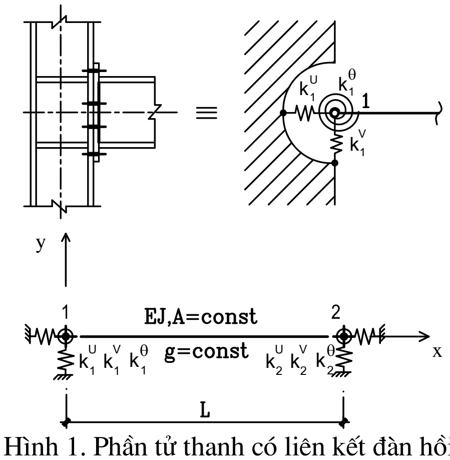
XÂY DỰNG MA TRẬN KHỐI LƯỢNG TƯƠNG ĐƯƠNG PHẦN TỬ THANH LIÊN KẾT ĐÀN HỒI CÓ KHỐI LƯỢNG PHÂN BỐ

THS. NGUYỄN HỒNG SƠN - *Đại học Kiến trúc*
PGS.TS. VŨ THÀNH HẢI - *Đại học Thuỷ lợi*

Tóm tắt: *Khi phân tích kết cấu chịu tải trọng động cần thiết phải xác định ma trận khối lượng. Phương pháp đơn giản nhất để xác định ma trận khối lượng là đưa khối lượng phân bố về khối lượng tập trung ở một số điểm nút có chuyển vị thẳng được xác định và sự phân phối khối lượng vào các nút này bằng phương pháp phân lực trong tĩnh học. Trong bài báo này tác giả trình bày một phương pháp xác đinh ma trận khối lượng tương đương của phần tử dầm hai đầu liên nửa cứng có khối lượng phân bố dựa trên các hàm dạng của phần tử. Ưu điểm của phương pháp khối lượng tương đương này là làm giảm được số phần tử trong hệ nhiều bậc tự do và làm tăng độ chính xác của lời giải.*

1. Mở đầu

Liên kết nửa cứng trong kết cấu thép có ý nghĩa thực tiễn, các nghiên cứu về ứng sử của loại kết cấu này đối với tải trọng động còn hạn chế, mới chỉ xét bài toán phân tích kết cấu thanh liên kết nửa cứng được mô phỏng bằng một lò xo cho chuyển vị góc, có khối lượng tập trung, trường hợp khối lượng phân bố được đưa gần đúng về một số khối lượng tập trung theo quy tắc phân lực song song.



Hình 1. Phần tử thanh có liên kết đàn hồi.

Trong thực tế thường gặp kết cấu hệ thanh liên kết nửa cứng có khối lượng phân bố, cho nên ngoài ma trận độ cứng còn cần thiết phải xây dựng ma trận khối lượng [1]. Trong bài báo này tác giả đề xuất một cách xác định ma trận khối lượng tương đương của phần tử thanh [5] hai đầu liên kết đàn hồi với mô hình ba lò xo [2], hình 1.

2. Ma trận khối lượng tương đương phần tử thanh hai đầu liên kết đàn hồi

2.1. Ma trận khối lượng $\bar{\mathbf{M}}_e^*$ của phần tử thanh có liên kết đàn hồi

Ma trận khối lượng $\bar{\mathbf{M}}_e^*$ của phần tử thanh có liên kết đàn hồi tuyến tính có dạng:

$$\bar{\mathbf{M}}_e^* = [\overline{m}_{ij}^*] \text{ với i, j = } 1 \div 6 \qquad (1)$$

trong đó $\overline{m}_{ij}^*$ (i,j =1÷6) là các phần tử của ma trận khối lượng được xác định theo công thức [3]:

$$\overline{m}_{ij}^* = \int_0^L m(x) v_i(x) v_j(x) dx \qquad (2)$$

trong đó m(x) là khối lượng phân bố trên một đơn vị dài; $v_i(x)$ là hàm dạng của phần tử thanh có liên kết đàn hồi. Sau khi thực hiện phép tính tích phân phương trình (2), ta được các phần tử của ma trận khối lượng tương đương $\bar{\mathbf{M}}_e^*$.

2.2. Hàm dạng của phần tử thanh có liên kết đàn hồi

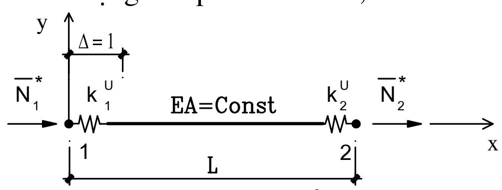
Xét phần tử thanh chiều dài là L, có khối lượng phân bố đều m, liên kết đàn hồi ở hai đầu được mô tả bằng ba lò xo trong mặt phẳng (x,y) (hình 1), phương trình hàm dạng được thiết lập bằng phương pháp chuyển vị đơn vị [4].

a) Hàm dạng theo phương dọc trục thanh.

Phương trình biến dạng dọc v(x) của phần tử thanh có dạng tổng quát:

$$v(x) = a_1 + a_2 x \quad (3)$$

trong đó a_1 và a_2 là các hệ số xác định từ điều kiện chuyển vị ở hai đầu thanh với chuyển vị bằng đơn vị thì phương trình (3) là hàm dạng của phần tử thanh, hình 2.



Hình 2. Điều kiện chuyển vị dọc trục ở hai đầu phần tử.

Cho đầu 1 chuyển vị bằng đơn vị, ta có:

$$v_{(x=0)} = 1 - k_1^u \bar{N}^*$$

$$v_{(x=L)} = k_2^u \bar{N}^* \quad (4)$$

Sau khi thay điều kiện biên (4) vào công thức (3), ta xác định được hàm dạng phần tử thanh có hai đầu liên kết đàn hồi $v_1(x)$.

$$v_1(x) = 1 - k_1^u \bar{k}_{11}^* - \frac{1-(k_1^u + k_2^u)\bar{k}_{11}^*}{L} x \quad (5)$$

Tương tự, với đầu 2 ta có:

$$v_4(x) = k_1^u \bar{k}_{44}^* + \frac{1-(k_1^u + k_2^u)\bar{k}_{44}^*}{L} x \quad (6)$$

trong đó: k_1^u, k_2^u - độ mềm lò xo chống chuyển vị dọc trục thanh;

$\bar{k}_{11}^*$, $\bar{k}_{44}^*$ - các phần tử của ma trận độ cứng $\bar{\mathbf{K}}_e^*$ của thanh hai đầu liên kết đàn hồi trong hệ toạ độ địa phương.

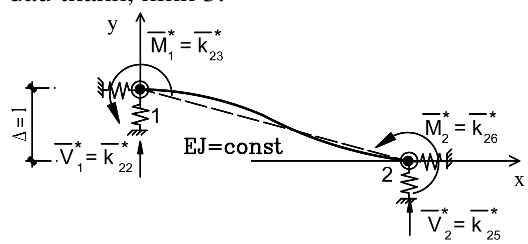
b) Hàm dạng theo phương vuông góc trục thanh

Phương trình biến dạng của phần tử theo phương vuông góc trục thanh là v(x), bao gồm thành phần do mômen uốn M và do lực cắt Q có dạng sau:

$$v(x) = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6\left(x^3 - \frac{6\mu EJ}{GA} x\right) \quad (7)$$

$$v'(x) = a_4 + 2a_5 x + 3a_6 x^2 \quad (8)$$

Lưu ý rằng, khi lấy đạo hàm bậc nhất phương trình (7), đã bỏ qua thành phần biến dạng do lực cắt Q [6]. Các hệ số a_i (i=3÷6) được xác định từ điều kiện chuyển vị tại hai đầu thanh, hình 3.



Hình 3. Biến dạng của thanh do chuyển vị thẳng bằng đơn vị ở đầu 1

Cho đầu 1 chuyển vị thẳng bằng đơn vị, ta có:

$$v_{(x=0)} = 1 - k_1^v \bar{V}_1^*,$$

$$v'_{(x=0)} = -k_1^\theta \bar{M}_1^*,$$

$$v_{(x=L)} = k_2^v \bar{V}_2^*,$$

$$v'_{(x=L)} = -k_2^\theta \bar{M}_2^* \quad (9)$$

phương trình hàm dạng $v_2(x)$ của phần tử thanh hai đầu liên kết đàn hồi tuyến tính.

$$v_2(x) = 1 - k_1^v \bar{k}_{22}^* - k_1^\theta \bar{k}_{23}^* x + \left(\frac{k_1^\theta \bar{k}_{23}^* - k_2^\theta \bar{k}_{26}^*}{2L} - \frac{6-3L(k_1^\theta \bar{k}_{23}^* + k_2^\theta \bar{k}_{26}^*)}{2L^2(1+\Phi)} + \frac{k_1^v \bar{k}_{22}^* + k_2^v \bar{k}_{25}^*}{4iL(1+\Phi)}\right) x^2 +$$

$$+\left(\frac{2 - L(k_1^\theta \bar{k}_{23}^* + k_2^\theta \bar{k}_{26}^*)}{L^3(1+\Phi)} - \frac{k_1^v \bar{k}_{22}^* + k_2^v \bar{k}_{25}^*}{6iL^2(1+\Phi)}\right)(x^3 - 0{,}5\Phi x) \quad (10)$$

Bằng cách tương tự, ta có hàm dạng $v_3(x)$, $v_5(x)$ và $v_6(x)$:

$$v_3(x) = -k_1^v \bar{k}_{32}^* + (1 - k_1^\theta \bar{k}_{33}^*)x + \left(\frac{k_1^\theta \bar{k}_{33}^* - k_2^\theta \bar{k}_{36}^* - 1}{2L} - \frac{3(1 - k_1^\theta \bar{k}_{33}^* - k_2^\theta \bar{k}_{36}^*)}{2L(1+\Phi)} + \frac{k_1^v \bar{a}_{32}^* + k_2^v \bar{a}_{35}^*}{4iL(1+\Phi)}\right) x^2 +$$

$$+\left(\frac{1-k_1^{\theta}\bar{k}_{33}^{*}-k_2^{\theta}\bar{k}_{36}^{*}}{L^2(1+\Phi)}-\frac{k_1^{v}\bar{k}_{32}^{*}+k_2^{v}\bar{k}_{35}^{*}}{6iL^2(1+\Phi)}\right)(x^3-0,5\Phi x),$$

$$v_5(x)=k_1^{v}\bar{k}_{52}^{*}-k_1^{\theta}\bar{k}_{53}^{*}x+\left(\frac{k_1^{\theta}\bar{k}_{53}^{*}-k_2^{\theta}\bar{k}_{56}^{*}}{2L}-\frac{6+3L(k_1^{\theta}\bar{k}_{53}^{*}+k_2^{\theta}\bar{k}_{56}^{*})}{2L^2(1+\Phi)}-\frac{k_1^{v}\bar{k}_{52}^{*}+k_2^{v}\bar{k}_{55}^{*}}{4iL(1+\Phi)}\right)x^2-$$

$$+\left(\frac{2+L(k_1^{\theta}\bar{k}_{53}^{*}+k_1^{\theta}\bar{k}_{56}^{*})}{L^3(1+\Phi)}+\frac{k_1^{v}\bar{k}_{52}^{*}+k_2^{v}\bar{k}_{55}^{*}}{6iL^2(1+\Phi)}\right)(x^3-0,5\Phi x)$$

$$v_6(x)=k_1^{v}\bar{k}_{62}^{*}-k_1^{\theta}\bar{k}_{63}^{*}x+\left(\frac{k_1^{\theta}\bar{k}_{63}^{*}-k_2^{\theta}\bar{k}_{66}^{*}+1}{2L}-\frac{3(1-k_1^{\theta}\bar{k}_{63}^{*}-k_2^{\theta}\bar{k}_{66}^{*})}{2L(1+\Phi)}-\frac{k_1^{v}\bar{k}_{62}^{*}+k_2^{v}\bar{k}_{65}^{*}}{4iL(1+\Phi)}\right)x^2+$$

$$+\left(\frac{1-k_1^{\theta}\bar{k}_{63}^{*}-k_2^{\theta}\bar{k}_{66}^{*}}{L^2(1+\Phi)}+\frac{k_1^{v}\bar{k}_{62}^{*}+k_2^{v}\bar{k}_{65}^{*}}{6iL^2(1+\Phi)}\right)(x^3-0,5\Phi x). \quad (11)$$

trong đó $\bar{k}_{ij}^{*}$ (i,j = 2, 3, 5, 6) là các phần tử của ma trận độ cứng $\bar{\mathbf{K}}_e^{*}$ của phần tử thanh có liên kết đàn hồi ba lò xo [2].

3. Ví dụ bằng số

Xác định ma trận khối lượng tương đương và chu kỳ dao động riêng đầu tiên của dầm đơn mặt cắt đều, thanh có chiều dài L=4m, hai đầu liên kết đàn hồi có độ mềm chống xoay $k^{(\theta)}=5,0.10^{-3}$rad/kN. tiết diện chữ I có diện tích $A=1,2.10^{-3}m^2$, mômen quán tính $J=1,98.10^{-6}m^4$, vật liệu thép có trọng lượng riêng $g=7,85T/m^3$, $E=2,1.10^8kN/m^2$, $\upsilon=0,3$.

Kết quả tính toán cho ở bảng 1.

Bảng 1. Ma trận khối lượng tương đương $\bar{\mathbf{M}}_e^{*}$ và chu kỳ dao động riêng của dầm

Giá trị	1. Thanh liên kết ngàm ở hai đầu $k^{(\theta)}=k^{(u)}=k^{(v)}=0$,			2. Thanh liên kết đàn hồi ở hai đầu $k^{(u)}=k^{(v)}=0$, $k^{(\theta)}=5,0.10^{-3}$rad/kNm		
$\bar{\mathbf{M}}_e^{*}$	Bỏ qua Q	Kể đến Q	Chênh(%)	Bỏ qua Q	Kể đến Q	Chênh(%)
$\bar{m}_{22}^{*}$	13.90630	13.88890	0.125	13.85790	13.84170	0.116
$\bar{m}_{23}^{*}$	7.84457	7.82339	0.270	7.72139	7.70168	0.255
$\bar{m}_{25}^{*}$	4.81371	4.83106	- 0.360	4.86208	4.87828	- 0.333
$\bar{m}_{26}^{*}$	- 4.63543	- 4.65661	- 0.456	- 4.63021	- 4.64992	- 0.425
$\bar{m}_{33}^{*}$	5.70514	5.68479	0.356	5.56047	5.54647	0.251
$\bar{m}_{35}^{*}$	4.63543	4.65661	- 0.456	4.63021	4.64992	- 0.425
$\bar{m}_{36}^{*}$	- 4.27886	- 4.29421	- 0.358	- 4.21951	- 4.23316	- 0.323
$\bar{m}_{55}^{*}$	13.90630	13.88890	0.125	13.85790	13.84170	0.116
$\bar{m}_{56}^{*}$	- 7.84457	- 7.82339	0.270	- 7.72139	- 7.70168	0.255
$\bar{m}_{66}^{*}$	5.70514	5.68979	0.269	5.56047	5.54647	0.251
T_1(s)	**21.0460**	**21.4497**	- 1.918	**37.2553**	**37.4792**	- 0.601

Ghi chú: *Các giá trị ở cột 2, 3, 5, 6 đã nhân với 1000, các giá trị của các phần tử còn lại của ma trận khối lượng tương đương bằng 0; giá trị chu kỳ dao động riêng đầu tiên ở cột 2 hàng cuối cùng, có lời giải giải tích là T_1=0.021362(s) [1].*

4. Kết luận

- Thuật toán xây dựng hàm dạng và ma trận khối lượng tương đương $\bar{\mathbf{M}}_e^*$ của phần tử thanh hai đầu liên kết đàn hồi có khối lượng phân bố do tác giả đề xuất đã lợi dụng được ma trận độ cứng $\bar{\mathbf{K}}_e^*$ đã biết nên rất thuận tiện.

- Hàm dạng và ma trận khối lượng tương đương $\bar{\mathbf{M}}_e^*$ trong trường hợp đặc biệt như thanh hai đầu ngàm, một đầu ngàm một đầu khớp hoặc hai đầu khớp hoàn toàn trùng khớp kết quả của phần tử thanh Bernoulli khi không kể đến ảnh hưởng của lực cắt hoặc phần tử thanh Timoshenko khi có kể tới ảnh hưởng của lực cắt.

- Qua kết quả tính toán bằng số, chu kỳ dao động riêng của dầm đơn hoàn toàn trùng khớp với lời giải giải tích [1] và lời giải của SAP2000 nên thuật toán xác định ma trận khối lượng tương đương $\bar{\mathbf{M}}_e^*$ do tác giả đề xuất có đủ độ tin cậy.

- Phần mềm SAP2000, ma trận khối lượng phân bố được quy về nút, bỏ qua lực quán tính của chuyển vị xoay. Nên để có lời giải chính xác so với [1] cần chia thanh ra làm 40 phần tử.

- Với phần tử thanh có tỷ số giữa chiều dài và chiều cao tiết diện lớn hơn 8 thì ảnh hưởng của lực cắt đến giá trị của phần tử trong ma trận $\bar{\mathbf{M}}_e^*$ là không đáng kể.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Phượng (2005): "*Động lực học công trình*", Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
2. Nguyễn Hồng Sơn (2006), *" Phân tích đàn dẻo khung thép có liên kết mềm phi tuyến kể đến ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt",* Tạp chí Xây dựng 6/2006.
3. Clough R.W., Penzien J. (1993) "*Dynamic of structures*", McGraw-Hill Book Co, New York.
4. Przemieniecki J.S. (1968): " *Theory of matrix structural analysis*", Mc-Graw Hill Book Company.
5. Timoshenco S.P.,Young D.H. (2001): "*Theory of structures*", McGraw-Hill International Edition. Co.Singapore.
6. Немчинов Ю.И (1980): *"Расчет пространственных конструкщий- метод конечных елементов".* Киев будивельних.

Abstract

CONSISTENT MASS MATRIX OF DISTRIBUTED MASS BEAM ELEMENT WITH LINEAR ELASTIC CONNECTIONS

When analyzing structures subjected to dynamic loadings, it is necessary to determine the mass matrix of these systems. The simplest procedure for defining the mass matrix of any structure is to assume that the distributed mass is concentrated at the points at which the translational displacements are defined and the distribution of the mass to these points being determined by static, in this case the result of problem depend on the number of lumped-mass. This paper deal with a procedure establishing the consistent mass matrix of distributed mass beam element with semi-rigid connections at the ends, based on the shape functions of beam. The convenience of consistent mass procedure greatly reduce the element to a MDOF system and augment the exact degree of solution.