

**CHUYỂN PHA LƯỢNG TỬ TRONG HỆ BOSON  
HAI THÀNH PHẦN KHI THỂ HOÁ HỌC THAY ĐỔI****Đặng Thị Minh Huệ<sup>1</sup>, Nguyễn Tuấn Anh<sup>2</sup>**

**Tóm tắt:** Chuyển pha lượng tử là hệ chuyển từ trạng thái lượng tử này sang trạng thái lượng tử khác khi thể hoá hoặc hằng số liên kết thay đổi, đạt đến giá trị tới hạn (đi qua điểm chuyển pha) ở nhiệt độ gần 0K. Các kịch bản chuyển pha lượng tử được xác định qua việc khảo sát sự phụ thuộc vào thể hoá hoặc hằng số liên kết ở mỗi giá trị nhiệt độ cực thấp của các tham số trật tự đặc trưng cho hệ. Bài báo này trình bày những kết quả nghiên cứu về chuyển pha lượng tử trong hệ boson hai thành phần hoà tan nhờ sử dụng phương pháp tác dụng hiệu dụng Cornwall-Jackiw-Tomboulis trong gần đúng bong bong kép cải tiến. Kết quả cho thấy chuyển pha lượng tử trong hệ là chuyển pha loại hai, xảy ra theo một trong hai kịch bản: chuyển pha phục hồi đối xứng hoặc chuyển pha phá vỡ đối xứng nghịch đảo.

**Từ khóa:** giá trị tới hạn, tham số trật tự, thể hiệu dụng, phục hồi đối xứng, phá vỡ đối xứng nghịch đảo.

**1. ĐẶT VẤN ĐỀ**

Những năm gần đây, có nhiều công trình nghiên cứu về chuyển pha nhiệt trong hệ boson hai thành phần cả về lý thuyết lẫn thực nghiệm (Alexander L. F. and Christopher J. F., 2012; Anderson R. P et al, 2009; Cornell E. A. and Weiman C. E., 2002; Tran Huu Phat et al, 2009), Tuy nhiên, đối với hệ lượng tử ở nhiệt độ cực thấp, khi thể hoá học hoặc hằng số liên kết thay đổi, đạt đến giá trị tới hạn sẽ xảy ra chuyển pha lượng tử trong hệ (Moshe Gitterman, 2014), Nhưng, cho đến nay, có rất ít công trình nghiên cứu về chuyển pha lượng tử trong các hệ boson, đặc biệt là hệ boson hai thành phần hoà tan. Trong khi đó, sự phát triển của ngành công nghệ lượng tử rất cần thông tin đầy đủ về chuyển pha lượng tử trong các vật chất lượng tử, là vật liệu quan trọng trong các máy tính lượng tử trong tương lai. Như vậy, nghiên cứu về chuyển pha

lượng tử trong các hệ boson đang là một trong những bài toán hay, mang tính cấp thiết thời đại.

Ở nghiên cứu trước (Dang Thi Minh Hue, Nguyen Tuan Anh, 2016) chúng tôi đã khảo sát các kịch bản chuyển pha lượng tử trong các hệ boson đồng nhất. Ở bài báo này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu các kịch bản chuyển pha lượng tử đối với hệ boson hai thành phần khi thể hoá thay đổi để tìm ra các hiện tượng mới. Sử dụng phương pháp thể hiệu dụng Cornwall-Jackiw-Tomboulis (CJT) - là phương pháp hiện đại, chính xác và phù hợp với các nghiên cứu về chuyển pha (Amelino G. and So - Young Pi, 1993; Cornwall, J. M. et al, 1974) để khảo sát các kịch bản chuyển pha lượng tử.

Để đạt được mục tiêu nghiên cứu, chúng tôi sử dụng mô hình tương tác của hệ boson hai thành phần được biểu diễn bởi Lagrangian của hệ dưới đây:

$$\mathcal{L} = \phi^* \left( -i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m_1} \right) \phi + \psi^* \left( -i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m_2} \right) \psi - \mu_1 \phi^* \phi - \mu_2 \psi^* \psi + \frac{\lambda_1}{2} (\phi^* \phi)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\psi^* \psi)^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)(\psi^* \psi), \quad (1)$$

trong đó  $\mu_1, (\mu_2)$  là kí hiệu thể hóa học của

trường  $\phi, (\psi)$ ;  $m_1, (m_2)$  là khối lượng của nguyên tử boson loại thứ nhất và thứ hai;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$  là các hằng số liên kết và luôn dương:  $\lambda_i = \frac{4\pi\hbar^2 a_i}{m_i}$ ,

<sup>1</sup> Khoa Năng lượng, Trường Đại học Thủy lợi.

<sup>2</sup> Khoa Công nghệ năng lượng, Trường Đại học Điện lực.

$i = 1, 2$ ;  $a_i$  là các độ dài tán xạ sóng âm tương ứng với va chạm giữa các nguyên tử khác loại. Hay,

$$\lambda - \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \text{ với } m_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

Như vậy, các tham số điều khiển là nhiệt độ, thế hoá và hằng số liên kết.

Dựa trên (Tran Huu Phat et al, 2009), chúng tôi thu được thể hiệu dụng CJT trong gần đúng bong bong kép cải tiến – là phép gần đúng phức hồi định lý Goldstone:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\beta^{CJT}(\phi_0, D) = & -\mu_1 \phi_0^2 + \frac{\lambda_1}{2} \phi_0^4 - \mu_2 \psi_0^2 + \frac{\lambda_2}{2} \psi_0^4 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 \psi_0^2 + \frac{\lambda_1}{8} P_{11}^2 + \frac{\lambda_1}{8} P_{22}^2 + \frac{3\lambda_1}{4} P_{11} P_{22} \\ & + \frac{\lambda_2}{8} Q_{11}^2 + \frac{\lambda_2}{8} Q_{22}^2 + \frac{3\lambda_2}{4} Q_{11} Q_{22} + \frac{1}{2} \int_\beta \text{tr}[\ln D^{-1}(k) + D_0^{-1}(k)D(k) - 1] \\ & + \frac{1}{2} \int_\beta \text{tr}[\ln G^{-1}(k) + G_0^{-1}(k)G(k) - 1] \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} D_0^{-1}(k) = & \begin{pmatrix} \frac{\vec{k}^2}{2m_1} - \mu_1 + 3\lambda_1 \phi_0^2 & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\vec{k}^2}{2m_1} - \mu_1 + \lambda_1 \phi_0^2 \end{pmatrix}; \quad D^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{k}^2}{2m_1} + M_1 & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\vec{k}^2}{2m_1} + M_{1\phi} \end{pmatrix}; \\ M_1 = & -\mu_1 + 3\lambda_1 \phi_0^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda_1}{2} P_{11} + \frac{3\lambda_1}{2} P_{22} + \frac{\lambda}{4} Q_{11} + \frac{\lambda}{2} Q_{22}; \\ M_{1\phi} = & -\mu_1 + \lambda_1 \phi_0^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 + \frac{3\lambda_1}{2} P_{11} + \frac{\lambda_1}{2} P_{22} + \frac{\lambda}{4} Q_{11} + \frac{\lambda}{2} Q_{22}; \\ G_0^{-1}(k) = & \begin{pmatrix} \frac{\vec{k}^2}{2m_2} - \mu_2 + 3\lambda_2 \psi_0^2 & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\vec{k}^2}{2m_2} - \mu_2 + \lambda_2 \psi_0^2 \end{pmatrix}; \quad G^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{k}^2}{2m_2} + M_2 & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\vec{k}^2}{2m_2} + M_{2\psi} \end{pmatrix}; \\ M_2 = & -\mu_2 + 3\lambda_2 \psi_0^2 + \frac{\lambda}{2} \psi_0^2 + \frac{\lambda_2}{2} Q_{11} + \frac{3\lambda_2}{2} Q_{22} + \frac{\lambda}{4} P_{11} + \frac{\lambda}{2} P_{22}; \\ M_{2\psi} = & -\mu_2 + \lambda_2 \psi_0^2 + \frac{\lambda}{2} \psi_0^2 + \frac{3\lambda_2}{2} Q_{11} + \frac{\lambda_2}{2} Q_{22} + \frac{\lambda}{4} P_{11} + \frac{\lambda}{2} P_{22}, \end{aligned} \quad (4)$$

với

$$\begin{aligned} P_{aa} = & \int_\beta D_{ab}(k), \quad Q_{aa} = \int_\beta G_{ab}(k); \quad a, b = 1; 2 \\ \int_\beta f(k) = & T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(\omega_n, \vec{k}), \quad \omega_n = 2\pi nT. \end{aligned}$$

Từ (3) chúng tôi nhận được

#### a. Các phương trình khe

$$\frac{\delta \tilde{V}_\beta^{CJT}(\phi_0, \psi_0, D, G)}{\delta \phi_0} = 0 \Rightarrow M_{1\phi} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\delta \tilde{V}_\beta^{CJT}(\phi_0, \psi_0, D, G)}{\delta \psi_0} = 0 \Rightarrow M_{2\psi} = 0.$$

#### b. Các phương trình Schwinger - Dyson

Kết hợp với phương trình (4) nhận được

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{V}_\beta^{CJT}(\phi_0, \psi_0, D, G)}{\delta D} = 0 \Rightarrow D^{-1}(k) = & \begin{pmatrix} \frac{\vec{k}^2}{2m_1} + M_1 & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\vec{k}^2}{2m_1} \end{pmatrix}, \\ \frac{\delta \tilde{V}_\beta^{CJT}(\phi_0, \psi_0, D, G)}{\delta G} = 0 \Rightarrow G^{-1}(k) = & \begin{pmatrix} \frac{\vec{k}^2}{2m_2} + M_2 & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\vec{k}^2}{2m_2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

Sử dụng thế hoá hiệu dụng

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_1 &= \mu_1 - \frac{3\lambda_1}{2}P_{11} - \frac{\lambda_1}{2}P_{22} - \frac{\lambda}{4}Q_{11} - \frac{\lambda}{2}Q_{22}; \\ \bar{\mu}_2 &= \mu_2 - \frac{3\lambda_2}{2}Q_{11} - \frac{\lambda_2}{2}Q_{22} - \frac{\lambda}{4}P_{11} - \frac{\lambda}{2}P_{22}.\end{aligned}$$

lúc này các phương trình khe được viết là

$$\lambda_1\phi_0^2 + \frac{\lambda}{2}\psi_0^2 = \bar{\mu}_1, \quad \lambda_2\psi_0^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2 = \bar{\mu}_2. \quad (7)$$

Do đó chúng tôi thu được

$$\frac{\phi_0^2}{2} = \frac{2\bar{\mu}_1\lambda_2 - \bar{\mu}_2\lambda}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda^2} = \frac{A}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda^2}, \quad \frac{\psi_0^2}{2} = \frac{2\bar{\mu}_2\lambda_1 - \bar{\mu}_1\lambda}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda^2} = \frac{B}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda^2}. \quad (8)$$

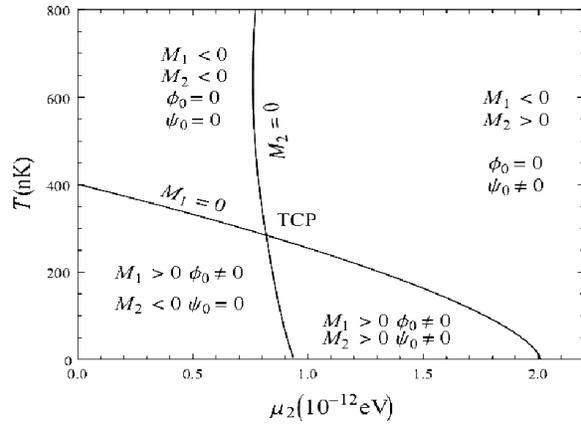
Các công thức (4) và (8) sẽ được sử dụng để khảo sát giản đồ pha. Từ đó đưa ra các kịch bản chuyển pha lượng tử khả dĩ trong hệ.

Bài báo này được trình bày với cấu trúc gồm ba mục với mục 2 là phần chính, trình bày các kết quả tính số về các kịch bản chuyển pha lượng tử và loại chuyển pha tương ứng. Kết luận của bài báo được trình bày ở mục 3.

## 2. CHUYỂN PHA LƯỢNG TỬ TRONG HỆ BOSON HAI THÀNH PHẦN

Ở phần này, chúng tôi thu được các kịch bản chuyển pha của hệ boson hai thành phần hai thành phần trộn lẫn khi thế hoá học của một thành phần thay đổi trong khi nhiệt độ và hằng số liên kết không thay đổi. Cụ thể, chúng tôi khảo sát bài toán mẫu đối với hệ hỗn hợp gồm vô số các nguyên tử  $^{85}Rb$  và  $^{87}Rb$  (có khối lượng rút gọn  $m_{12} = 80$  GeV).

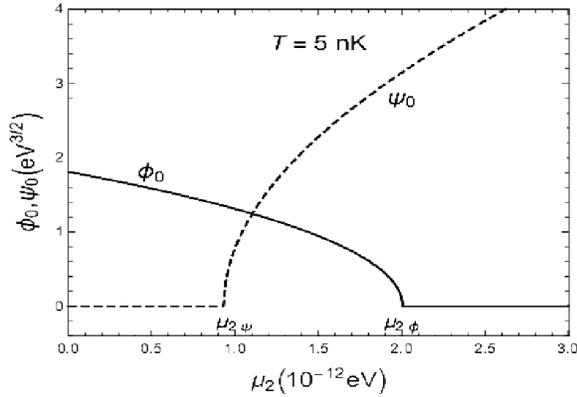
Để có được bức tranh tổng quát về các kịch bản chuyển pha khi hằng số liên kết bằng hằng số, chúng tôi vẽ giản đồ pha trên mặt phẳng  $(T, \mu_2)$  ứng với bộ tham số được chọn nằm trong vùng giá trị thực nghiệm của chúng (Alexander L. F. and Christopher J. F., 2012; Ketterle W., 1999) và thoả mãn điều kiện hệ gồm hai thành phần trộn lẫn (Tran Huu Phat et al, 2009). Ví dụ,  $\lambda_1 = 5.10^{-12}eV^{-2}$ ,  $\lambda_2 = 0,4.10^{-12}eV^{-2}$ ,  $\lambda = 2.10^{-12}eV^{-2}$ ,  $\mu_1 = 5.10^{-12}eV$ . Kết quả cho ở hình 1 dưới đây.



Hình 1. Giản đồ pha trên mặt phẳng  $(T, \mu_2)$  ứng với bộ tham số mẫu được chọn ở trên. Trong đó  $\phi_0, \psi_0$  là các tham số trật tự, các đường pha ứng với các tham số động lực  $M_1, M_2$  bằng không. TCP là điểm ba tới hạn.

Hình 1 cho thấy, với một giá trị không đổi của nhiệt độ, hệ sẽ trải qua chuyển pha lượng tử khi thế hoá thay đổi, xảy ra khi thế hoá  $\mu_2$  đạt giá trị tới hạn,  $\mu_2 = \mu_{2c}$  - là hoành độ điểm giao của đường thẳng  $T = \text{const}$  với đường  $A = 0, B = 0$ . Rõ ràng,  $\mu_{2c} \leq 2.10^{-12} eV$  phù hợp với khoảng giá trị có thể điều chỉnh trong thực nghiệm của thế hoá. Như vậy, trong thực nghiệm, bằng cách giữ nguyên số hạt của thành phần thứ nhất và thay đổi số hạt của thành phần thứ hai trong hệ đến khi  $\mu_2$  đạt giá trị tới hạn sẽ quan sát được chuyển pha lượng tử ở mỗi giá trị nhiệt độ cực thấp của hệ. Nếu thế hoá lớn hơn giá trị  $2.10^{-12} eV$ , sẽ không xuất hiện chuyển pha lượng tử trong hệ. Đặc biệt, với nhiệt độ của hệ được giữ không đổi và thấp hơn 400nK, khi điều chỉnh thế hoá, sẽ đồng thời xảy ra chuyển pha lượng tử.

tử đối với cả hai thành phần của hệ. Nếu nhiệt độ của hệ cao hơn 400nK, khi thay đổi thể hoá, chỉ tồn tại và xảy ra chuyển pha lượng tử đối với thành phần thứ hai của hệ.

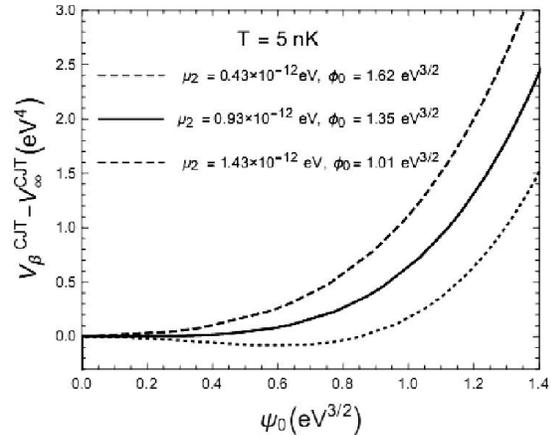
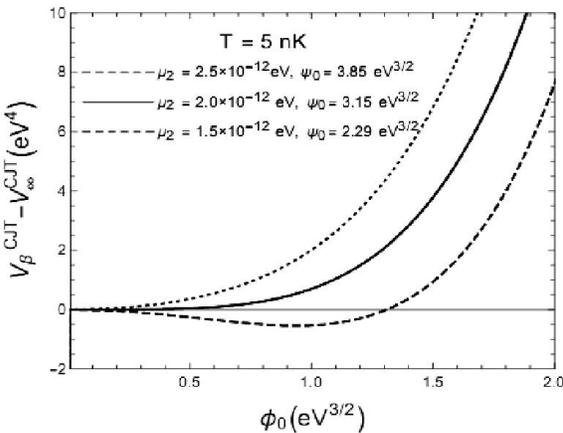


Hình 2. Sự phụ thuộc vào  $\mu_2$  của các tham số trật tự.

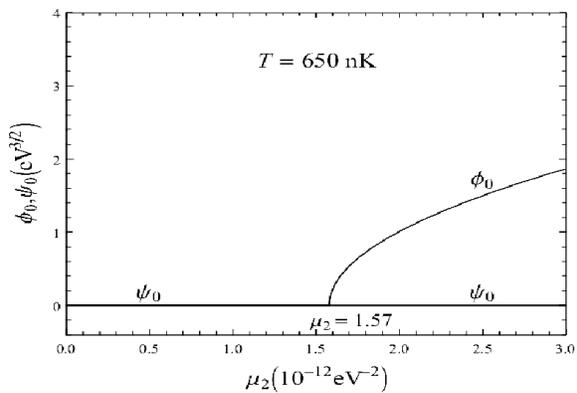
Để minh họa kết luận rút ra từ giản đồ pha và có được sự hiểu đầy đủ về các kịch bản chuyển

pha có thể xảy ra, trước tiên chúng tôi xét sự phụ thuộc vào thể hoá của các tham số trật tự  $\phi_0$ ,  $\psi_0$  tại giá trị cực thấp của nhiệt độ và bộ tham số được chọn của hình 1, ví dụ  $T = 5$ nK. Kết quả cho ở hình 2.

Hình 2 cho thấy rằng đối xứng của hệ bị phá vỡ (tham số trật tự  $\psi_0$  khác không) tại giá trị tới hạn của thể hoá  $\mu_2 = \mu_{c\psi} = 0,93 \cdot 10^{-12}$  eV  $> 0$ . Tức là xảy ra hiện tượng chuyển pha phá vỡ đối xứng nghịch đảo (ISB) đối với thành phần thứ hai khi thể hoá đạt tới giá trị tới hạn, trong khi xảy ra hiện tượng chuyển pha khôi phục đối xứng (SR) đối với thành phần thứ nhất khi thể hoá đạt giá trị tới hạn  $\mu_{c\phi} = 2 \cdot 10^{-12}$  eV. Sự biến thiên đơn điệu của các tham số trật tự theo  $\mu_2$  cũng cho thấy sự chuyển pha là loại hai. Điều đó được khẳng định một lần nữa ở hình 3, biểu diễn sự phụ thuộc vào các tham số trật tự của thể hiệu dụng  $\bar{V}_\beta^{CJT} - \bar{V}_\infty^{CJT}$  quanh giá trị tới hạn của thể hóa tại  $T = 5$ nK.



Hình 3. Sự phụ thuộc của thể hiệu dụng vào các tham số trật tự xung quanh giá trị tới hạn của thể hoá ở  $T = 5$ nK.



Hình 4. Sự phụ thuộc vào thể hoá  $\mu_2$  của các tham số trật tự tại  $T = 650$ nK.

Tiếp theo, chúng tôi xét sự phụ thuộc vào thể hoá  $\mu_2$  của các tham số trật tự ở nhiệt độ  $T = 650$  nK  $> 400$  nK. Kết quả cho ở hình 4: Rõ ràng chỉ xảy ra chuyển pha lượng tử đối với thành phần thứ hai trong hệ khi thể hoá  $\mu_2 = 0,77 \cdot 10^{-12}$  eV ứng với kịch bản chuyển pha là ISB và sự chuyển pha tương ứng cũng là loại hai. Tức là, có thể tạo ra các kịch bản pha mong muốn bằng cách đơn giản là điều chỉnh các tham số.

### 3. KẾT LUẬN

Bằng cách khảo sát các kịch bản chuyển pha lượng tử dựa trên giản đồ pha vẽ trên mặt phẳng

( $T, \mu$ ), chúng tôi đã thu được các kết quả mới như sau:

1. Hoàn toàn có thể quan sát được bằng thực nghiệm chuyển pha lượng tử trong hệ boson hai thành phần và chuyển pha là loại hai.

2. Tồn tại hai kiểu kịch bản chuyển pha

lượng tử khi thay đổi thể hoá đạt đến giá trị tới hạn. Đó là chuyển pha phục hồi đối xứng hoặc chuyển pha phá vỡ đối xứng nghịch đảo.

3. Kết quả nghiên cứu số góp phần cung cấp thông tin cho các nhà thực nghiệm trong lĩnh vực máy tính lượng tử.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alexander L. F. and Christopher J. F. (2012), *Bose gas: Theory and Experiment*, Contemporary Concepts of Condensed Matter Science 5, pp. 27-67.

Amelino G. and So - Young Pi (1993), *Self - consistent improvement of the finite - temperature effective potential*, Phys. Rev. D 47, 2356.

Anderson R. P., Ticknor C., Sidorov A. I., and Hall B. V. (2009), *Spatially inhomogeneous phase evolution of a two -component Bose - Einstein condensates*, Phys. Rev. A 80, 023603.

Cornell E. A. and Weiman C. E. (2002), Nobel Lecture: *Bose -Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments*, Rev. Mod. Phys. 74, 875.

Cornwall, J. M., Jackiw, R. and Tomboulis (1974), *Effective Action for Composite Operators*, Phys. Rev. D 10, 2428.

Dang Thi Minh Hue, Nguyen Tuan Anh (2016), Quantum phase transition in homogeneous boson systems, annual conference of Thuy Loi university.

Ketterle W. (1999), *Experimental studies of Bose-Einstein condensation*, Physics Today, December, pp. 30-35.

Moshe Gitterman (2014), *Phase Transitions Modern Application*, World Scientific, Singapore

Tran Huu Phat, Le Viet Hoa, Nguyen Tuan Anh, and Nguyen Van Long (2009), *Bose - Einstein condensation in binary mixtures of Bose gases*, Ann. Phys. (NY) 324, 2074.

### Abstract:

#### QUANTUM PHASE TRANSITION IN BINARY – MIXTURE BOSON SYSTEMS WHEN CHEMISTRY POTENTIAL CHANGED

*Quantum phase transition in binary-mixture boson systems is studied by means of the Cornwall–Jackiw–Tomboulis effective potential approach in the improved double-bubble approximation which preserves the Goldstone theorem. Its main feature is that the transition is second order occurring when the chemistry potential is approached to critical value associating with two types including inverse symmetry breaking transition and symmetry restoration transition.*

**Keywords:** Critical Value, Order Parameter, Effective Potential, Symmetry Restoration (SR), Inverse Symmetry Breaking (ISB).

---

*BBT nhận bài: 12/01/2017*

*Phản biện xong: 06/3/2017*