

# GIẢI TÍCH BÀI TOÁN VÒM - CÔNG XÔN TRUNG TÂM TRÊN MÔI TRƯỜNG MATHCAD BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN KHI CHÂN ĐẬP VÒM NGÂM CỨNG VÀO NỀN.

TS. Đào Tuấn Anh

**Tóm tắt:** Sự thành công giải tích bài toán ứng suất đập vòm bằng phương pháp vòm - công xôn trung tâm trên môi trường Mathcad và so sánh kết quả tính toán với phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) như một minh chứng cho thế mạnh của phần mềm này (Mathcad) trong việc giải tích các bài toán kỹ thuật cổ điển để hỗ trợ các kỹ sư phân tích, kiểm tra kết quả tính toán thiết kế các công trình xây dựng nói chung và thủy lợi nói riêng bằng các phần mềm thương mại mà phần đa trong số họ không kiểm soát được vì không hiểu bản chất nội dung lập trình của chúng.

## I. ĐẬP VÒM VÀ CÁC YÊU CẦU BỐ TRÍ

Đập vòm đã được xây dựng nhiều trên các nước phát triển nhưng ở nước ta chỉ có duy nhất một đập vòm đang được xây dựng là đập vòm Nậm Chiến (cao 135 m) trên suối Nậm Chiến ở thượng nguồn sông Đà. Đập này do Tổng công ty sông Đà thi công nhưng do Cơ quan tư vấn nước ngoài thiết kế (Viện thiết kế thủy công Ucraina). Do vậy việc nghiên cứu đập vòm ở Việt Nam đang còn nhiều hạn chế.

Đập vòm là một loại đập có kết cấu hết sức phức tạp nhằm tạo hình để chuyển tải áp lực xô ngang của nước thành các lực nén tác dụng dọc theo thân đập do hiệu ứng vòm gây nên. Do đó đập vòm có kết cấu vỏ mỏng hình vòm cong một chiều theo phương nằm ngang hoặc cả hai chiều theo phương ngang và phương đứng. Sau khi được chuyển tải qua thân đập các lực xô ngang được truyền vào hai bờ, cho nên hai vai bờ đập vòm phải vững, thường phải là loại đá liên khối cứng chắc, cân xứng và không bị gián đoạn hoặc mở rộng đột ngột phía hạ lưu. Kết cấu đập vòm cần phải thiết kế tương xứng với hình dạng tuyến đập, sao cho dưới tác dụng của ngoại lực trong đập vòm chỉ chủ yếu tồn tại ứng suất nén.

Muốn vậy tuyến đập phải đối xứng theo phương dòng chảy. Trong thực tế đây là điều không thể cho nên thông thường ta phải xử lý tuyến đập bằng biện pháp công trình sao cho hai bờ vai đập trở nên cân xứng, thành tuyến hình chữ V, hình thang cân hay

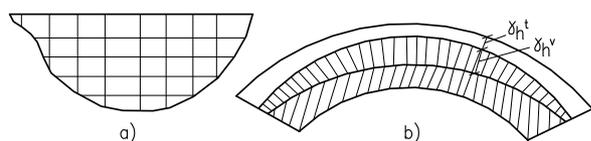
tuyến chữ U...v.v...

## II. PHƯƠNG PHÁP VÒM - CÔNG XÔN TRUNG TÂM.

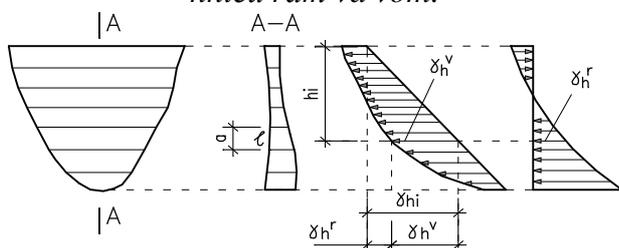
Có rất nhiều phương pháp tính toán phân tích trạng thái ứng suất biến dạng đập vòm. Trước đây người ta hay dùng các phương pháp giải tích cổ điển, đó là: phương pháp ống tròn thành mỏng, phương pháp vòm đơn thuần, phương pháp vòm - công xôn trung tâm, phương pháp nhiều vòm và công xôn. Ngày nay người ta hay dùng lý thuyết đàn hồi (lý thuyết vỏ mỏng) trong các phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp sai phân để giải bài toán ứng suất biến dạng đập vòm với sự trợ giúp các phần mềm tính toán trên máy tính điện tử. Thông thường các kỹ sư không kiểm soát được các kết quả tính toán theo các phần mềm này vì không rõ bản chất nội dung lập trình của chúng.

Các phương pháp trên đều xét theo bài toán phẳng, nhưng trong thực tế đập vòm là một kết cấu không gian, nghĩa là ngoài phương ngang đập vòm còn làm việc theo phương đứng. Phương pháp vòm - công xôn trung tâm và phương pháp nhiều vòm và công xôn thực chất đều là một phương pháp rầm - vòm, xét đập theo bài toán không gian. Để giải bài toán này một mặt chia đập theo mặt cắt ngang thành các vòm, mặt khác chia nó ra thành các công xôn (rầm) gắn chặt vào nền bởi các mặt cắt thẳng đứng. Mỗi điểm thân đập đồng thời có vị trí trên một vòm và một rầm công son

nhất định. Vì vậy biến dạng của điểm ấy dù xét theo vòm hay rầm cũng chỉ có một giá trị mà thôi. Dựa vào nguyên tắc này người ta thiết lập hệ phương trình cân bằng từ các phương trình tính toán nội lực của rầm và vòm khi các tải trọng tác dụng lên đập được phân phối ra cho rầm chịu một phần và vòm chịu phần còn lại. Tùy theo mức độ chính xác của bài toán mà người ta có thể chia đập thành hệ thống nhiều vòm và nhiều rầm hoặc thành hệ thống nhiều vòm và một rầm tại mặt giữa đập (công xôn trung tâm) làm đại diện. Cách chia trước dùng cho phương pháp nhiều rầm và vòm, thường phải giả thiết trước biểu đồ phân phối lực (xem hình 1), sau đó tính toán đi, tính toán lại cho đến khi tại các điểm tính toán biến vị của vòm và của rầm sai số nhỏ. Do vậy khối lượng tính toán lớn.



Hình 1. Phân phối lực theo phương pháp nhiều rầm và vòm.



Hình 2. Phân phối lực theo phương pháp vòm - công xôn trung tâm

Cách chia sau áp dụng cho phương pháp vòm - công xôn trung tâm và thường được ứng dụng nhiều hơn trong việc tính toán thiết kế định hình cấu tạo đập vòm. Theo phương pháp này tại trọng phân phối theo phương đứng tại vị trí có rầm đỉnh làm đại diện, phần còn lại theo phương ngang được phân phối cho các vòm và thay đổi theo các cao trình khác nhau (xem hình 2).

Cách tiếp cận để giải bài toán vòm - công xôn trung tâm rất khác nhau, từ đó các tác giả đưa ra các phương pháp khác nhau để giải bài toán. Các phương pháp truyền thống trong

phạm vi giải bài toán vòm - công xôn trung tâm được trình bày trong rất nhiều tài liệu của các tác giả khác nhau như G. Ritter, V.P. Skrulnhikovui, A. Stukki, J. Lombardi, L.A. Rozinui, L.B. Grimze và những người khác[1].

Theo Kh.G. Gannhiep phương trình cơ bản của bài toán vòm - công xôn trung tâm được thiết lập như sau. Xem công xôn trung tâm tựa trên các vòm tương tự như rầm trên nền đàn hồi chịu ảnh hưởng bởi tính biến dạng của các khoanh vòm độc lập, được đặc trưng bởi hệ số nền K. Lúc đó phản lực nền đàn hồi chính là phần tải trọng mà vòm chịu được xác định như sau:

$$p_a(y) = K(y)w(y) \quad (1)$$

Trong đó  $w(y)$  - chuyển vị uốn của công xôn trung tâm. Góc tọa độ được lấy từ đáy công xôn trung tâm (nơi tiếp xúc giáp với mặt nền) và trục y hướng thẳng đứng lên trên. Lúc này tải trọng được phân phối cho công xôn  $p_k$  được xác định như sau:

$$p_k(y) = p(y) - K(y)w(y) \quad (2)$$

Trong đó  $p(y)$  - tải trọng toàn phần của áp lực nước tác dụng lên vòm và công xôn.

Hệ số nền  $K(y)$  được xác định như sau:

$$K(y) = \frac{1}{f_a(y)} \quad (3)$$

Với  $f_a(y)$  là độ võng của vòm nằm ngang tại đỉnh dưới tác dụng của tải trọng đơn vị phân bố đều. Đối với vòm ngàm cứng hai đầu bằng phương pháp tính toán chuyển vị trong cơ học kết cấu ta có thể tìm được:

$$f_a(y) = \frac{r_0^2}{Ee(y)} \mu(\alpha_0) \quad \text{với}$$

$$\mu(\alpha_0) = \frac{\alpha_0(\alpha_0 - \sin \alpha_0)(1 - \cos \alpha_0)}{\alpha_0^2 + \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2 \sin^2 \alpha_0}$$

Trong đó  $e(y)$  - chiều dày của vòm tại mặt cắt có tọa độ phương đứng  $y$ , m.

$\alpha_0$  - bán giá trị góc ở tâm của cung vòm này, radian.

$r_0$  - bán kính trung bình của vòm, m.

$E$  - mô đun đàn hồi của bê tông,  $\text{KN/m}^2$

Giá trị  $w(y)$  có thể tìm được bằng việc giải phương trình vi phân độ uốn của rầm trên nền đàn hồi:

$$[EI(y)w''(y)]' + K(y)w(y) = p(y) \quad (4)$$

Khai triển thành phần vi phân của phương trình (4) ta được:

$$EI(y)w^{IV}(y) + 2EI'(y)w'''(y) + EI''(y)w''(y) + k(y)w(y) = p(y) \quad (4')$$

Với  $EI(y)$  - độ cứng của công xôn.  $I(y)$  mô men quán tính của tiết diện công xôn biến đổi theo phương tọa độ  $y$ . Để giải phương trình trên có thể dùng các phương pháp gần đúng, phương pháp sai phân, phương pháp biến phân...v.v.

### III. DÙNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN ĐỂ HỖ TRỢ GIẢI BÀI TOÁN VÒM - CÔNG XÔN TRUNG TÂM VÀ CÁC HẠN CHẾ TRƯỚC ĐÂY

Theo phương pháp biến phân ta xác định được các biểu thức biến phân khi cực tiểu thế năng hệ thống kết cấu. Hàm thế năng có thể viết ở dạng sau:

$$\begin{aligned} \Pi = & -\int_0^H p(y)w(y)dy + \frac{1}{2} \int_0^H [EI(y)w''(y)]^2 w(y)dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^H K(y)w(y)^2 dy + \Pi_0 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$H$ - chiều cao của công xôn trung tâm.

Đối với các dạng tiếp giáp đập vòm với nền khác nhau ta có giá trị hàm thế  $\Pi_0$  ban đầu khác nhau, với trường hợp tiếp giáp là ngàm cứng:  $\Pi_0 = 0$

Sử dụng phương pháp biến phân Relya -Ritxa biểu thức tính độ võng của rầm có thể viết:

$$w(y) = \sum_{j=1}^n A_j \varphi_j(y) \quad (6)$$

Các giá trị  $A_j$  có thể tìm ra được từ điều kiện cực tiểu hàm thế năng (5):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_j} = 0 \quad (7)$$

Sử dụng hàm số uốn (6) và phương trình (5), biểu thức (7) có thể viết dưới dạng:

$$\left. \begin{aligned} A_1 a_{11} + A_2 a_{12} + \dots + A_j a_{1j} + \dots + A_n a_{1n} &= \overline{p_1} \\ A_1 a_{n1} + A_2 a_{n2} + \dots + A_j a_{nj} + \dots + A_n a_{nn} &= \overline{p_n} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Hay viết một cách khác:

$$[a_{ij}] \{A_j\} = \{\overline{p_j}\} \quad (10)$$

Đối với công xôn ngàm cứng ta có:

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^H [EI(y)\varphi_j''(y)] \varphi_i(y) dy + \int_0^H K(y)\varphi_j(y)\varphi_i(y) dy \\ \overline{p_i} &= \int_0^H p(y)\varphi_i(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Các hàm  $\varphi_i(y)$ , biểu thị độ uốn công xôn, cần phải thể hiện được đặc trưng làm việc của kết cấu. Vì vậy khi lựa chọn số lượng hàm tiêu biểu cần phải hiểu được bản chất kết cấu công trình, thường chọn từ 2 đến 4 hàm.

Đối với đập vòm sơ đồ tính toán công xôn hợp lý nhất là theo sơ đồ rầm được tách ra từ bản. Và tiện lợi nhất là sử dụng hàm cơ bản dao động theo phương vuông góc của rầm (Vlasov V.Z [2]). Chú ý khi xem xét bài toán dao động tự do của rầm có trọng lượng một nhịp có chiều dài  $H$  từ phương trình vi phân:

$$\varphi^{IV} = \frac{\mu^4}{H^4} \varphi \quad (12)$$

( $\mu$  - là một thông số đặc trưng cho dao động riêng của rầm)

tích phân chung phương trình vi phân đồng nhất (12) có thể viết dưới dạng:

$$\varphi(y) = C_1 \sin \frac{\mu y}{H} + C_2 \cos \frac{\mu y}{H} + C_3 \operatorname{sh} \frac{\mu y}{H} + C_4 \operatorname{ch} \frac{\mu y}{H} \quad (13)$$

Từ điều kiện biên ở hai đầu công xôn ( $y=0$  và  $y=H$ ) mà ta suy ra được các giá trị  $C_i$  và  $\mu$ , tức là phụ thuộc vào các điều kiện biên mà hàm  $\varphi(y)$  có dạng này hay dạng khác. Đối với đập vòm được ngàm cứng với nền, có thể sử dụng lời giải của Vlasov V.Z [2]:

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0, \varphi''(H) = 0, \varphi'''(H) = 0$$

Từ đó ta tìm ra được hàm số  $\varphi(y)$ :

$$\varphi(y) = \sin \mu \frac{y}{H} - \operatorname{sh} \mu \frac{y}{H} - \alpha (\cos \mu \frac{y}{h} - \operatorname{ch} \mu \frac{y}{H}) \quad (14)$$

$$\text{Với: } \alpha = \frac{\sin \mu + \operatorname{sh} \mu}{\cos \mu + \operatorname{ch} \mu}$$

Và  $\mu$  xác định từ điều kiện định thức hệ phương trình xác định  $C_i$ :

$$\cos \mu \operatorname{ch} \mu = -1, \text{ suy ra}$$

các nghiệm của  $\mu$  là:

$$\mu_1 = 1.8751; \mu_2 = 4.6941; \mu_3 = 7.8548;$$

$$\mu_4 = 10.9955; \text{ khi } i > 4 \text{ thì } \mu_{i>4} = \frac{2i-1}{2} \pi.$$

Mỗi giá trị của  $\mu_i$  ta có một hàm số  $\varphi_i(y)$ , thông thường để giải bài toán vòm công xôn trung tâm người ta lấy 2 giá trị. Sau

khi có hàm  $\varphi_i(y)$  ta thay vào (11) để tính toán các tích phân  $a_{i,j}$  và  $\overline{p_i}$ , thay vào hệ phương trình (8) để giải ra các hệ số  $A_j$ , từ đó ta theo (6) ta xác định được hàm uốn  $w(y)$ , tức các giá trị độ võng của rầm tại các điểm có tọa độ  $y$ . Từ đây ta xác định được các nội lực tác dụng lên rầm và phân áp lực nước phân bố cho vòm, sau đó ta tính toán ứng suất trong rầm và nội lực vòm theo phương pháp vòm đơn thuần với áp lực nước đã trừ đi phần do công xôn chịu. Từ đó ứng suất đập vòm hoàn toàn được xác định.

Điều khó khăn từ trước tới nay khi giải bài toán này là ở chỗ các hàm tích phân trong (11) không giải tích ra được, phải tính gần đúng và sử dụng hệ thống bảng biểu. Phương pháp tra bảng đã làm chậm quá trình tính toán và thiếu tính tự động trong tính toán, gây khó khăn cho việc thiết kế lựa chọn kết cấu đập vòm giữa hàng ngàn phương án cấu tạo đập khác nhau. Vấn đề này đã hạn chế việc tìm phương án tối ưu khi lựa chọn hình dạng đập, đặc biệt khi tiêu chí đưa ra được kết hợp cả điều kiện ứng suất, điều kiện ổn định và kể cả phải giải bài toán ứng suất nhiệt đập vòm để xem xét ảnh hưởng của điều kiện nhiệt độ môi trường đến phương pháp thi công và ứng xử thân đập trong quá trình vận hành. Muốn giải quyết điều đó cần phải giải tích được các phương trình trong bài toán vòm - công xôn trung tâm khi sử dụng phương pháp biến phân, một bài toán thường hay sử dụng để phân tích ứng suất đập trong giai đoạn thiết kế sơ bộ đập vòm để định dạng kết cấu đập. Hiện nay có phần mềm Mathcad có thể giúp ta giải tích bài toán này trên môi trường của nó khi viết ra các công thức toán học theo ngôn ngữ thông thường.

#### IV. GIẢI TÍCH BÀI TOÁN VÒM CÔNG XÔN TRUNG TÂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN TRÊN MÔI TRƯỜNG MATHCAD

##### 1) Giới thiệu phần mềm Mathcad.

Công ty Mathsoft Inc. sản xuất Mathcad không phải là công nghệ cũ sẽ khi nào cũng sản phẩm của họ *phương tiện tính toán kỹ thuật*

của công nghệ tính toán chuyên môn trên toàn thế giới. Mathcad cũng thay thế công cụ chương trình vi tính khác trong việc thực hiện công việc tính toán phức tạp công nghệ lập, phân nhánh, chương trình con v.v... Nó cũng xác định các giá trị biểu thức dưới dạng ký hiệu toán học thông thường, tính toán vi phân, tích phân công nghệ xử lý hình học công nghệ bất kỳ hàm số phức tạp. Giải công nghệ phương trình, hệ phương trình ở các dạng phức tạp khác nhau. Mathcad cũng dùng công nghệ biểu đồ công nghệ đồ họa công nghệ hai chiều, ba chiều từ Autocad và công nghệ ra công nghệ sẽ dữ liệu tính toán và biểu đồ liên kết công nghệ bảng ma trận, công nghệ hình vẽ v.v... Trên môi trường Mathcad có thể thành lập sẵn công nghệ chuỗi văn bản thuyết minh xen kẽ với công nghệ phân tích toán với chất lượng trình bày cao, có thể số dòng nhiều lần với công nghệ kết nối tính toán khác nhau, mọi lần in ra trực tiếp thuận lợi, công nghệ bảng tài liệu cao trong việc soạn thảo tài liệu tính toán thiết kế. Nó cũng không ngừng liên hệ qua lại đa dạng với các chương trình thông dụng khác (Excel, Matlab, Autocad, Wordpad...v.v..) hoặc với những dữ liệu Mathcad qua Internet.

##### 2) Giải tích bài toán vòm - công xôn trung tâm bằng phương pháp biến phân trên môi trường Mathcad.

Trên môi trường Mathcad các phương pháp giải tích cổ điển không những giữ nguyên tính nguyên bản của mình trên trạng thái biểu thị toán học cũng như ngôn ngữ mà còn tăng năng lực trong việc giải tích toán học và có thể giải các bài toán mà trước đây không giải được hoặc giải quá phức tạp với khối lượng bảng biểu lớn, không đưa đến dạng nghiệm tổng quát ngắn gọn theo công thức để làm tiền đề giải một cách tự động các bước tiếp theo (ví dụ phương pháp vòm - công xôn trung tâm khi áp dụng giải bài toán ứng suất nhiệt đập vòm). Các kết quả của phương pháp giải tích cổ điển và phương pháp phần tử hữu hạn sẽ được so sánh với nhau để bổ trợ cho nhau, quy định lẫn nhau nhằm đưa ra kết quả chính xác cuối cùng. Do Mathcad có thể giải các phương

trình tích phân phức tạp với các hàm tích phân không có trong các hàm biến đổi thông thường nên ta có thể tận dụng thế mạnh này của nó để triển khai giải tích phương trình cơ sở (4) qua việc tính toán các giá trị  $a_{i,j}$ ,  $\overline{p}_i$ ,  $A_j$  và hàm  $w(y)$  tại các biểu thức và hệ biểu thức, từ (6) đến (14) trong mục II ở trên. Việc tính toán được minh họa qua một ví dụ cụ thể

đó là phân tích ứng suất để lựa chọn cấu tạo đập vòm Nậm Ngần trong phương án so sánh thiết kế đập đầu mối của công trình thủy điện Nậm Ngần, tỉnh Hà Giang. Chiều cao đập Nậm Ngần 50m, chiều rộng tuyến tại cao trình đỉnh đập là 140m, tại đáy là 20m. Trình tự giải tích bài toán vòm công xôn trung tâm được thể hiện qua từng bước dưới đây.

### I. Số liệu yêu cầu

- |   |  |
|---|--|
| 1. Chiều cao đập vòm: $H, m$                              | $H := 50$                              |
| 2. Chiều dài tuyến tại cao trình đỉnh đập: $L, m$         | $L := 140$                             |
| 3. Chiều dài tuyến tại cao trình đáy đập: $L_0, m$        | $L_0 := 20$                            |
| 4. Mô đun đàn hồi của bê tông: $E_b, \frac{T}{m^2}$       | $E_b := 2000000$                       |
| 5. Số lớp tính toán theo cao trình đập: $NL$              | $NL := 50$                             |
| 6. Trọng lượng riêng của nước và bê tông: $\frac{T}{m^3}$ | $\gamma_b := 2.4$                      |
| 7. 1/2 góc mở $\alpha, m$                                 | $\alpha a := \pi \cdot \frac{60}{180}$ |

### II. Chân cầu yêu cầu

1. Chiều dài tuyến tại cao trình đỉnh đập:  $l, m$   
 $i := 0..NL \quad y_i := i \quad \zeta := \frac{y}{H} \quad l := L_0 + (L - L_0) \cdot \zeta \quad l_\xi(\xi) := L_0 + (L - L_0) \cdot \xi$
2. Chọn các hàm biến của đường kính trong, đường kính ngoài, đường kính giữa, tọa độ tâm của đập vòm

$$z := H - y \quad e_0 := 8.0 \quad e_1 := 2.0 \quad e := e_1 + (e_0 - e_1) \cdot (1 - \zeta)$$

$$R_n := \frac{l}{2 \cdot \sin(\alpha a)} \quad R_{tr} := R_n - e \quad R_o := R_n - \frac{e}{2} \quad e_\xi(\xi) := e_1 + (e_0 - e_1) \cdot (1 - \xi)$$

$$R_n(\xi) := \frac{L_0 + (L - L_0) \cdot \xi}{2 \cdot \sin(\alpha a)} \quad R_{tr}(\xi) := R_n(\xi) - e_\xi(\xi) \quad R_o(\xi) := \frac{(R_n(\xi) + R_{tr}(\xi))}{2}$$

$$az := 2.15 \cdot z - 0.013 \cdot z^2 \quad x_n := 100.0 - (R_n + az) \quad \sin \alpha a_i := \frac{l_i}{2 \cdot R_{n_i}}$$

$$y_1 := y \quad x_{tr} := x_n + e \quad x_0 := x_n \cdot 0.5 + 0.5 \cdot x_{tr} \quad \alpha^* := 2\alpha a \cdot \frac{180}{\pi}$$

### 3. Phân tích ứng suất yêu cầu

1. Xác định các đại lượng vật lý đặc trưng kết cấu đập:

$$\mu a_i := \frac{\alpha a \cdot (\alpha a - \sin \alpha a_i) \cdot (1 - \cos(\alpha a))}{(\alpha a)^2 + \alpha a \cdot \sin \alpha a_i \cdot \cos(\alpha a) - 2 \cdot (\sin \alpha a_i)^2} \quad f a_i := (R_{o_i})^2 \cdot \frac{\mu a_i}{E_b \cdot e_i} \quad k_n := \frac{1}{f a} \quad l(\xi) := \frac{(e_\xi(\xi))^3}{12}$$

$$\mu(\xi) := \frac{\alpha(\xi) \cdot (\alpha(\xi) - \sin \alpha(\xi)) \cdot (1 - \cos(\alpha(\xi)))}{(\alpha(\xi))^2 + \alpha(\xi) \cdot \sin \alpha(\xi) \cdot \cos(\alpha(\xi)) - 2 \cdot (\sin \alpha(\xi))^2} \quad f a(\xi) := (R_o(\xi))^2 \cdot \frac{\mu(\xi)}{E_b \cdot e_\xi(\xi)} \quad k_n(\xi) := \frac{1}{f a(\xi)}$$

2. Chọn hàm đặc trưng của hàm số uốn công xôn  $\phi_1, \phi_2$ :

$$\mu_1 := 1.8751 \quad \mu_2 := 4.6941 \quad \alpha_1 := \frac{\sin(\mu_1) + \sinh(\mu_1)}{\cos(\mu_1) + \cosh(\mu_1)} \quad \alpha_2 := \frac{\sin(\mu_2) + \sinh(\mu_2)}{\cos(\mu_2) + \cosh(\mu_2)}$$

$$\phi_{1i} := \sin(\mu_1 \cdot \zeta_i) - \sinh(\mu_1 \cdot \zeta_i) - \alpha_1 \cdot (\cos(\mu_1 \cdot \zeta_i) - \cosh(\mu_1 \cdot \zeta_i))$$

$$\phi_{2i} := \sin(\mu_2 \cdot \zeta_i) - \sinh(\mu_2 \cdot \zeta_i) - \alpha_2 \cdot (\cos(\mu_2 \cdot \zeta_i) - \cosh(\mu_2 \cdot \zeta_i))$$

3. Xác định các hằng số hệ số của hàm số uốn  $A_1, A_2$ :

$$d_{1\phi_1}(\xi) := \frac{d}{d\xi} \phi_1(\xi) \quad d_{2\phi_1}(\xi) := \frac{d^2}{d\xi^2} \phi_1(\xi) \quad d_{3\phi_1}(\xi) := \frac{d^3}{d\xi^3} \phi_1(\xi) \quad d_{4\phi_1}(\xi) := \frac{d^4}{d\xi^4} \phi_1(\xi)$$

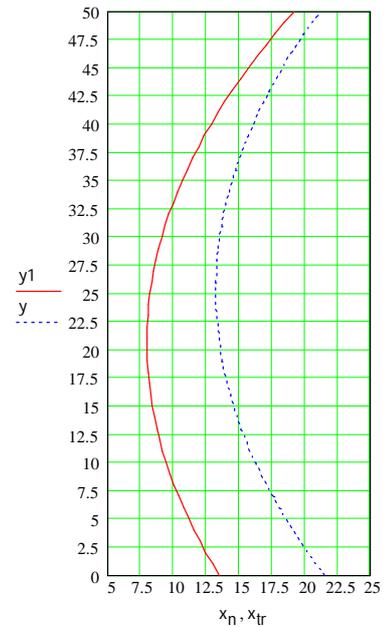
$$d_{1\phi_2}(\xi) := \frac{d}{d\xi} \phi_2(\xi) \quad d_{2\phi_2}(\xi) := \frac{d^2}{d\xi^2} \phi_2(\xi) \quad d_{3\phi_2}(\xi) := \frac{d^3}{d\xi^3} \phi_2(\xi) \quad d_{4\phi_2}(\xi) := \frac{d^4}{d\xi^4} \phi_2(\xi)$$

$$f_{1\phi_{11}}(\xi) := d_{4\phi_1}(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot l(\xi) \quad f_{2\phi_{11}}(\xi) := 2 \cdot d_{3\phi_1}(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot \frac{d}{d\xi} l(\xi) \quad f_{3\phi_{11}}(\xi) := \frac{d^2}{d\xi^2} l(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot d_{2\phi_1}(\xi)$$

$$f_{1\phi_{12i}}(\xi) := d_{4\phi_1}(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot l(\xi) \quad f_{2\phi_{12i}}(\xi) := 2 \cdot d_{3\phi_1}(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot \frac{d}{d\xi} l(\xi) \quad f_{3\phi_{12i}}(\xi) := \frac{d^2}{d\xi^2} l(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot d_{2\phi_1}(\xi)^x$$

$$f_{1\phi_{21i}}(\xi) := d_{4\phi_2}(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot l(\xi) \quad f_{2\phi_{21i}}(\xi) := 2 \cdot d_{3\phi_2}(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot \frac{d}{d\xi} l(\xi) \quad f_{3\phi_{21i}}(\xi) := \frac{d^2}{d\xi^2} l(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot d_{2\phi_2}(\xi)$$

$$f_{1\phi_{2i}}(\xi) := d_{4\phi_2}(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot l(\xi) \quad f_{2\phi_{2i}}(\xi) := 2 \cdot d_{3\phi_2}(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot \frac{d}{d\xi} l(\xi) \quad f_{3\phi_{2i}}(\xi) := \frac{d^2}{d\xi^2} l(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot d_{2\phi_2}(\xi)$$



$$f_{k\phi 1}(\xi) := \frac{H^4 \cdot k_n(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot \phi_1(\xi)}{E_b} \quad f_{k\phi 12}(\xi) := \frac{H^4 \cdot k_n(\xi) \cdot \phi_1(\xi) \cdot \phi_2(\xi)}{E_b} \quad f_{k\phi 21}(\xi) := \frac{H^4 \cdot k_n(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot \phi_1(\xi)}{E_b} \quad f_{k\phi 2}(\xi) := \frac{H^4 \cdot k_n(\xi) \cdot \phi_2(\xi) \cdot \phi_2(\xi)}{E_b}$$

$$a_{11} := \int_0^1 (f_{1\phi 11}(\xi) + f_{2\phi 11}(\xi) + f_{3\phi 11}(\xi) + f_{k\phi 1}(\xi)) d\xi \quad a_{12} := \int_0^1 (f_{1\phi 12}(\xi) + f_{2\phi 12}(\xi) + f_{3\phi 12}(\xi) + f_{k\phi 12}(\xi)) d\xi$$

$$a_{21} := \int_0^1 (f_{1\phi 21}(\xi) + f_{2\phi 21}(\xi) + f_{3\phi 21}(\xi) + f_{k\phi 21}(\xi)) d\xi \quad p(\xi) := \gamma_0 \cdot (H - \xi \cdot H) \quad p_1 := H^4 \cdot \int_0^1 \frac{p(\xi) \cdot \phi_1(\xi)}{E_b} d\xi$$

$$a_{22} := \int_0^1 (f_{1\phi 22}(\xi) + f_{2\phi 22}(\xi) + f_{3\phi 22}(\xi) + f_{k\phi 2}(\xi)) d\xi \quad p_2 := H^4 \cdot \int_0^1 \frac{p(\xi) \cdot \phi_2(\xi)}{E_b} d\xi$$

$$a_{11} = 6.529 \times 10^7 \quad a_{12} = 5.193 \times 10^7 \quad a_{21} = 5.193 \times 10^7 \quad a_{22} = 1.819 \times 10^4 \quad p_1 = 45.584 \quad p_2 = 52.648$$

Given

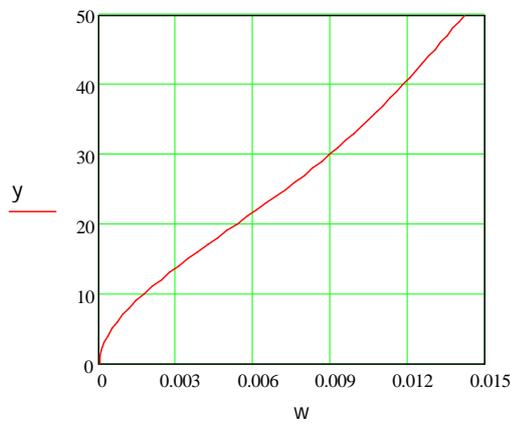
$$A_1 \cdot a_{11} + A_2 \cdot a_{12} = p_1$$

$$A_1 \cdot a_{21} + A_2 \cdot a_{22} = p_2$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} := \text{Find} \left( \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \right) \quad A_1 = 6.055 \times 10^{-3} \quad A_2 = 1.165 \times 10^{-3}$$

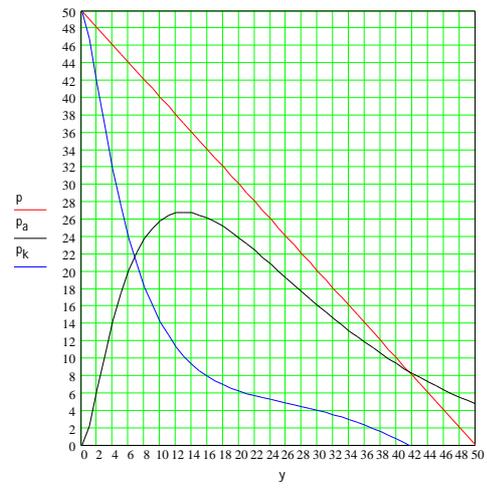
4. Xác định hàm sê uên c ãng x ãn:

$$w := A_1 \cdot \phi_1 + A_2 \cdot \phi_2$$



5. Các thành phần áp lực thủy tĩnh thượng lưu tác dụng lên vòm và công xôn đập:

$$p_i := \gamma_0 \cdot (H - y_i) \quad p_{a_i} := k n_i \cdot w_i \quad p_k := p - p_a$$



6. Xác định ứng suất trong công xôn do áp lực nước và trọng lượng bản thân đập

$$N_i := \sum_{n=i}^{49} 2.4 \cdot e_n \quad N_{50} := 0 \quad Fe := e \quad M_i := \sum_{n=i}^{50} [p_{k_n} \cdot (n - i + 0.5) + 2.4 e_n \cdot (x_{0_n} - x_{0_i})]$$

$$k := 1..9 \quad x_{k,i} := \frac{e_i \cdot (k - 5)}{8} \quad \sigma_{ky_{k,i}} := \frac{N_i}{Fe_i} + \frac{12 \cdot x_{k,i} \cdot M_i}{(e_i)^3}$$

7. Xác định ứng suất vòm:

$$A_{p_i} := \frac{2 \cdot R n_i \cdot \sin(\alpha a)}{\alpha a + 2 \cdot \frac{(\sin(\alpha a))^2}{\alpha a} + 0.5 \cdot \sin(\alpha a)}$$

$$(R o_i)^2 \cdot \frac{(e_i)^2}{12} + 0.5 \cdot (\sin(\alpha a))^2 + \alpha a$$

$$j := 0..4 \quad \beta_j := j \cdot \frac{\pi}{16} \quad y_{e_i,j} := R o_i \cdot \left( \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} - \cos(\beta_j) \right)$$

Ứng suất vòm mặt thượng lưu

$$\sigma_{1v_{j,i}} := \left[ \frac{(R n_i + A_{p_i} \cdot \cos(\beta_j))}{e_i} - \frac{6 \cdot A_{p_i} \cdot y_{e_i,j}}{(e_i)^2} \right] \cdot p_{a_i}$$

Ứng suất vòm mặt hạ lưu

$$\sigma_{2v_{j,i}} := \left[ \frac{(R n_i + A_{p_i} \cdot \cos(\beta_j))}{e_i} + \frac{6 \cdot A_{p_i} \cdot y_{e_i,j}}{(e_i)^2} \right] \cdot p_{a_i}$$

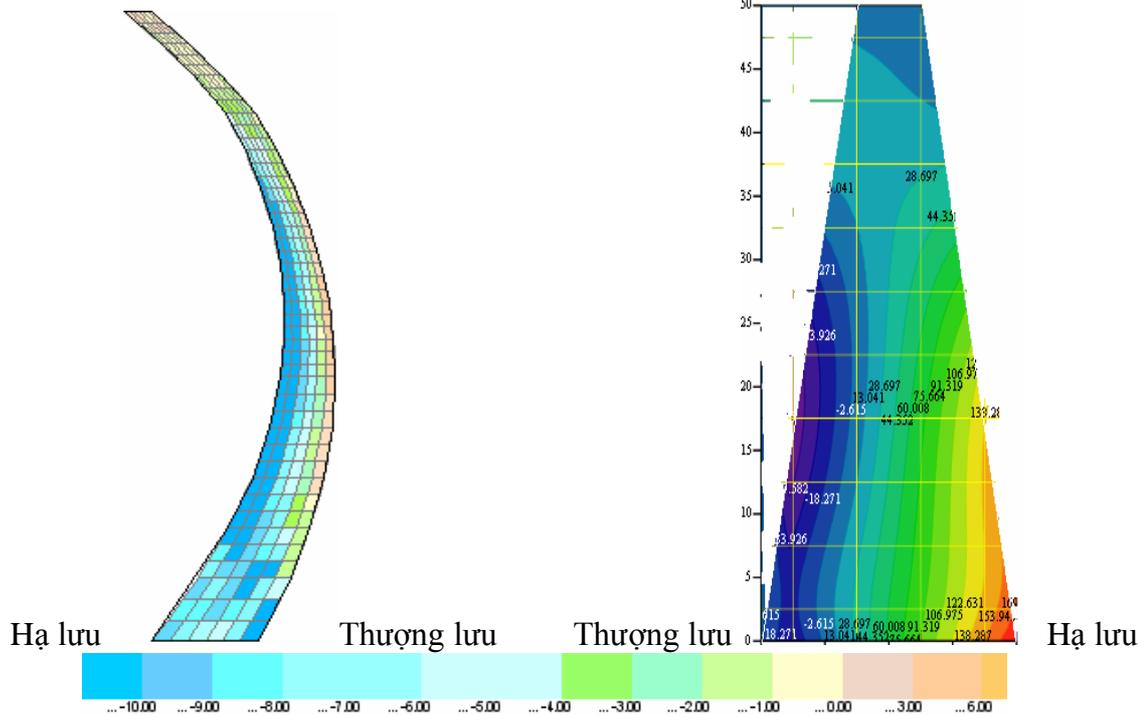
### V. SO SÁNH KẾT QUẢ TÍNH TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH VÒM CÔNG XÔN TRUNG TÂM VỚI PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Để xem xét độ tin cậy kết quả giải tích bài toán vòm công xôn trung tâm chúng ta có thể so sánh chúng với kết quả tính toán ứng suất

vòm và công xôn bằng phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp biến phân cục bộ với sự trợ giúp của chương trình tính ứng suất RAS[3]. Chương trình Ras dùng phần tử khối 32 nút, có cả mô hình hoá nút liên kết tại nơi tiếp xúc các lớp vật liệu, để giải bài toán ứng suất biến dạng không gian và hệ số an toàn bền cục bộ.

Trong hồ sơ thiết kế kết quả tính toán của hai phương pháp đều được dùng đến, trong đó phương pháp vòm - công xôn trung tâm dùng để chọn cấu tạo đập vòm, còn kết quả tính toán ứng suất bằng phương pháp PTHH dùng để kiểm tra độ bền đập và phân bố vùng vật liệu.

**1) So sánh kết quả tính toán ứng suất công xôn tại mặt cắt rầm đỉnh**



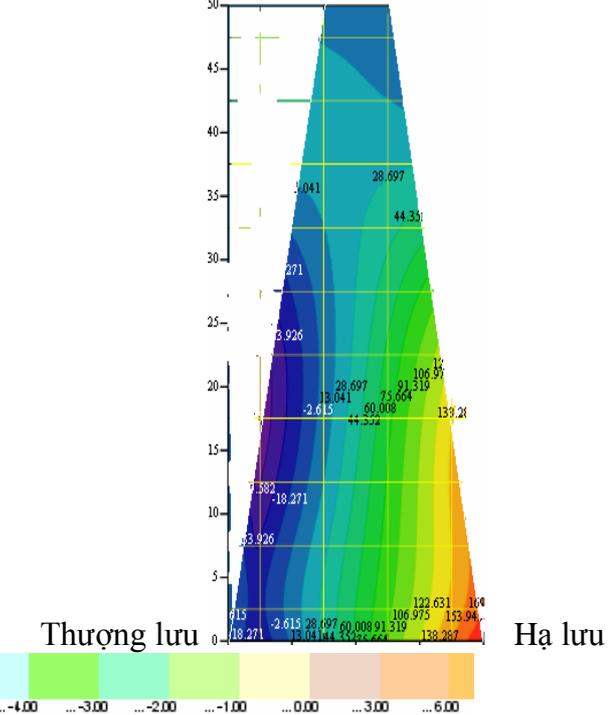
- a) ứng suất công xôn (kg/cm<sup>2</sup>) theo kết quả tính toán bằng phương pháp PTHH
- b) ứng suất công xôn (T/m<sup>2</sup>) theo kết quả kết hợp với biến phân cục bộ. Tính toán bằng phương pháp Vòm - công xôn trung tâm.

Hình 3. So sánh kết quả tính toán ứng suất công xôn giữa phương pháp giải tích vòm - công xôn trung tâm với phương pháp PTHH kết hợp biến phân cục bộ (RAS).

Nhìn vào kết quả biểu thị trên hình 4.a) và 4.b) ta thấy theo kết quả tính toán cả hai phương pháp vùng ứng suất nén phân bố là chủ yếu tại mặt cắt rầm đỉnh và có giá trị lớn nhất khoảng 16kG/cm<sup>2</sup> (160T/m<sup>2</sup>). Theo phương pháp giải tích cổ điển Vòm – công xôn trung tâm vùng ứng nén lớn nhất phân bố ở chân hạ lưu rầm đỉnh, còn theo phương pháp PTHH vùng này lại phân bố ở 1/3 chiều cao đập tại phía hạ lưu mặt cắt rầm đỉnh.

Theo kết quả tính toán cả hai phương pháp vùng ứng suất kéo phân bố ít, có giá trị lớn nhất khoảng 3-5kG/cm<sup>2</sup>(30-50 T/m<sup>2</sup>) và đều ở mặt thượng lưu mặt cắt rầm đỉnh tại vị trí 1/3

Để thể hiện kết quả cho đơn giản trong Mathcad hình dạng đập tại mặt cắt rầm đỉnh dùng để biểu thị ứng suất không mô phỏng uốn cong như thực tế và kích thước chiều ngang khác tỷ lệ so với chiều đứng. Dấu âm và phổ màu xanh theo phương pháp PTHH biểu thị ứng suất nén, dấu dương và màu vàng - ứng suất kéo.



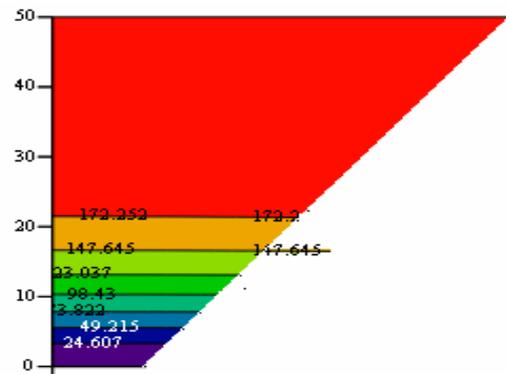
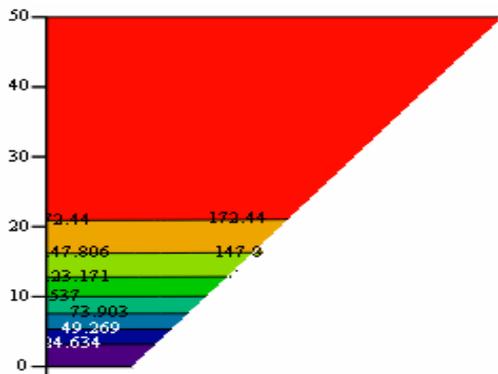
chiều cao đập vòm.

Như vậy ta thấy kết quả tính toán của hai phương pháp gần như nhau. Tất nhiên phương pháp PTHH có sơ đồ tính toán không gian và kết quả chính xác hơn, nhưng kết quả của phương pháp vòm – công xôn trung tâm phản ánh hợp lý so với thực tế hơn. Do vậy khi phân bố vùng vật liệu ta phải kết hợp kết quả cả hai phương pháp. Vùng ứng suất kéo tại mặt cắt rầm đỉnh quá ít và có giá trị bé hơn nhiều so với khả năng chịu kéo của vật liệu bê tông M200 nên chúng ta không cần để ý tới.

**2) So sánh kết quả tính toán ứng suất vòm tại các mặt thượng lưu và hạ lưu đập.**

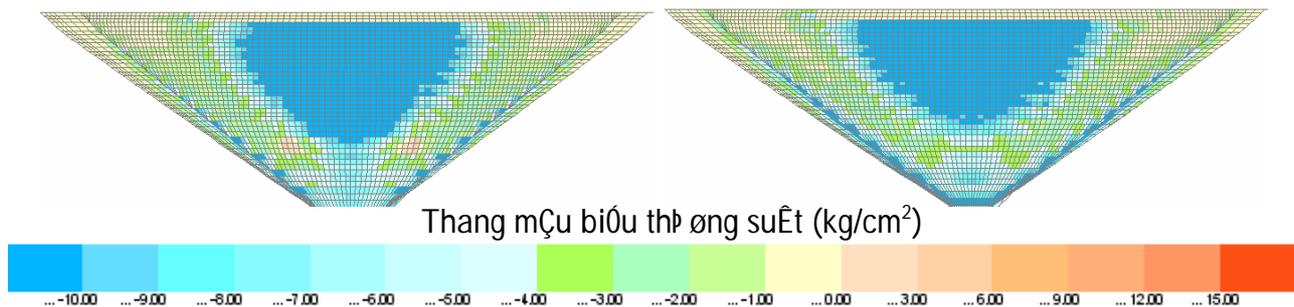
Ở đây phổ màu biểu thị kết quả tính toán của phương pháp PTHH tương tự như trên, còn phổ màu biểu thị trong phương pháp vòm – công xôn trung tâm có một ít thay đổi, từ màu xanh nước biển đến màu đỏ đều biểu thị ứng suất nén. Do tính đối xứng của đập vòm

nên để đơn giản trên Mathcad biểu thị kết quả tại ½ mặt thượng lưu và tại ½ mặt hạ lưu đập. Còn theo phương pháp PTHH mặt thượng lưu và hạ lưu đập dùng để biểu thị kết quả tính toán có gắn cả một phần nền (để dễ dàng nhận ra đường biên thân đập trên hình vẽ).



a) Ứng suất vòm ( $T/m^2$ ) theo kết quả tính toán bằng phương pháp Vòm - công xôn trung tâm (tại 1/2 mặt thượng lưu đập vòm).

b) Ứng suất vòm ( $T/m^2$ ) theo kết quả tính toán bằng phương pháp Vòm - công xôn trung tâm (tại 1/2 mặt hạ lưu đập vòm).



c) Ứng suất vòm ( $kg/cm^2$ ) mặt thượng lưu đập theo kết quả tính toán bằng phương pháp PTHH kết hợp với biến phân cục bộ.

d) Ứng suất vòm ( $kg/cm^2$ ) mặt hạ lưu đập tính toán bằng phương pháp PTHH kết hợp với biến phân cục bộ.

Hình 4. So sánh kết quả tính toán ứng suất theo phương vòm giữa phương pháp giải tích vòm - công xôn trung tâm với phương pháp PTHH kết hợp biến phân cục bộ (RAS).

Chúng ta có thể thấy rằng theo kết quả tính toán cả hai phương pháp ứng suất vòm (dọc thân đập theo phương nằm ngang) tại mặt thượng lưu, hạ lưu đập đều phân bố và có giá trị (đều là ứng suất nén) gần như nhau. Sự khác biệt chỉ ở chỗ vùng ứng suất vòm lớn nhất theo phương pháp PTHH nằm ở giữa đập, còn vùng ứng suất vòm theo phương pháp giải tích cổ điển vòm – công xôn trung

tâm trên cùng một cao trình đều như nhau (ở cả hai bên và giữa đập). Điều đó thể hiện đặc trưng phương pháp rầm đỉnh (chỉ có một rầm tại đỉnh đại diện cho tất cả các rầm). Và đó cũng là sai số tính toán do nhược điểm vừa nói của phương pháp vòm - công xôn trung tâm.

#### V. KẾT LUẬN.

Qua việc khảo sát trạng thái ứng suất đập

vòm Nậm Ngần bằng hai phương pháp trên chúng ta thấy rằng thân đập có kết cấu mỏng mà trong đó chỉ phân bố chủ yếu ứng suất nén và có giá trị không lớn. Điều đó khẳng định tính ưu việt của phương pháp giải tích cổ điển vòm công xôn trung tâm khi dùng nó tính toán lựa chọn cấu tạo tối ưu của đập vòm giữa hàng ngàn phương án một cách nhanh chóng. Từ đây chúng ta cũng thấy được thế mạnh của phần mềm Mathcad khi giải tích các bài toán

kỹ thuật cổ điển trong việc tính toán thiết kế công trình thủy lợi nói riêng và công trình xây dựng nói chung, qua đó hỗ trợ các kỹ sư phân tích, kiểm tra kết quả tính toán bằng các phần mềm thương mại, để loại trừ các kết quả tính toán không hợp lý và phát hiện ra nhầm lẫn dữ liệu đầu vào các phần mềm tính toán mà hầu như đa số kỹ sư không kiểm soát được do không hiểu bản chất nội dung lập trình của các phần mềm này.

#### **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1] M.M. Grisin và những người khác, Đập bê tông (trên nền đá); Nhà xuất bản xây dựng Matxcova, 1975(Tiếng Nga).
- [2] V.Z. Vlasov, N.N. Leonchiep , Rầm, bản và kết cấu ống mỏng trên nền đàn hồi; Matxcova, 1960 (Tiếng Nga).
- [3] Đào Tuấn Anh, Trạng thái ứng suất biến dạng không gian của đập đất có thiết bị chống thấm mỏng; Luận án Tiến Sĩ, Trường Đại học tổng hợp xây dựng quốc gia Matxcova, 2002(Tiếng Nga).

#### **Abstract:**

#### **ANALYZING THE PROBLEM OF CENTRAL ARCH-CONSOLE IN MATHCAD ENVIRONMENT USING METHOD OF VARIATION IN CASE OF DAM TOE RIGIDLY RESTRAINED BY THE FOUNDATION**

**Dr. Dao Tuan Anh**

*The success in analyzing the problem of arch dam stresses using method of central arch-console in MathCad environment in comparison with calculated results using Finite Element Method (FEM) is considered a proof of the advantage of this software (MathCad) in analyzing classically technical problems and assisting analytical engineers, in verifying the design of construction works in general and hydraulic works in particular using commercial softwares, most of which cannot be controlled as the essence of their programming contents is incomprehensible.*