dm$, trong đó Dm là tập hợp các phần tử sinh ra từ m dưới hàm kế tiếp σ .

Phép toán cộng (+): Với mọi số tự nhiên n và m

$$n + 0 = n$$

$$\sigma m + n = \sigma(m + n)$$

Phép toán nhân (\cdot): Với mọi số tự nhiên n và m

$$0 \cdot n = 0$$

$$\sigma m \cdot n = m \cdot n + n$$

Rõ ràng, phép nhân xác định thông qua phép cộng, phép cộng lặp lại. Chẳng hạn:

$$3 \cdot 2 = \sigma(2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 + 2 = \sigma(1) \cdot 2 + 2 = 1 \cdot 2 + 2 + 2 = \sigma(0) \cdot 2 + 2 + 2 = 0 \cdot 2 + 2 + 2 + 2 = 0 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2.$$

Định nghĩa phép nhân hai số tự nhiên được trình bày trong Từ điển bách khoa phổ thông – Toán học (Nikolski, 1997) [17] như sau:

Phép nhân các số tự nhiên, là phép tính cho phép, ứng với hai số a và b , lập một số thứ ba c bằng tổng b số hạng, mỗi số hạng bằng a , tức là: $ab = a + a + \dots + a$ (b số hạng).

Về tên gọi của các thành phần phép nhân và kí hiệu phép nhân: a, b là các thừa số trong tích ab của chúng. Phép nhân được kí hiệu bằng dấu \times (được nhà bác học Anh Oughtred đưa vào năm 1631) hoặc dấu \cdot (được nhà bác học Đức Leibniz đưa vào năm 1698); với các số được kí hiệu bằng các chữ cái, người ta bỏ các dấu ấy, và viết ab thay vì viết $a \times b$ hay $a \cdot b$.

Ngoài ra, tích ab có thể xem như là diện tích một hình chữ nhật có cạnh là a và b .

2.2.3. Phân tích và minh họa các ý tưởng dạy học phép nhân hai số tự nhiên theo tiếp cận RME

*** Mô tả tiến trình dạy học khái niệm phép nhân hai số tự nhiên theo RME**

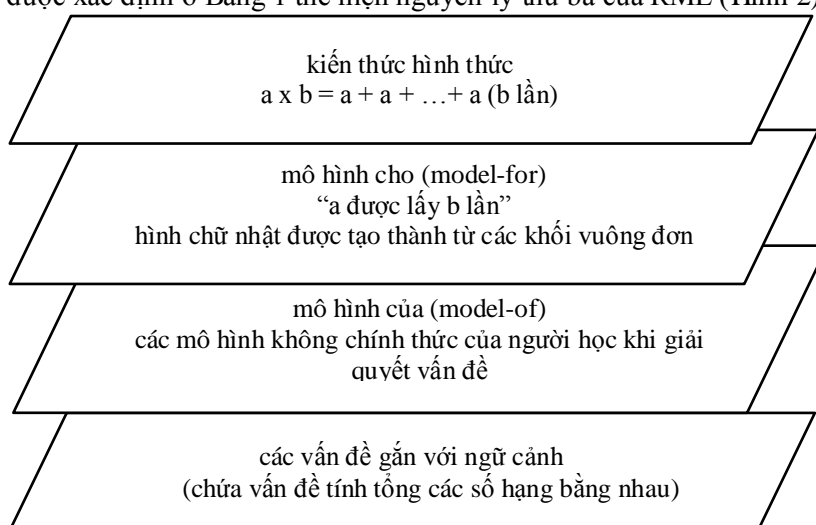
Đối tượng người học: học sinh lớp 2, chưa học phép nhân.

Dựa theo các kết quả nghiên cứu được trình bày ở 2.2.1 và 2.2.2, chúng tôi thiết kế các hoạt động theo một tiến trình xác định (Bảng 1), nhằm tạo điều kiện cho học sinh trải nghiệm các quá trình toán học hóa khi giải quyết các vấn đề gắn với ngữ cảnh “tìm tổng số đối tượng X trong b nhóm, mỗi nhóm có a đối tượng X ”, trong đó a, b là hai số tự nhiên. Các giải pháp mà học sinh có thể huy động để giải quyết các vấn đề này sẽ được phát triển thành giải pháp “cộng lặp lại” (cộng các số hạng bằng nhau), là cơ sở để giáo viên giới thiệu tri thức mới cho học sinh. Bước trung gian trong tiến trình này là học sinh nhận ra được mối quan hệ giữa hành động “ a được lấy b lần” với phép tính “ $a + a + \dots + a$ ” (b lần). Từ đó, giáo viên mới giới thiệu $a \times b$ là phép toán mới, là “ a được cộng b lần”. Ngoài ra, tiến trình cũng nhằm hình thành cho học sinh được mô hình tổng quát cho phép nhân hai số tự nhiên, mỗi mô hình hình chữ nhật tạo bởi các khối vuông đơn vị tương ứng với một phép nhân hai số tự nhiên, qua đó học sinh nắm vững tri thức: $a \times b = a + a + \dots + a$ (b lần).

Bảng 1. Tiến trình dạy học phép nhân hai số tự nhiên theo RME

Stt	Hoạt động	Mục tiêu
1	HS giải quyết các vấn đề gắn với ngữ cảnh.	Thông qua quá trình toán học hóa, HS nhận ra: - Mỗi quan hệ giữa hành động “a được lấy b lần” với phép tính “ $a + a + \dots + a$ ” (b lần); - Tri thức được dạy: trong những ngữ cảnh “có b nhóm đối tượng X, trong mỗi nhóm có a đối tượng X”, để tìm tổng số đối tượng X, ta cộng các số a lại b lần.
2	GV giới thiệu khái niệm phép nhân hai số tự nhiên, kí hiệu dấu nhân.	HS biết được $a \times b$ là phép toán mới, được viết gọn từ phép toán $a + a + \dots + a$ (b lần) (“a được lấy b lần”)
3	GV giới thiệu mô hình hình chữ nhật tạo bởi các khối vuông đơn vị (mỗi mô hình hình chữ nhật tương ứng với một phép nhân hai số tự nhiên)	Xây dựng cho HS một mô hình tổng quát để HS nắm vững tri thức: $a \times b = a + a + \dots + a$ (b lần)
4	HS tạo hình chữ nhật từ các khối vuông đơn vị. Viết phép nhân tương ứng (HS thao tác trên các khối vuông đơn vị để lập bảng nhân: bảng nhân 2, bảng nhân 3, bảng nhân 4 và bảng nhân 5).	
5	HS xác định/biểu diễn hình chữ nhật ứng với phép nhân cho trước	
6	Đếm thêm n	
7	Giải quyết vấn đề liên quan đến ý nghĩa phép nhân, kĩ năng thực hành phép nhân trong các tình huống thực tiễn	Tiếp tục củng cố để HS hiểu rõ khái niệm phép nhân hai số tự nhiên và vận dụng vào giải quyết các vấn đề gắn với ngữ cảnh.

Tiến trình được xác định ở Bảng 1 thể hiện nguyên lý thứ ba của RME (Hình 2).



Hình 2. Nguyên lý các mô hình tự phát triển trong dạy học khái niệm phép nhân

Một số vấn đề cơ sở phương pháp luận về dạy phép nhân hai số tự nhiên cho học sinh tiểu học

*** Minh họa và phân tích một số hoạt động cụ thể theo tiến trình dạy học khái niệm phép nhân hai số tự nhiên theo cách tiếp cận RME ở Bảng 1**

Hoạt động 1: (Giải quyết vấn đề ngữ cảnh) Chuẩn bị các túi quà theo yêu cầu.

Nhiệm vụ 1: Chuẩn bị 03 túi bánh. Mỗi túi có 02 cái bánh. – làm việc nhóm

Nhiệm vụ 2: Chuẩn bị 5 túi kẹo. Mỗi túi có 4 cái kẹo – làm việc nhóm

Nhiệm vụ 3: Hoàn thành 02 phiếu học tập 1 và 2 – làm việc cá nhân

Mô tả: Mỗi nhóm thảo luận và cử đại diện nhóm lên lấy bánh/kẹo sao cho có đủ bánh/kẹo cho vào số túi quà theo yêu cầu.

Luật chơi: Mỗi nhóm chỉ có 01 lượt lên lấy bánh. Nhóm nào hoàn thành được đủ số túi quà đạt yêu cầu nhanh nhất, số bánh/kẹo bị thừa (nếu có) ít nhất thì thắng.

Phân tích: Với quy định thắng cuộc là nhóm hoàn thành nhanh nhất, số bánh/kẹo bị thừa ít nhất và vì chỉ có 01 lượt lên lấy bánh/kẹo duy nhất nên buộc mỗi nhóm phải thảo luận để ra tìm ra cách lấy bánh/kẹo nhanh và đủ. Chúng tôi dự kiến, học sinh có thể thực hiện những giải pháp sau để tìm số bánh cần lấy.

S1: Vẽ tượng trưng các túi quà, mỗi túi có 2 cái bánh ra giấy, chẳng hạn: hình chữ nhật tương trưng cho túi quà, vòng tròn tượng trưng cho cái bánh, rồi đếm hoặc cộng lại; hoặc vẽ mỗi hình tròn tượng trưng cho một túi quà, và viết số 2 vào tương trưng cho 2 cái bánh, rồi cộng 3 số 2 đó lại.

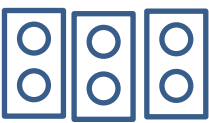
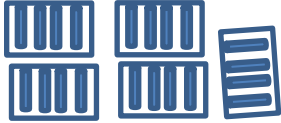
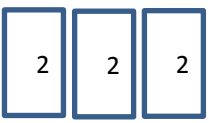
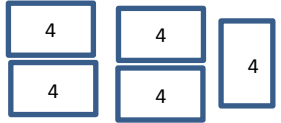
S2: Học sinh đếm thêm 2 (2, 4, 6).

S3: Học sinh viết ba số 2 ra rồi cộng.

Tương tự như vậy với nhiệm vụ 2.

Chúng ta thấy quá trình mô tả lại vấn đề bằng hình ảnh (vẽ ra hoặc thậm chí, có thể hình dung trong đầu) hoặc bằng một dãy số, một phép tính là quá trình toán học hóa ngang, đếm, cộng là quá trình toán học hóa dọc.

Bảng 2. Minh họa các quá trình toán học hóa có thể xảy ra khi học sinh giải quyết nhiệm vụ 1 và 2

Toán học hóa ngang		Nhiệm vụ 1	Nhiệm vụ 2	Toán học hóa dọc
Mô tả lại vấn đề bằng:	hình vẽ			Đếm
				Đếm thêm Cộng
	dãy số tới	2, 4, 6	4, 8, 12, 16, 20	Đếm thêm
	phép tính	$2 + 2 + 2$	$4 + 4 + 4 + 4 + 4$	Cộng

Phiếu học tập 1 và 2 trong hoạt động 1 được thiết kế như Hình 2. Hai phiếu này giúp học sinh khái quát lại, hình dung lại quá trình hoạt động ở nhiệm vụ 1 và 2; đồng thời giúp học sinh nhận ra mối quan hệ giữa hành động “a được lấy b lần” với phép tính “ $a + a + \dots + a$ (b lần)”.





PHIẾU HỌC TẬP 1 Tên: Lớp: Điền số thích hợp vào ô trống Có <input type="text"/> túi. Mỗi túi có <input type="text"/> cái bánh. $\square + \square + \square = \square$ Số <input type="text"/> được cộng <input type="text"/> lần = <input type="text"/> Có tất cả <input type="text"/> cái bánh.	PHIẾU HỌC TẬP 2 Tên: Lớp: Điền số thích hợp vào ô trống Có <input type="text"/> túi. Mỗi túi có <input type="text"/> cái kẹo. $\square + \square + \square + \square + \square = \square$ Số <input type="text"/> được cộng <input type="text"/> lần = <input type="text"/> Có tất cả <input type="text"/> cái kẹo.
---	---

Hình 2. Phiếu học tập 1 và 2 trong hoạt động 1

Phiếu học tập 1 và 2 là bước đệm để học sinh dễ dàng hiểu được khái niệm phép nhân hai số tự nhiên mà giáo viên sẽ giới thiệu ở hoạt động 2.

Hoạt động 2: Giới thiệu phép nhân hai số tự nhiên




Giáo viên giới thiệu cho học sinh khái niệm phép nhân hai số tự nhiên, thừa số và tích, dấu nhân. Nhấn mạnh “a được cộng b lần” được viết lại thành phép toán mới, $a \times b$. Chú ý: a, b là hai số tự nhiên cụ thể, lấy ví dụ bằng cách quay trở lại các phép nhân xuất hiện trong các hoạt động 1, 2. Sau khi giới thiệu, ở hoạt động này, học sinh tiếp tục làm việc cá nhân trên các phiếu học tập 3 (Hình 3) và phiếu học tập 4 (Hình 4).

PHIẾU HỌC TẬP 3 Tên: Lớp: Quan sát hình và điền số thích hợp vào ô trống  <input type="text"/> được lấy <input type="text"/> lần $\square + \square = \square$ $\square \times \square = \square$  <input type="text"/> được lấy <input type="text"/> lần $\square + \square + \square = \square$ $\square \times \square = \square$	 <input type="text"/> được lấy <input type="text"/> lần $\square + \square + \square = \square$ $\square \times \square = \square$  <input type="text"/> được lấy <input type="text"/> lần $\square + \square + \square = \square$ $\square \times \square = \square$
---	--

Hình 3. Phiếu học tập 3 trong hoạt động 2

Học sinh thực hiện tốt phiếu học tập 3, tức là HS biết chuyển ngữ cảnh “a được lấy b lần” trong hình vẽ thành hai phép toán: phép cộng b lần số a; phép nhân $a \times b$.

Phiếu học tập 4 đối với học sinh vừa học xong là đề khảo sát ở mức độ khó, phiếu gồm 3 hình vẽ nhưng có đến 6 phép nhân để lựa ra 3 phép nhân đúng với 3 hình đó, giúp học sinh hiểu rõ hơn tri thức được dạy.

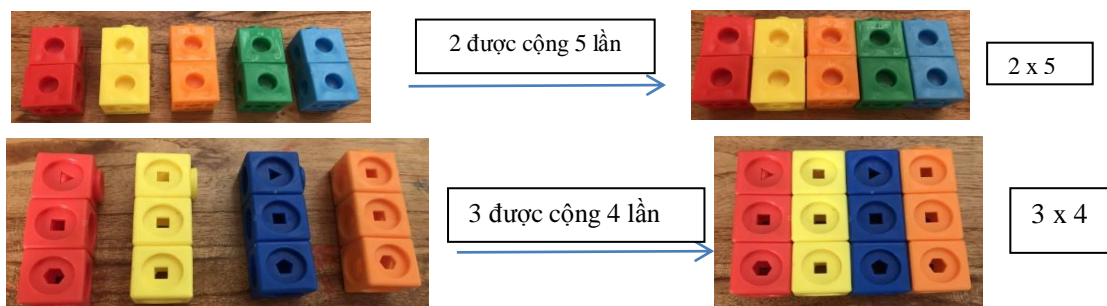
PHIẾU HỌC TẬP 4 Tên: Lớp: Nối phép nhân thích hợp với hình vẽ.   	<input type="text" value="3 x 6"/> <input type="text" value="6 x 3"/> <input type="text" value="5 x 4"/> <input type="text" value="4 x 5"/> <input type="text" value="4 x 2"/> <input type="text" value="2 x 4"/>
--	--

Hình 4. Phiếu học tập 4 trong hoạt động 2

Một số vấn đề cơ sở phương pháp luận về dạy phép nhân hai số tự nhiên cho học sinh tiểu học

Hoạt động 3: Giáo viên giới thiệu mô hình hình chữ nhật tạo bởi các khối vuông đơn vị, mỗi mô hình hình chữ nhật tương ứng với một phép nhân hai số tự nhiên

Giáo viên sử dụng các khối vuông đơn vị (math-link cubes) để thao tác cho cả lớp quan sát. Chẳng hạn, Hình 5 là một vài mô hình hình chữ nhật cho phép nhân hai số tự nhiên minh họa cho hoạt động 3.

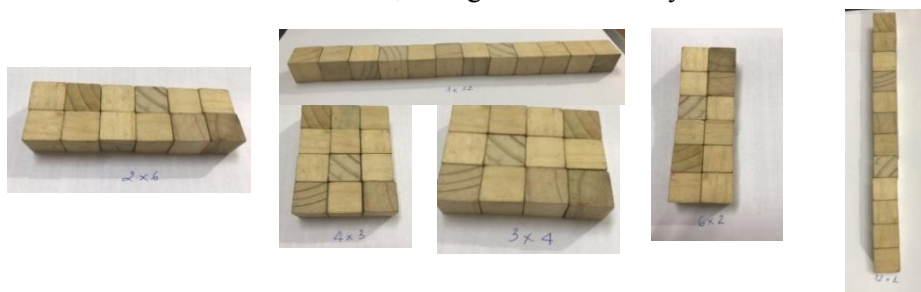


Hình 5. Các hình ảnh minh họa cho hoạt động 3

Hoạt động 4: Học sinh tạo hình chữ nhật từ các khối vuông đơn vị và viết các phép nhân tương ứng.

Hình thức: Học sinh làm việc cá nhân hoặc theo nhóm, thao tác trên các khối vuông đơn vị.

Phân tích: Tùy theo số khối vuông đơn vị phát cho học sinh mà có thể có các hình chữ nhật được tạo thành. Chẳng hạn, nếu phát mỗi nhóm 12 khối vuông thì sản phẩm của cá nhân học sinh hoặc của nhóm có thể là các hình chữ nhật trong Hình 6 dưới đây.



Hình 6. Một số hình ảnh minh họa cho hoạt động 4

Khi học sinh đã quen với mô hình hình chữ nhật cho phép nhân hai số tự nhiên, giáo viên có thể cho học sinh làm việc cá nhân hoặc làm việc nhóm để tự lập các bảng nhân.

Hoạt động 5: Xác định/ biểu diễn hình chữ nhật ứng với phép nhân cho trước

Hình thức tổ chức hoạt động này có thể là: học sinh làm việc cá nhân hoặc theo nhóm để tạo các hình chữ nhật tương ứng với phép nhân cho trước. Khi đó, vật liệu là các khối vuông đơn vị. Một hình thức khác là học sinh tô màu hình chữ nhật ứng với phép nhân cho trước. Vật liệu chuẩn bị là các Giấy kẻ ô vuông đơn vị, bút chì màu. Hình 7 minh họa cho một sản phẩm có thể của học sinh với các phép nhân cho trước là

- 3 x 2 (hình chữ nhật màu đỏ),
- 2 x 2 (hình chữ nhật/hình vuông màu vàng),
- 3 x 4 (hình chữ nhật xanh lá),
- 2 x 5 (hình chữ nhật xanh dương),
- và 3 x 5 (hình chữ nhật màu cam).



Hình 7. Sản phẩm minh họa ở hoạt động 5

Hoạt động 6: Đếm thêm n

Hình thức: làm việc cá nhân trên phiếu học tập với yêu cầu đếm thêm n rồi điền số vào ô trống (như Hình 8); hoặc giáo viên có thể tổ chức thành một trò chơi tập thể để cả lớp cùng tham gia. Chẳng hạn, với đếm thêm 2, học sinh đầu tiên đứng lên sẽ nói số 2, học sinh tiếp theo đứng lên sẽ nói số 4, cứ thế đến hết lớp. Tương tự với đếm thêm 3, thêm 4, thêm 5.

4	8	12				32			44								80
---	---	----	--	--	--	----	--	--	----	--	--	--	--	--	--	--	----

Hình 8. Đếm thêm 4 rồi viết số thích hợp vào ô trống

Hoạt động 7: Giải quyết vấn đề liên quan đến ý nghĩa phép nhân, kỹ năng thực hành phép nhân trong các tình huống thực tiễn

Chẳng hạn, một bài toán thuộc hoạt động này là: “Hãy cho biết lớp học có bao nhiêu học sinh nếu biết: lớp có 9 nhóm, mỗi nhóm có 3 học sinh”. Ngoài ra, với hoạt động này, giáo viên có thể sử dụng các câu hỏi như Hình 9, Hình 10.



Hình 9. Một câu hỏi thuộc hoạt động 7

Hình 9 là hình chụp một slide trình chiếu được thiết kế trong phần mềm soạn giảng Microsoft Powerpoint. Trả lời câu hỏi ở Hình 8 tức là học sinh đã giải quyết vấn đề ngữ cảnh bằng cách sử dụng hai phép nhân (4x6 và 5x7) và một phép so sánh hai số tự nhiên (so sánh 24 và 35).



Hình 10. Một câu hỏi thuộc hoạt động 7

Hình 10 là ảnh chụp một slide trình chiếu được thiết kế trong phần mềm soạn giảng Microsoft Powerpoint. Trả lời câu hỏi ở Hình 9, tức là học sinh đã giải quyết vấn đề ngữ cảnh bằng cách đếm số lần cộng một số lượng bằng nhau.

3. Kết luận

Quan điểm dạy học Toán của RME là quan điểm dạy học tích cực, bởi người học học thông qua khám phá lại tri thức, điều đó có thể thú vị và gây hứng thú cho người học. Và chỉ khi tri thức được chiếm lĩnh bởi hoạt động của tự cá nhân người học thì tri thức đó mới có thể trở thành kiến thức và năng lực của người học. Bên cạnh đó, phân tích tri thức luận một tri thức toán là một nghiên cứu không thể bỏ qua trước khi nghiên cứu, xem xét, cũng như thiết kế các hoạt động dạy học tri thức toán đó.

Ở nghiên cứu này, bằng cách vận dụng quan điểm dạy học toán của lý thuyết RME, kết hợp với kết quả phân tích tri thức luận đối với khái niệm phép nhân hai số tự nhiên, chúng tôi đã xác định được tiến trình dạy học khái niệm phép nhân sao cho học sinh có cơ hội trải nghiệm các quá trình toán học hóa để khám phá lại tri thức toán học.

Theo tiến trình được xác định với 7 hoạt động, học sinh sẽ giải quyết các vấn đề ngữ cảnh, dưới sự hướng dẫn của giáo viên như giới thiệu khái niệm, xây dựng mô hình tổng quát cho học sinh, các quá trình toán học hóa, quá trình chuyển đổi từ mô hình cụ thể sang mô hình tổng quát diễn ra ở mỗi học sinh. Qua đó, học sinh tái khám phá lại tri thức toán học được dạy – phép nhân hai số tự nhiên.

Các kết quả nghiên cứu của bài báo này góp phần giới thiệu RME để giáo viên có thể tiếp cận và vận dụng RME vào dạy học môn toán theo định hướng phát triển năng lực của người học.

Hướng tiếp theo là chúng tôi sẽ triển khai thực nghiệm tiến trình này, đánh giá mức độ khả thi, hiệu quả của tiến trình thông qua quan sát lớp học và xem xét các quá trình toán học hóa đã diễn ra như thế nào, mức độ tham gia của học sinh trong các quá trình đó, cũng như vai trò của giáo viên trong việc hướng dẫn học sinh tái khám phá tri thức toán được dạy.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Dickinson, P. & Hough, S., 2012. Using Realistic Mathematics Education in UK classrooms. *Centre for Mathematics Education*.
- [2] Sembiring, R., 2010. Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI): Perkembangan dan Tantangannya. *IndoMS. J.M.E*, Vol. 1, No. 1, pp. 11-16.
- [3] Thuy, N.T., 2005. *Learning to teach Realistic mathematics in Vietnam*. University of Amsterdam.
- [4] Anh, L.T., 2007. *Apply Realistic Mathematics Education in Vietnam: Teaching middle school geometry*. University of Postdam.
- [5] Hao, M.H., 2016. Dạy học hàm số bậc nhất theo RME. Luận văn Thạc sĩ. Đại học Cần Thơ.
- [6] Tien-Trung, N. & Tinh, P.T., 2020. Giáo dục Toán thực (Realistic Mathematics Education): một số nghiên cứu lí luận và gợi ý cho việc nghiên cứu phát triển chương trình giáo dục toán học ở Việt Nam. *HNUE Journal of Science*, Educational Science, Vol. 65, issue 4, pp.130-145.
- [7] Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam, 2018. Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể.
- [8] Freudenthal, H., 1991. *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.
- [9] Treffers, A. (1991a). *Didactical background of a mathematics program for Primary Education*. In Leen Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary Schools*. Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

- [10] Gravemeijer, K. & Doorman, M., 1999. Context problems in Realistic Mathematics Education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.
- [11] Gravemeijer, K., 1994. *Developing realistic mathematics education*. The Netherlands, Utrecht: Freudenthal Institute.
- [12] Van den Heuvel-Panhuizen, M., 2003. The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.
- [13] Gravemeijer, K., 1999. *Developmental research: Fostering a dialectic relation between theory and practice*. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practice in Arithmetic Teaching*. London: Open University Press.
- [14] Lê Thị Hoài Châu., 2017b. *Sự cần thiết của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu về hoạt động dạy học và đào tạo giáo viên*. Kỷ yếu Hội thảo Quốc tế lần thứ 6 về Didactic Toán, tr.17-41. NXB ĐHSP TP HCM.
- [15] Gravemeijer, K., 1997. *Instructional design for reform in mathematics education*. In M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer, & E.C.D.M. van Lieshout (Eds.), *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- [16] Van den Heuvel-Panhuizen, M., 2001. *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*, Utrecht: Utrecht University.
- [17] Nikolski, S., 1997. *Từ điển Bách khoa phổ thông - Toán học*. Nga: NXB Đại từ điển bách khoa Nga (Bản dịch của Hoàng Quý - Nguyễn Văn Ban - Hoàng Chúng - Trần Văn Hạo - Lê Thị Thiên Hương, 2010. TP Hồ Chí Minh: NXB Giáo dục VN).
- [18] Robert, S., 1963. *Set theory and logic*. Inc. New York: Dover Publications.

ABSTRACT

Some fundamental methodological issues relating to teaching the multiplication of two natural numbers to primary students

Nguyen Thi Hong Duyen¹ and Nguyen Phu Loc²

¹*School of Education, Soc Trang Community College*

²*School of Education, Can Tho University*

The article shows an overview of Realistic Mathematics Education (RME) and an epistemological analysis of the multiplication of two natural numbers. These results of the study could be considered as fundamental methodological issues relating to teaching the multiplication of two natural numbers to primary students. This is theoretical research. Based on the theoretical framework, we proposed a process of teaching the multiplication of two natural numbers to primary students according to RME. Furthermore, we analyzed and illustrated the process with particular learning activities. Throughout doing these learning activities, under the teacher's guidance, students will have opportunities to experience mathematizing processes to reinvent mathematics - the multiplication of two natural numbers. It can be seen that the idea of teaching mathematics under the RME perspective is consistent with the current goal of mathematics education in Vietnam. We hope that this article will contribute to introducing an effective approach for teaching mathematics in the orientation of developing learners' competency.

Keywords: Realistic Mathematics Education, RME, mathematization, multiplication of two natural numbers, primary.