

MỘT CẢI TIẾN CỦA PHƯƠNG PHÁP TIMOSHENKO ÁP DỤNG PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH THANH THẲNG CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM

Nguyễn Hùng Tuấn¹, Lê Xuân Huỳnh², Đỗ Phương Hà¹

Tóm tắt : Bài báo trình bày một cải tiến của phương pháp Timoshenko để xác định lực tới hạn của thanh thẳng chịu nén đúng tâm. Thuật toán đề xuất được xây dựng trên cơ sở kết hợp giữa tiêu chuẩn kinh điển (tiêu chuẩn bình phương tối thiểu) và các phương pháp Sức bền vật liệu xác định hàm chuyển vị của thanh qua các vòng lặp, với ý nghĩa một - một trong quan hệ giữa lực tới hạn và đường đàn hồi. Các kết quả tính toán bước đầu cho thấy thuật toán đề xuất đưa đến nghiệm chính xác hơn phương pháp xấp xỉ liên tiếp và các phương pháp gần đúng khác.

Từ khóa : lực tới hạn, ổn định đàn hồi, tiêu chuẩn bình phương tối thiểu, phương pháp xấp xỉ liên tiếp, phương pháp tải trọng giả tạo.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Để giải bài toán mất ổn định loại một về dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng, có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau, trên cơ sở các tiêu chí về sự cân bằng ổn định, như tiêu chí dạng tĩnh học, tiêu chí dạng năng lượng, tiêu chí dạng động lực học (Lều Thọ Trình, nnk 2006). Trong các phương pháp này, các phương pháp gần đúng đóng vai trò quan trọng do thực tế, việc giải các phương trình vi phân để xác định nghiệm chính xác thường gặp nhiều khó khăn hoặc thậm chí không thực hiện được. Tuy nhiên, nhược điểm của một số phương pháp gần đúng thường được sử dụng, như phương pháp Rayleigh-Ritz, phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejune-Dirichlet, phương pháp Bubnov-Galerkin (Lều Thọ Trình, nnk 2006), là giá trị lực tới hạn thu được phụ thuộc rất nhiều vào hàm xấp xỉ (đường đàn hồi) được lựa chọn. Nếu hàm xấp xỉ được lựa chọn hợp lý, gần sát với đường đàn hồi thực, kết quả tính toán lực tới hạn thu được sẽ sát với thực tế. Ngược lại, nếu hàm xấp xỉ lựa chọn không sát với đường đàn hồi thực, kết quả tính toán lực tới hạn sẽ có sai lệch lớn so với thực tế. Điểm khó khăn ở đây là hàm xấp xỉ được lựa chọn chỉ căn cứ vào việc

thỏa mãn các điều kiện biên, trong đó chủ yếu là điều kiện biên về chuyển vị. Để khắc phục vấn đề trên, Timoshenko và Gere (Timoshenko, et al 1961) đã đề xuất phương pháp xấp xỉ liên tiếp (successive approximations method) để xác định lực tới hạn. Trong phương pháp này, trên cơ sở hàm xấp xỉ được lựa chọn, mô men uốn của thanh được xác định là hàm số của lực tới hạn P_{th} . Sau khi biết mô men uốn, ta có thể xác định chuyển vị của thanh theo các phương pháp Sức bền vật liệu (SBVL), như phương pháp tải trọng giả tạo, hoặc phương pháp tích phân bất định. Cân bằng giữa giá trị chuyển vị giả thiết (theo hàm xấp xỉ) với giá trị chuyển vị nhận được theo phương pháp SBVL, tại một vị trí cố định trên thanh sẽ được phương trình xác định lực tới hạn P_{th} . Quá trình này được lặp lại cho đến khi có sự sai lệch không đáng kể giữa chuyển vị giả thiết và chuyển vị tính toán, khi đó sẽ xác định lực tới hạn P_{th} gần sát với thực tế. Nhược điểm của phương pháp này là việc cân bằng chuyển vị tại các vị trí khác nhau trên thanh sẽ cho các giá trị lực tới hạn P_{th} khác nhau, và việc cân bằng chuyển vị này lại tạo thêm một "điều kiện biên" phụ về chuyển vị đối với hàm xấp xỉ. Để nâng cao độ chính xác trong việc xác định lực tới hạn P_{th} , trên cơ sở phương pháp xấp xỉ liên tiếp, bài báo này đề xuất một thuật toán lặp cải tiến xác định lực tới hạn của thanh thẳng chịu nén đúng

¹ Bộ môn Sức bền - Kết cấu, Trường Đại học Thủy lợi

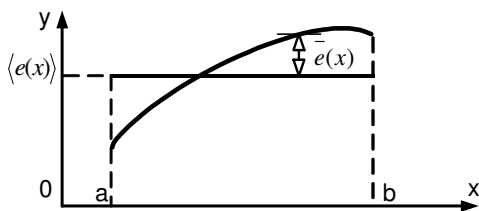
² Bộ môn Cơ học kết cấu, Trường Đại học Xây dựng

tâm. Trong thuật toán đề xuất, lực tới hạn tại mỗi vòng lặp được xác định theo tiêu chuẩn kinh điển (N.D.Anh, et al 2017), từ lực tới hạn này sẽ đưa ra hàm chuyển vị cho vòng lặp sau theo phương pháp SBVL (Phạm Ngọc Khánh, nnk 2006). Các ví dụ minh họa với các hàm xấp xỉ lựa chọn khác nhau chứng tỏ hiệu quả cải tiến của thuật toán đề xuất so với kết quả theo phương pháp xấp xỉ liên tiếp (Timoshenko, et al 1961), và một số phương pháp gần đúng khác (Lều Thọ Trình, nnk 2006).

2. XÂY DỰNG THUẬT TOÁN LẬP CẢI TIẾN PHƯƠNG PHÁP TIMOSHENKO

Trên cơ sở nhận xét quan hệ một - một giữa đường đàn hồi và lực tới hạn P_{th} , nghĩa là nếu sử dụng cùng một phương pháp, một đường đàn hồi chỉ cho một giá trị lực tới hạn P_{th} và ngược lại. Thuật toán đề xuất sẽ sử dụng một đường đàn hồi để đưa ra một giá trị lực tới hạn P_{th} , sau đó với giá trị P_{th} này sẽ xác định được một đường đàn hồi khác. Để xác định đường đàn hồi này, ta có thể sử dụng bất kỳ phương pháp SBVL nào, như phương pháp tải trọng giả tạo, hoặc phương pháp thông số ban đầu. Quá trình lặp được thực hiện cho đến khi giá trị lực tới hạn P_{th} của hai vòng lặp liên tiếp có sai lệch không đáng kể. Để xác định lực tới hạn P_{th} trên cơ sở đường đàn hồi giả thiết, thuật toán đề xuất sử dụng tiêu chuẩn kinh điển (N.D.Anh, et al 2017). Sau đây, sẽ trình bày cơ sở toán học của tiêu chuẩn kinh điển và thuật toán lập cải tiến.

2.1. Cơ sở toán học tiêu chuẩn kinh điển



Hình 1. Các đặc trưng thống kê của $e(x)$

Xét một hàm số $e(x)$ trên đoạn $[a, b]$ (Hình 1), ta có 2 đặc trưng thống kê của $e(x)$:

- Giá trị trung bình của $e(x)$

$$\langle e \rangle = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b e(x) dx = \frac{1}{(b-a)} \Omega_e \quad (1)$$

trong đó Ω_e - diện tích hình giới hạn bởi hàm số $e(x)$ và các đường thẳng $y = 0$ (trục hoành), $x=a$, $x=b$.

- Phương sai đặc trưng cho độ phân tán của $e(x)$ quanh giá trị trung bình của $e(x)$:

$$\langle e^2 \rangle = \sigma_e^2 = \langle (e(x) - \langle e \rangle)^2 \rangle = \langle e(x)^2 \rangle - \langle e \rangle^2 \quad (2)$$

Giả sử $e(x)$ là sai số của một kỹ thuật gần đúng phụ thuộc vào các tham số $a_1, a_2, \dots, a_n$. Để sai số là nhỏ nhất, ta cần giải bài toán tối ưu :

$$\left. \begin{aligned} \langle e(x, a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle^2 &\rightarrow \min \\ \sigma_e^2 = \langle e^2(x, a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle - \langle e(x, a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle^2 &\rightarrow \min \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Giải (3) ta được $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Để giải (3), có thể gộp 2 hàm mục tiêu thành hàm mục tiêu mới như sau

$$\alpha \langle e \rangle^2 + \beta \langle e^2 \rangle = \alpha \langle e \rangle^2 + \beta (\langle e^2 \rangle - \langle e \rangle^2) \rightarrow \min \quad (4)$$

trong đó $\alpha + \beta = 1$.

Hàm mục tiêu trong công thức (3) có dạng tương tự như cách giải bài toán tối ưu đa mục tiêu theo phương pháp trọng số (Kim, et al 2005). Giá trị α được xác định theo mức độ quan trọng tương đối giữa hai hàm mục tiêu $\langle e \rangle^2$ và $\langle e^2 \rangle$.

Từ công thức (4), khi cho $\alpha = \beta = 1/2$ ta được :

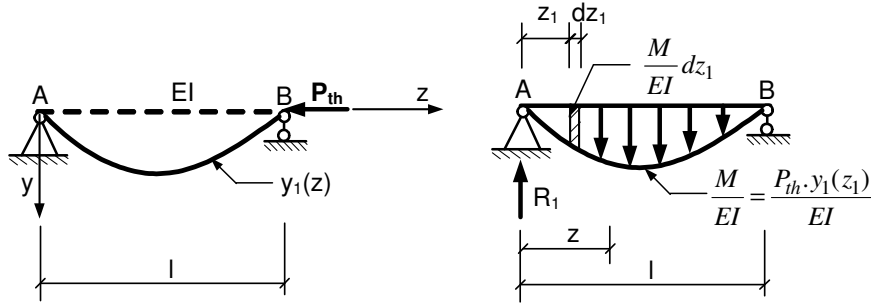
$$\frac{1}{2} \langle e \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle e^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle e \rangle^2 + \frac{1}{2} (\langle e^2 \rangle - \langle e \rangle^2) = \frac{1}{2} \langle e^2 \rangle \rightarrow \min \quad (5.a)$$

$$\text{hay } \langle e^2 \rangle \rightarrow \min \quad (5.b)$$

Nhận thấy (5.b) chính là tiêu chuẩn kinh điển (N.D.Anh, et al 2017), hay thường gọi là tiêu chuẩn bình phương tối thiểu được sử dụng trong lý thuyết xác suất và thống kê toán học (Nguyễn Cao Văn, nnk 2012). Tiêu chuẩn kinh điển cũng đã được sử dụng trong tính toán lực tới hạn của

thanh thẳng chịu nén đúng tâm, và cho kết quả tốt so với các phương pháp gần đúng khác (Nguyễn Hùng Tuấn, 2017).

2.2. Thuật toán lặp cải tiến phương pháp Timoshenko



Hình 2. Ổn định thanh thẳng hai đầu khớp chịu nén đúng tâm
a. Đường đàn hồi giả thiết b. Dầm giả tạo

Theo phương pháp dầm giả tạo, ta có

$$R_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{P_{th} y_1(z)(l-z)}{EI} dz \quad (6)$$

$$y_2(z) = R_1 z - \int_0^z \frac{P_{th} y_1(z)}{EI} (z-z_1) dz_1 \quad (7)$$

trong đó \$y_1(z)\$ - đường đàn hồi giả thiết

\$R_1\$ - phản lực trong dầm giả tạo, trường hợp này chính là góc xoay tại A.

Để xác định lực tới hạn \$P_{th}\$ trong vòng lặp đầu tiên, trong phương pháp xấp xỉ liên tiếp, Timoshenko và Gere đã đề xuất cân bằng \$y_1(z)\$ và \$y_2(z)\$ xác định theo (7) tại một vị trí cố định, cụ thể chọn tại giữa dầm \$z = l/2\$. Đối với vòng lặp thứ \$i\$, phương trình để xác định lực tới hạn :

$$\frac{1}{2} \left[\int_0^l \frac{P_{th,i} y_i(z)(l-z)}{EI} dz \right]_{z=l/2} - \left[\int_0^z \frac{P_{th,i} y_i(z)}{EI} (z-z_1) dz_1 \right]_{z=l/2} = y_i(z)_{z=l/2} \Rightarrow P_{th,i} \quad (8)$$

Với giá trị lực tới hạn vừa tìm được, thay vào (7) ta được đường đàn hồi \$y_2(z)\$ là đường đàn hồi giả thiết cho vòng lặp tiếp theo. Quá trình này lặp lại cho đến khi đường đàn hồi giữa 2 vòng lặp \$y_i(z)\$ và \$y_{i+1}(z)\$ chênh lệch nhau không đáng kể.

Có thể thấy, phương pháp xấp xỉ liên tiếp đã tìm một họ các đường đàn hồi thỏa mãn các điều kiện biên về chuyển vị và đi qua một điểm có giá trị độ võng định trước. Điều này sẽ tạo

Để làm rõ cải tiến của thuật toán lặp đề xuất với phương pháp xấp xỉ liên tiếp, sau đây sẽ phân tích ví dụ xác định lực tới hạn của thanh hai đầu khớp, thể hiện trên Hình 2.

thêm một "điều kiện biên" phụ về chuyển vị. Ngoài ra, với điểm định trước được lựa chọn khác nhau, sẽ cho các giá trị khác nhau của lực tới hạn. Do đó, Timoshenko cũng đề xuất cách xác định khoảng giá trị biên trên và biên dưới của lực tới hạn trong mỗi vòng lặp, thông qua việc khảo sát tỷ số \$y_2(z)\$ và \$y_1(z)\$.

Để khắc phục một số vấn đề nêu trên, thuật toán đề xuất cải tiến việc xác định lực tới hạn \$P_{th}\$ ban đầu bằng tiêu chuẩn kinh điển, theo hàm chuyển vị giả thiết \$y_1(z)\$. Đối với vòng lặp thứ \$i\$, trong thuật toán đề xuất, biểu thức xác định lực tới hạn :

$$P_{th,i} = - \frac{EI \langle y_i''(z) \cdot y_i(z) \rangle}{\langle y_i^2(z) \rangle} \quad (9)$$

Từ (9) nhận thấy, việc xác định lực tới hạn \$P_{th,i}\$ hoàn toàn chỉ phụ thuộc vào hàm chuyển vị \$y_i(z)\$, mà không phụ thuộc vào việc cân bằng chuyển vị giữa hàm chuyển vị \$y_i(z)\$ và \$y_{i+1}(z)\$ như phương pháp xấp xỉ liên tiếp. Nói cách khác, trong thuật toán đề xuất, các hàm chuyển vị \$y_i(z)\$ không nhất thiết phải là họ các đường cong đi qua một điểm đã định trước, được xác định theo hàm chuyển vị giả thiết ban đầu \$y_1(z)\$.

Sau khi xác định lực tới hạn \$P_{th}\$, tương tự như phương pháp xấp xỉ liên tiếp, sử dụng biểu

thức (7) để xác định biểu thức của đường đàn hồi $y_2(z)$. Quá trình này được lặp lại cho đến khi lực tới hạn P_{th} giữa hai vòng lặp liên tiếp chênh lệch nhau không đáng kể. Hình 3 thể hiện trình tự tính toán trong một vòng lặp đối với thuật toán đề xuất và phương pháp xấp xỉ liên tiếp.

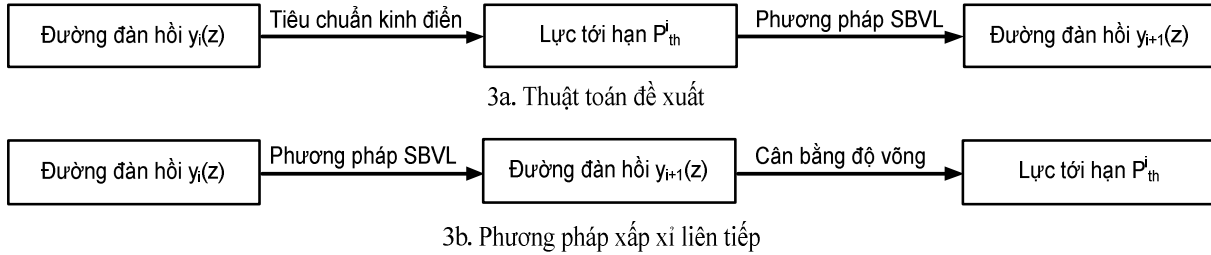
Trong thuật toán đề xuất, sử dụng tiêu chí sau để kết thúc quá trình lặp:

$$|\alpha^{i+1} - \alpha^i| \leq \varepsilon \quad (10)$$

trong đó $\alpha_i = P_{th}^i / (EI / l^2)$,

với P_{th}^i - lực tới hạn ở vòng lặp thứ i ;

ε - sai lệch cho phép, lấy bằng chữ số chắc (Doãn Tam Hòe, 2008) của α_i .



Hình 3. Trình tự tính toán trong một vòng lặp

3. VÍ DỤ MINH HỌA

3.1. Ví dụ 1

Xác định lực tới hạn của thanh thẳng, tiết diện không đổi, liên kết khớp hai đầu (Hình 2) với các hàm xấp xỉ được lựa chọn theo 3 phương án sau:

- a) $y_1(z) = z \cdot (1-z)$
- b) $y_1(z) = z^2 \cdot (1-z)^2$
- c) $y_1(z) = z^4 \cdot (1-z)^8$

Phương trình vi phân đường đàn hồi:

$$y'' = -\frac{P}{EI} y \Rightarrow e(z, P) = P y + EI y'' = 0 \quad (11)$$

1. Hàm xấp xỉ $y_1(z) = z \cdot (1-z)$

a. Tính toán theo thuật toán đề xuất

Kết quả tính toán theo thuật toán đề xuất, so sánh với phương pháp xấp xỉ liên tiếp qua các vòng lặp được thể hiện ở Bảng 1.

Bảng 1. Kết quả tính toán lực tới hạn thanh thẳng, hai đầu liên kết khớp qua các vòng lặp với hàm xấp xỉ bậc 2

Vòng lặp	Lực tới hạn P_{th} theo thuật toán đề xuất	Lực tới hạn P_{th} theo phương pháp xấp xỉ liên tiếp (Timoshenko, et al 1961)
1	$P_{th}^1 = 10 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^1 = 9.6 \frac{EI}{l^2}$
2	$P_{th}^2 = 9.8710 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^2 = 9.8361 \frac{EI}{l^2}$
3	$P_{th}^3 = 9.8696 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác	$P_{th}^3 = 9.8657 \frac{EI}{l^2}$
4	$P_{th}^4 = 9.8696 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác	$P_{th}^4 = 9.8691 \frac{EI}{l^2}$
5		$P_{th}^5 = 9.8696 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác
6		$P_{th}^6 = 9.8696 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác

b. Tính toán theo các phương pháp xấp xỉ khác
 - Theo phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejune - Dirichlet và phương pháp Rayleigh-Ritz

$$P_{th,R} = 12 \frac{EI}{l^2} \quad (12)$$

- Theo phương pháp Bubnov - Galerkin

$$P_{th,G} = 10 \frac{EI}{l^2} \quad (13)$$

c. So sánh kết quả giữa các phương pháp
 Nghiệm chính xác

$$P_{th,ex} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} = 9.8696 \frac{EI}{l^2} \quad (14)$$

Theo Bảng 1, thuật toán lặp đề xuất và phương pháp xấp xỉ liên tiếp đều cho cùng kết quả :

$$P_{th,pr} = P_{th,T} = P_{th,ex} = 9.8696 \frac{EI}{l^2} \quad (15)$$

Như vậy, thuật toán đề xuất và phương pháp xấp xỉ liên tiếp cho kết quả trùng với nghiệm chính xác, và có độ chính xác tốt hơn các phương pháp xấp xỉ khác. Tuy nhiên, thuật toán đề xuất hội tụ đến nghiệm chính xác nhanh hơn phương pháp xấp xỉ liên tiếp (qua 4 vòng lặp đã hội tụ đến nghiệm chính xác, so với 6 vòng lặp theo phương pháp xấp xỉ liên tiếp).

2. Hàm xấp xỉ $y_I(z) = z^2 \cdot (1-z)^2$

a. Tính toán theo thuật toán đề xuất

Thực hiện tính toán theo thuật toán đề xuất, qua 5 vòng lặp kết quả thu được

$$P_{th,pr}^5 = P_{th,pr}^4 = 9.8696 \frac{EI}{l^2} \quad (16)$$

Thực hiện tính toán theo phương pháp xấp xỉ liên tiếp, qua 20 vòng lặp, kết quả thu được

$$P_{th,T}^{20} = 9.7773 \frac{EI}{l^2} \quad (17.a)$$

$$P_{th,T}^{19} = 9.7765 \frac{EI}{l^2} \quad (17.b)$$

b. Tính toán theo các phương pháp khác
 - Theo phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejune - Dirichlet và phương pháp Rayleigh-Ritz

$$P_{th,R} = 42 \frac{EI}{l^2} \quad (18)$$

- Theo phương pháp Bubnov - Galerkin

$$P_{th,G} = 28.875 \frac{EI}{l^2} \quad (19)$$

c. So sánh kết quả giữa các phương pháp
 Nhận thấy, qua 5 vòng lặp, thuật toán đề xuất cho kết quả

$$P_{th,pr} = P_{th,ex} = 9.8696 \frac{EI}{l^2} \quad (20)$$

Qua 20 vòng lặp, phương pháp xấp xỉ liên tiếp cho kết quả

$$P_{th,T} = 9.7773 \frac{EI}{l^2} \quad (21)$$

Các phương pháp khác, như phương pháp Bubnov-Galerkin, phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejune - Dirichlet và phương pháp Rayleigh-Ritz có độ sai lệch lớn so với nghiệm chính xác: sai lệch 192.57% đối với phương pháp Bubnov-Galerkin, sai lệch 325.55% đối với phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejune - Dirichlet và pháp Rayleigh-Ritz. Sở dĩ có sai lệch lớn như vậy là do hàm xấp xỉ của đường đàn hồi giả thiết sai lệch lớn so với đường đàn hồi thực tế. Phương pháp xấp xỉ liên tiếp cải thiện được đáng kể sai lệch (sai lệch 0.94% so với nghiệm chính xác, qua 20 vòng lặp). Một lần nữa, thuật toán đề xuất lại cho kết quả trùng với kết quả nghiệm chính xác, đồng thời tốc độ hội tụ nhanh, mặc dù lực tới hạn ở vòng lặp đầu tiên của thuật toán đề xuất có sai lệch rất lớn với phương pháp xấp xỉ liên tiếp.

3. Hàm xấp xỉ $y_I(z) = z^4 \cdot (1-z)^8$

a. Tính toán theo thuật toán đề xuất

Kết quả tính toán theo thuật toán đề xuất, so sánh với phương pháp xấp xỉ liên tiếp qua các vòng lặp được thể hiện ở Bảng 2.

Bảng 2. Kết quả tính toán lực tới hạn thanh thẳng, hai đầu liên kết khớp qua các vòng lặp với hàm xấp xỉ bậc 12

Vòng lặp	Lực tới hạn P_{th} theo thuật toán đề xuất	Lực tới hạn P_{th} theo phương pháp xấp xỉ liên tiếp (Timoshenko, et al 1961)
1	$P_{th}^1 = 31.4286 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^1 = 9.2645 \frac{EI}{l^2}$
2	$P_{th}^2 = 10.8244 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^2 = 9.8944 \frac{EI}{l^2}$
3	$P_{th}^3 = 9.9270 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^3 = 9.8763 \frac{EI}{l^2}$
4	$P_{th}^4 = 9.8732 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^4 = 9.8705 \frac{EI}{l^2}$
5	$P_{th}^5 = 9.8698 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^5 = 9.8697 \frac{EI}{l^2}$
6	$P_{th}^6 = 9.8696 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác	$P_{th}^6 = 9.8697 \frac{EI}{l^2}$
7	$P_{th}^7 = 9.8696 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác	

b. Tính toán theo các phương pháp khác

- Theo phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejune - Dirichlet và phương pháp Rayleigh-Ritz

$$P_{th,R} = 95.5385 \frac{EI}{l^2} \quad (22)$$

- Theo phương pháp Bubnov - Galerkin

$$P_{th,G} = 31.4286 \frac{EI}{l^2} \quad (23)$$

c. So sánh kết quả giữa các phương pháp

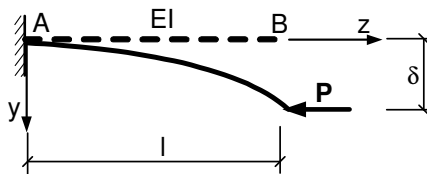
Trong trường hợp này, hàm xấp xỉ được lựa chọn chỉ thỏa mãn các điều kiện biên về chuyển vị, đặc biệt không đảm bảo tính đối xứng của đường đàn hồi thực như hai trường hợp trước. Tuy vậy, thuật toán lặp đề xuất vẫn cho kết quả trùng với kết quả của nghiệm chính xác, mặc dù kết quả lực tới hạn ở vòng lặp đầu tiên có sai lệch rất lớn so với kết quả của nghiệm chính xác và kết quả ở vòng lặp đầu tiên của phương pháp xấp xỉ liên tiếp.

3.2. Ví dụ 2

Xác định lực tới hạn của thanh thẳng, tiết diện không đổi, đầu ngàm, đầu tự do (Hình 4)

với các hàm xấp xỉ được lựa chọn theo 2 phương án sau

$$a) y_1(z) = \delta \cdot \frac{z^4}{l^4} \quad b) y_1(z) = \delta \cdot \frac{z^8}{l^8}$$



Hình 4. Ổn định thanh thẳng đầu ngàm, đầu tự do chịu nén đúng tâm

Phương trình vi phân đường đàn hồi

$$y'' = \frac{P}{EI}(\delta - y) \Rightarrow e(z, P) = EI y'' + P y - P \delta = 0 \quad (24)$$

$$1. \text{Hàm xấp xỉ } y_1(z) = \delta \cdot \frac{z^4}{l^4}$$

a. Tính toán theo thuật toán đề xuất

Kết quả tính toán theo thuật toán đề xuất, so sánh với phương pháp xấp xỉ liên tiếp qua các vòng lặp được thể hiện ở Bảng 3.

Bảng 3. Lực tới hạn thanh thẳng, tiết diện không đổi, đầu ngàm, đầu tự do, tính theo thuật toán đề xuất và phương pháp xấp xỉ liên tiếp qua các vòng lặp

Vòng lặp	Lực tới hạn P_{th} theo thuật toán đề xuất	Lực tới hạn P_{th} theo phương pháp xấp xỉ liên tiếp (Timoshenko, et al 1961)
1	$P_{th}^1 = 3.2143 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^1 = 2.1429 \frac{EI}{l^2}$
2	$P_{th}^2 = 2.4753 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^2 = 2.4273 \frac{EI}{l^2}$
3	$P_{th}^3 = 2.4675 \frac{EI}{l^2}$	$P_{th}^3 = 2.4627 \frac{EI}{l^2}$
4	$P_{th}^4 = 2.4674 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác	$P_{th}^4 = 2.4669 \frac{EI}{l^2}$
5	$P_{th}^5 = 2.4674 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác	$P_{th}^5 = 2.4673 \frac{EI}{l^2}$
6		$P_{th}^6 = 2.4674 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác
7		$P_{th}^7 = 2.4674 \frac{EI}{l^2}$ - nghiệm chính xác

b. Tính toán theo các phương pháp khác
 - Theo phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejune - Dirichlet và phương pháp Rayleigh-Ritz

$$P_{th,R} = 12.6 \frac{EI}{l^2} \quad (25)$$

- Theo phương pháp Bubnov- Galerkin

$$P_{th,G} = 19.2857 \frac{EI}{l^2} \quad (26)$$

$$2. \text{Hàm xấp xỉ } y_1(z) = \delta \cdot \frac{z^8}{l^8}$$

a. Tính toán theo thuật toán đề xuất
 Thực hiện tính toán theo thuật toán đề xuất, qua 5 vòng lặp kết quả thu được

$$P_{th,pr}^5 = P_{th,pr}^4 = P_{th,ex} = 2.4674 \frac{EI}{l^2} \quad (27)b$$

Tính toán theo các phương pháp khác

- Thực hiện tính toán theo phương pháp xấp xỉ liên tiếp, qua 7 vòng lặp, kết quả thu được

$$P_{th,T}^7 = P_{th,T}^6 = P_{th,ex} = 2.4674 \frac{EI}{l^2} \quad (28)$$

- Theo phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejune - Dirichlet và phương pháp Rayleigh-Ritz

$$P_{th,R} = 56.5385 \frac{EI}{l^2} \quad (29)$$

- Theo phương pháp Bubnov - Galerkin

$$P_{th,G} = 71.4 \frac{EI}{l^2} \quad (30)$$

3. So sánh kết quả giữa các phương pháp

Nghiệm chính xác là

$$P_{th,ex} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = 2.4674 \frac{EI}{l^2} \quad (31)$$

Tương tự như các kết quả ví dụ 1, thuật toán đề xuất và phương pháp xấp xỉ liên tiếp hội tụ đến giá trị chính xác của lực tới hạn, mặc dù

hàm xấp xỉ của đường đàn hồi ban đầu lựa chọn có sai lệch lớn so với đường đàn hồi thực. Trong đó, thuật toán đề xuất vẫn cho tốc độ hội tụ nhanh nhất, qua 5 vòng lặp so với 7 vòng lặp của phương pháp xấp xỉ liên tiếp.

4. KẾT LUẬN

Trên cơ sở phương pháp xấp xỉ liên tiếp, bài báo đã đề xuất một thuật toán lặp cải tiến xác định lực tới hạn của thanh thẳng chịu nén đúng tâm,

bằng cách kết hợp tiêu chuẩn kinh điển và xác định hàm chuyển vị theo các phương pháp của SBVL. Thông qua các ví dụ minh họa, với các hàm xấp xỉ được lựa chọn khác nhau, so sánh với phương pháp xấp xỉ liên tiếp và các phương pháp khác, nhận thấy thuật toán đề xuất làm tăng độ chính xác của kết quả tính toán, thậm chí có thể hội tụ đến nghiệm chính xác và tăng tốc độ hội tụ so với phương pháp xấp xỉ liên tiếp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Doãn Tam Hòe (2008), *Toán học tính toán*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.
- Phạm Ngọc Khánh, Nguyễn Ngọc Oanh, Đoàn Văn Đào, Đỗ Khắc Phương, Nguyễn Công Thắng (2006), *Sức bền vật liệu*, Nhà xuất bản Từ điển Bách khoa, Hà Nội.
- Lê Thọ Trình, Đỗ Văn Bình (2006), *Ổn định công trình*, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- Nguyễn Hùng Tuấn (2017), "*Một cách tiếp cận gần đúng giải bài toán ổn định thanh thẳng chịu nén đúng tâm*", Hội nghị khoa học thường niên Trường Đại học Thủy lợi, Hà Nội.
- Nguyễn Cao Văn, Trần Thái Ninh, Ngô Văn Thử (2012), *Lý thuyết xác suất và thống kê toán*, Nhà xuất bản Đại học kinh tế quốc dân.
- L.Y.Kim, O.L. de Weck (2005), "*Adaptive weighted sum method for multiobjective optimization: a new method for Pareto front generation*", Struct Multidisc Optim 29, pp. 149 - 158.
- N.D.Anh, N.Q.Hai, D.V.Hieu (2017), "*The Equivalent Linearization Method with a Weighted Averaging for Analyzing of Nonlinear Vibrating Systems*", Latin American Journal of Solids and Structures 14, pp. 1-18.
- Timoshenko & Gere (1961), *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill (17th Printing 1985).

Abstract:

AN INNOVATION OF TIMOSHENKO METHOD TO APPLY FOR ANALYZING ELASTIC STABILITY OF A COMPRESSED BAR

This paper presents an innovative of Timoshenko method for determining critical buckling load of a compressed bar. The idea of the proposed algorithm is based on combining the classic criterion (the least mean square error criterion) and the standard methods of strength of materials for determining the deflection functions by loops, which means one - one relation of critical load and the deflection. The first numerical results show that the proposed algorithm gives more accurate solutions than that of the successive approximations method and the difference methods.

Keywords: critical buckling load, elastic stability, the least mean square error criterion, the successive approximations method, the conjugate-beam method.

Ngày nhận bài: 29/11/2017

Ngày chấp nhận đăng: 13/01/2018