

ƯỚC LƯỢNG THÔNG SỐ PHÂN BỐ KRISTKY-MENKEL

Nghiêm Tiên Lam¹

Tóm tắt: Việc ứng dụng phân bố Kristky-Menkel (KM) để mô hình hóa các chuỗi số liệu thống kê thường chủ yếu sử dụng phương pháp tra bảng với hệ số thiên lệch C_S xác định theo kinh nghiệm. Việc xác định các thông số thống kê của phân bố Kristky-Menkel theo phương pháp mô-men (MoM) hay phương pháp tương tự tối đa (MoML) thường rất khó khăn. Bài báo này trình bày phương pháp xác định các thông số của phân bố thống kê Kristky-Menkel theo phương pháp log-lũy tích (MoLC). Hai ví dụ tính toán cho thấy, MoLC cho các giá trị thống kê như giá trị trung bình, hệ số phân tán C_V , hệ số thiên lệch C_S và đường tần suất KM rất phù hợp với các chuỗi số liệu. MoLC giúp xác định các thông số của phân bố KM một cách khách quan hơn so với phương pháp kinh nghiệm. MoLC cũng xác định các thông số của phân bố KM nhanh chóng và đơn giản hơn rất nhiều so với MoM và MoML.

Từ khóa: Phân bố Kristky-Menkel, phương pháp log-lũy tích, lũy tích loại 2.

1. MỞ ĐẦU

Phân bố Kristky-Menkel (KM) là một phân bố xác suất thường được dùng trong thủy văn. Phân bố KM có ưu điểm hơn so với phân bố Pearson loại III (P3) là không có các giá trị âm (Hà Văn Khôi, 2008). Phân bố KM được xây dựng từ phân bố P3 trong trường hợp $C_S = 2C_V$ (để thông số vị trí bằng 0) và phép đổi biến $x = az^b$ với z là biến số của phân bố P3, C_V là hệ số phân tán và C_S là hệ số thiên lệch của chuỗi số thống kê. Hàm mật độ xác suất của phân bố KM có dạng

$$f(x) = \frac{c^b}{a|b|\Gamma(c)} t^{c-b} e^{-t}, \quad t = c \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{b}}, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

Trong đó, x là giá trị của biến ngẫu nhiên, a là thông số tỷ lệ, b là thông số mũ, c là thông số hình dạng và $\Gamma(\cdot)$ là hàm gamma.

Phân bố KM còn được gọi là phân bố gamma tổng quát vì nó có thể trở thành một số phân bố xác suất quan trọng khác, bao gồm phân bố Pearson loại III (hay phân bố gamma ba thông số) khi $b = 1$; phân bố Weibull khi $c = 1$; phân bố hàm mũ khi $b = c = 1$; phân bố chuẩn khi $b = 0,5$ và $c = \infty$; phân bố log chuẩn khi $b = \infty$; phân bố Rayleigh khi $b = 0,5$ và $c = 1$; phân bố Nakagami khi $b = 0,5$.

Mô-men bậc r của phân bố KM có dạng

$$\mu_r = \int_0^\infty x^r f(x) dx = \frac{a^r}{c^{rb}} \frac{\Gamma(c+rb)}{\Gamma(c)} \quad (2)$$

Từ đây dẫn đến các thông số thống kê như sau:

$$\text{Giá trị trung bình } \bar{x} = \mu_1 = \frac{a}{c^b} \frac{\Gamma(c+b)}{\Gamma(c)} \quad (3)$$

Hệ số phân tán

$$C_V = \frac{\sqrt{\mu_2}}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\Gamma(c)\Gamma(c+2b)}{\Gamma^2(c+b)}} - 1 \quad (4)$$

Hệ số thiên lệch

$$C_S = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{1}{C_V^3} \left[\frac{\Gamma^2(c)\Gamma(c+3b)}{\Gamma^3(c+b)} - 3C_V^2 - 1 \right] \quad (5)$$

Việc xác định các thông số của phân bố KM theo phương pháp mô-men (*Method of Moments - MoM*) cần phải giải hệ hai phương trình (4) và (5) để xác định các thông số b và c . Tuy nhiên, hiện nay chưa có phương pháp nào hiệu quả để có thể giải được hệ phương trình này. Do vậy, việc ứng dụng phân bố KM từ trước đến nay vẫn chủ yếu dựa trên phương pháp thủ công sử dụng một số bảng tra đã tính sẵn cho các giá trị C_V và tỷ số $m = C_S/C_V$ và phụ thuộc vào kinh nghiệm của người sử dụng. Điều này làm hạn chế việc ứng dụng phân bố KM trong các phần mềm tính toán tần suất và phân tích thống kê.

Cũng đã có nhiều nỗ lực trong việc xác định các thông số của phân bố KM bằng phương pháp tương tự tối đa (*Method of Maximum Likelihood - MoML*). Tuy nhiên, Lawless (2003) cho thấy rằng, sự hội tụ nghiệm theo MoML không phải khi nào cũng đạt được, kể cả với chuỗi thống kê có 200 điểm dữ liệu hoặc nhiều hơn. Hơn nữa, các phân bố có các thông số khác nhau khá nhiều nhưng MoML lại cho kết quả gần giống nhau nên dễ gây ra nhầm lẫn.

Nicolas (2002) giới thiệu phương pháp log-lũy tích (*Method of Log-Cumulants - MoLC*) để ước lượng thông số thống kê cho các đại lượng có giá trị dương như là các ảnh radar khẩu độ tổng hợp (SAR). Thay vì

¹Khoa Công trình, Trường Đại học Thủy lợi

sử dụng các giá trị mô-men dựa trên biến đổi Fourier hay biến đổi Laplace, MoLC sử dụng biến đổi Mellin để xác định các thống kê loại 2 là các log mô-men (*log-moments*) và log lũy tích (*log-cumulants*). Bài viết này sẽ trình bày việc ứng dụng MoLC để xác định các thống số cho phân bố KM.

2. PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN

2.1 Phương pháp MoLC

Cho biến ngẫu nhiên có giá trị dương X với hàm mật độ xác suất $f_X(x)$, hàm đặc tính loại 2 thứ nhất được định nghĩa là biến đổi Mellin của $f_X(x)$ (Nicolas, 2002):

$$\phi_X(s) = M[f_X(x)](s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f_X(x) dx \quad (6)$$

Trong đó, M là toán tử biến đổi Mellin. Hàm đặc tính loại 2 thứ hai được tính theo logarith tự nhiên của $\phi_X(s)$ là

$$\varphi_X(s) = \ln[\phi_X(s)] \quad (7)$$

Mô-men đặc tính loại 2 (log-moment) bậc r sử dụng các đặc điểm của biến đổi Mellin là (Nicolas, 2002):

$$\tilde{m}_r = \left. \frac{d^r \phi_X(s)}{ds^r} \right|_{s=1} = \int_0^{+\infty} (\ln x)^r f_X(x) dx \quad (8)$$

Đạo hàm bậc r của $\varphi_X(s)$ tại $s = 1$ là lũy tích loại 2 (*second kind cumulants*, hay *log-cumulants*) bậc r :

$$\tilde{k}_r = \left. \frac{d^r \varphi_X(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \quad (9)$$

Mối quan hệ giữa biến đổi Mellin và các mô-men của biến ngẫu nhiên như sau

$$\phi_X(s) = E(X^{s-1}) \quad (10)$$

Về mặt giải tích, các lũy tích loại 2 (*second-kind cumulants*) được thiết lập theo cách tương tự như các lũy tích truyền thống. Do vậy, mối quan hệ giữa

log lũy tích và log mô-men cũng tương tự như quan hệ giữa các lũy tích và các mô-men thông thường như sau

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= \tilde{m}_1 \\ \tilde{k}_2 &= \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tilde{k}_3 = \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_1\tilde{m}_2 + 2\tilde{m}_1^3$$

Dựa trên (8), nhận được các quan hệ giống như đối với các lũy tích thông thường (cho $\ln X$) như sau

$$\begin{aligned} k_1 &= E\{\ln X\} \\ k_r &= E\left\{\left[\ln X - \hat{k}_1\right]^r\right\}, \quad r = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Sử dụng các ước lượng mẫu của mô-men trung tâm dẫn đến các biểu thức kinh nghiệm

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln x_j \\ k_2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ln x_j - \hat{k}_1)^2 \\ k_3 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ln x_j - \hat{k}_1)^3 \end{aligned} \quad (13)$$

Trong đó, n là số giá trị quan sát hay độ dài mẫu, x_j là giá trị quan sát thứ j của mẫu. Hệ phương trình này định nghĩa phương pháp MoLC và dẫn đến một phương pháp ước lượng các thống số thống kê của phân bố xác suất dựa trên các giá trị quan sát bằng cách biểu diễn hàm đặc tính loại 2 dưới dạng hàm số của các thống số rồi giải bài toán ngược.

2.2 Ứng dụng MoLC xác định thông số phân bố KM

Với hàm mật độ xác suất (1), hàm $\phi_X(s)$ có thể nhận được dựa trên các phương trình (8) và (2) như sau:

$$\begin{aligned} k_r &= \left. \frac{d^r}{ds^r} \ln \phi_X(s) \right|_{s=1} = \left. \frac{d^r}{ds^r} \ln \left\{ \frac{a^{s-1}}{c^{(s-1)b}} \frac{\Gamma[c+(s-1)b]}{\Gamma(c)} \right\} \right|_{s=1} \\ &= (\ln a - b \ln c) \frac{d^r}{ds^r} (s-1) \Big|_{s=1} + \left. \frac{d^r}{ds^r} \ln \Gamma[c+(s-1)b] \right|_{s=1} \end{aligned} \quad (14)$$

Do vậy, ba giá trị lũy tích loại 2 đầu tiên là

$$\begin{aligned} k_1 &= (\ln a - b \ln c) + b \frac{d}{ds} \ln \Gamma(c) = \ln a - b \ln c + b\psi(c) \\ k_2 &= \left. \frac{d^2}{ds^2} \ln \Gamma[c+(s-1)b] \right|_{s=1} = b^2 \psi_1(c) \\ k_3 &= \left. \frac{d^3}{ds^3} \ln \Gamma[c+(s-1)b] \right|_{s=1} = b^3 \psi_2(c) \end{aligned} \quad (15)$$

Trong đó, $\psi(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ và $\psi_2(\cdot)$ lần lượt là các hàm psi (hàm polygamma) bậc 0, 1 và 2. Với phân bố KM, thông số c thường lớn hơn 1 cho nên có thể xấp xỉ các hàm này như sau (Abramowitz và Stegun, 1964):

$$\psi_1(c) \approx \frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2}, \quad \psi_2(c) \approx -\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^3} \quad (16)$$

Do vậy, nhận được các ước lượng xấp xỉ

$$k_2 \approx b^2 \left[\frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2} \right] \quad (17)$$

$$k_3 \approx b^3 \left[-\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^3} \right]$$

$$\tilde{c} = \frac{2\lambda - 3}{6} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (20)$$

Với

$$p = -\frac{\lambda + 3}{3}\lambda, \quad q = -\frac{8\lambda^2 + 36\lambda + 27}{108}\lambda \quad (21)$$

Sau khi đã tìm được ước lượng của c , thông số mũ b được xác định theo

$$\tilde{b} = \sqrt{\frac{k_2}{\psi_1(\tilde{c})}} \quad (22)$$

Cuối cùng, tính toán thông số tỷ lệ a theo

$$\tilde{a} = \exp \left[k_1 + \tilde{b} \ln \tilde{c} - \tilde{b} \psi(\tilde{c}) \right] \quad (23)$$

3. ỨNG DỤNG TÍNH TOÁN

Để minh họa cho việc xác định các thông số của phân bố KM theo MoLC, hai chuỗi số liệu được sử dụng là 1) chuỗi số liệu dòng chảy lũ của trạm Kratie trên sông Mekong từ năm 1924 – 1970 và 2) chuỗi số liệu dòng chảy năm của trạm Hòa Bình trên sông Đà từ năm 1956 – 1995. Thời gian của các chuỗi số liệu này được lựa chọn đều là các thời kỳ chưa xây dựng các đập thủy điện trên sông để đảm bảo tính đồng nhất của các chuỗi dữ liệu. Thông số thống kê của các chuỗi số liệu được sử dụng như trong Bảng 1.

Với các chuỗi số liệu đã có, để xác định các thông số của phân bố KM, việc đầu tiên là tính toán các lũy tích loại 2 (k_1 , k_2 và k_3) theo (13). Tiếp đó là xác định giá trị λ theo (18) rồi tính toán thông số hình dạng c theo (20) (là nghiệm của phương trình (19)). Cuối cùng là tính toán thông số mũ b theo (22) và thông số tỷ lệ a theo (23). Các thống số thống kê $\bar{Q}$, C_V và C_S được tính toán dựa trên các thông số của phân bố KM theo các công thức (3), (4) và (5). Các kết quả tính toán được tổng hợp trong Bảng 2.

Từ các thông số của Bảng 2, đường tần suất KM của các chuỗi số liệu được vẽ như trên Hình 1 và Hình 2. So sánh các kết quả tính toán ở Bảng 1 và Bảng 2 thấy rằng, các thông số thống kê như $\bar{Q}$ và

Đặt

$$\lambda = \frac{k_2^3}{k_3^2} = \frac{(2c+1)^3}{2^3(c+1)^2} \quad (18)$$

dẫn đến phương trình bậc 3 của c

$$8c^3 + 4(3-2\lambda)c^2 + 2(3-8\lambda)c + (1-8\lambda) = 0 \quad (19)$$

Giải phương trình (19) theo phương pháp Cardano (Kreith, 2012) và chỉ giữ lại giá trị nghiệm thực dương, nhận được ước lượng của thông số hình dạng c như sau:

C_V tính toán từ các lũy tích loại 2 rất gần với các giá trị thống kê của chuỗi số. Riêng hệ số thiên lệch C_S có sự sai khác lớn giữa Bảng 1 và Bảng 2.

Bảng 1. Các chuỗi số liệu được sử dụng

Chuỗi số liệu	Dòng chảy lũ trạm Kratie	Dòng chảy năm trạm Hòa Bình
Tên trạm	Kratie	Hòa Bình
Sông	Mekong	Đà
Thời kỳ số liệu	1924 – 1970	1956 – 1995
Độ dài chuỗi, n	47	39
Giá trị trung bình, $\bar{Q}$ (m ³ /s)	54119,802	637,187
Hệ số phân tán, C_V	0,115	0,224
Hệ số thiên lệch, C_S	-0,065	0,120

Bảng 2. Xác định các thông số thống kê của phân bố Kristky-Menkel

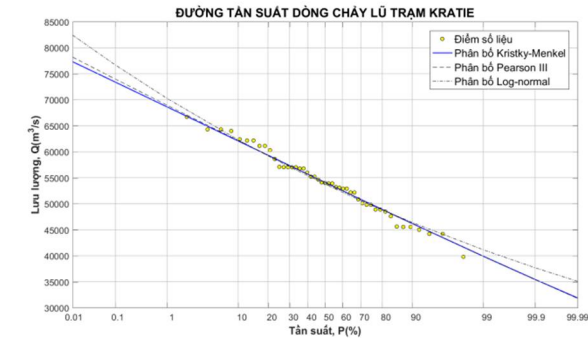
Chuỗi số liệu	Dòng chảy lũ trạm Kratie	Dòng chảy năm trạm Hòa Bình
Lũy tích k_1	10,892	6,432
Lũy tích k_2	0,013	0,052
Lũy tích k_3	-0,0005	-0,0046
Giá trị λ	9,774	6,915

Chuỗi số liệu	Dòng chảy lũ trạm Kratie	Dòng chảy năm trạm Hòa Bình
Thông số tỷ lệ, a (m ³ /s)	54738,067	647,700
Thông số mũ, b	0,362	0,600
Thông số hình dạng, c	10,208	7,327
Giá trị trung bình, $\bar{Q}$ (m ³ /s)	54120,021	637,231
Hệ số phân tán, C_V	0,114	0,223
Hệ số thiên lệch, C_S	0,032	0,302

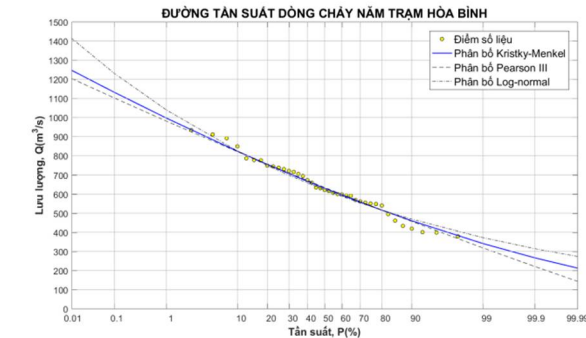
Giá trị C_S tính theo công thức mô-men trong Bảng 1 đã được biết đến rộng rãi là thường có sai số lớn (Phạm Văn Thoan, 2021), bị thiên nhỏ và không

phản ánh đúng sự bất đối xứng của chuỗi số thống kê đối với các chuỗi số có độ dài chuỗi n ngắn và thường bị ảnh hưởng nặng nề của các giá trị lịch sử. Do vậy, trong tính toán người ta thường ước lượng theo phương pháp “thích hợp” là $C_S = m \cdot C_V$, với m là hệ số kinh nghiệm.

Giá trị C_S tính theo MoLC ở Bảng 2 cho kết quả các đường tần suất lý luận của phân bố KM khá phù hợp với các điểm kinh nghiệm như thể hiện trong Hình 1 và Hình 2. Do vậy, Giá trị C_S tính theo MoLC cho kết quả khách quan hơn vì nó không phụ thuộc vào kinh nghiệm của người tính toán.



Hình 1. Đường tần suất dòng chảy lũ trạm Kratie



Hình 2. Đường tần suất dòng chảy năm trạm Hòa Bình

Phân bố KM cũng được so sánh với các phân bố thống kê hay dùng cho các chuỗi dòng chảy là phân bố Pearson III (P3) và phân bố log chuẩn (LN – Log-normal) (Alam *et al.*, 2018). Phân bố P3(a,b,c) có các thông số lần lượt là thông số vị trí a , thông số tỷ lệ b và thông số hình dạng c . Phân bố LN(a,μ,σ) có các thông số lần lượt là thông số vị trí a , trị bình quân μ và độ lệch chuẩn σ .

Các kiểm định thống kê Kolmogorov–Smirnov (K-S) và Anderson-Darling (A-D) sẽ được sử dụng để so sánh mức độ phù hợp của các phân bố so với số liệu (Alam *et al.*, 2018)

Chỉ tiêu kiểm định K-S là:

$$D = \max_{1 \leq i \leq n} |\hat{F}(x_i) - F(x_i)| = \max_{1 \leq i \leq n} |\hat{F}(x_i) - P_i| \quad (24)$$

Trong đó, $F(x_i)$ là tần suất lũy tích của điểm số liệu x_i , $F(x_i)$ là tần suất lũy tích của phân bố xác suất lý thuyết, n là độ dài chuỗi số liệu. Giá trị cực hạn

của kiểm định K-S với mức tin cậy 95% (hay mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$) là

$$D_{0,95} = \frac{1,36}{\sqrt{n}} \quad (25)$$

Phân bố xác suất được coi là phù hợp với các điểm số liệu nếu $D \leq D_{0,95}$. Phân bố xác suất cho sai số D nhỏ hơn sẽ được coi là tốt hơn.

Chỉ tiêu kiểm định A-D là:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \left\{ \ln[\hat{F}(x_i)] + \ln[1 - \hat{F}(x_{n-i+1})] \right\} \quad (26)$$

Giá trị hiệu chỉnh cho n nhỏ của A^2 và giá trị cực hạn của kiểm định A-D phụ thuộc vào loại phân bố xác suất. Tuy chưa có nghiên cứu nào sử dụng kiểm định A-D cho phân bố KM nhưng ở đây sẽ sử dụng giá trị A^2 để so sánh giữa các phân bố xác suất với nhau. Phân bố xác suất cho giá trị A^2 nhỏ hơn sẽ được coi là tốt hơn.

Bảng 3. So sánh phân bố Kristy-Menkel với phân bố Pearson III và Log-normal

Chuỗi số liệu	1) Dòng chảy lũ trạm Kratie			2) Dòng chảy năm trạm Hòa Bình		
Phân bố	KM(a,b,c)	P3(a,b,c)	LN(a,μ,σ)	KM(a,b,c)	P3(a,b,c)	LN(a,μ,σ)
Thông số 1	54738	-137100	340995	647,7	-1743,9	-2936,4
Thông số 2	0,362	203,664	12,567	0,600	8,527	8,181
Thông số 3	10,208	938,901	0,022	7,327	279,251	0,040
Giá trị D	0,080	0,079	0,082	0,076	0,071	0,081
Giá trị A^2	0,267	0,263	0,345	0,262	0,231	0,450

Các thông số thống kê và các chỉ tiêu kiểm định cho hai chuỗi số liệu nghiên cứu được trình bày trong Bảng 3. Đường tần suất lũy tích của các phân bố được trình bày trong Hình 1 và 2. Giá trị cực hạn $D_{0,95}$ của hai chuỗi số liệu 1) và 2) lần lượt là 0,198 và 0,218. Kết hợp với Bảng 3 cho thấy rằng, cả ba phân bố KM, P3 và LN đều phù hợp với các chuỗi số liệu theo kiểm định K-S. Với hai chuỗi số liệu được sử dụng, cả hai chỉ tiêu D và A^2 đều cho thấy, phân bố P3 là phù hợp nhất với các chuỗi số liệu còn phân bố KM cho các giá trị gần tương đương với phân bố P3 và tốt hơn phân bố LN.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày phương pháp xác định các thông số của phân bố thống kê Kristky-Menkel theo phương pháp log-lũy tích (MoLC). Phương pháp này bao gồm việc tính toán các lũy tích loại 2 theo (13) để từ đó xác định thông số hình dạng, thông số mũ

và thông số tỷ lệ của phân bố Kristky-Menkel theo các công thức (20), (22) và (23). Phương pháp MoLC được minh họa với hai ví dụ của chuỗi số liệu dòng chảy lũ tại trạm Kratie trên sông Mekong và chuỗi số liệu dòng chảy năm của trạm Hòa Bình trên sông Đà. Các kết quả tính toán cho thấy, MoLC cho phân bố Kristky-Menkel phù hợp với các điểm số liệu và các kết quả tính toán khách quan hơn so với phương pháp kinh nghiệm. So với phương pháp tương tự tối đa (MoML), MoLC có ưu điểm là cho kết quả tính toán nhanh và luôn có nghiệm vì MoML cần phải tính lặp và nhiều khi không hội tụ nghiệm. Điểm hạn chế của MoLC là chỉ áp dụng cho các chuỗi số liệu có giá trị dương (do phép tính log khi tính các lũy tích loại 2). Tuy nhiên, điểm hạn chế này có thể vượt qua bằng cách đổi biến sử dụng một thông số vị trí có giá trị âm để nhận được chuỗi số chỉ có giá trị dương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Hà Văn Khôi (chủ biên) (2008). *Giáo trình Thủy văn công trình*. Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và công nghệ. Hà Nội. 2008.
- Phạm Văn Thoan (2021). *Về đường tần suất lý luận theo phương pháp mô men trong xử lý số liệu quan trắc thủy văn công trình giao thông*. Cầu đường Việt Nam, 9:32-41.
- Abramowitz, M.; Stegun, I.A. (1964). "Section 6.4". *Handbook of Mathematical Functions*. New York. Dover Publications.
- Alam M.A., K. Emura, C. Farnham and J. Yuan (2018). *Best-Fit Probability Distributions and Return Periods for Maximum Monthly Rainfall in Bangladesh*. *Climate*, 6(1), 9.
- Kreith, K. (2012). Cardano's Method. <https://www.math.ucdavis.edu/~kkreith/tutorials/sample.lesson/cardano.html>
- Lawless, J.F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data (Second Edition)*. Wiley-Interscience. Hoboken, New Jersey. 2003.
- Nicolas, J.M. (2002). "Introduction to second kind statistics: application of Log-moments and Log-cumulants to SAR image law analysis", *Traitement du Signal*, 19(3):139–167.

Abstract:

PARAMETER ESTIMATION FOR KRISTKY-MENKEL DISTRIBUTION

The application of the Kristky-Menkel (KM) distribution to model statistical series often relies primarily on tabular methods with empirically determined coefficients of skewness (C_s). Parameter estimation for KM distribution using the Method of Moments (MoM) or the Method of Maximum Likelihood (MoML) is often very difficult. This paper presents the Method of Log-Cumulants (MoLC) for estimating the parameters of the KM distribution. Two calculation examples show that MoLC provides statistical values such as the mean, coefficient of variation C_v , coefficient of skewness C_s , and the frequency curve fit well with the data series. MoLC helps determine the parameters of the KM distribution more objectively than empirical methods. MoLC also determines the parameters of the KM distribution much faster and simpler than MoM and MoML.

Keywords: Kristky-Menkel distribution, Method of Log-Cumulants, second-kind cumulants.

Ngày nhận bài: 12/3/2026

Ngày chấp nhận đăng: 21/4/2026