

Phân tích chuyển động mô hình xe một bánh 9 bậc tự do

TS. PHẠM HOÀNG VƯƠNG

Trường Đại học Giao thông vận tải

TS. NGUYỄN TRƯỜNG GIANG

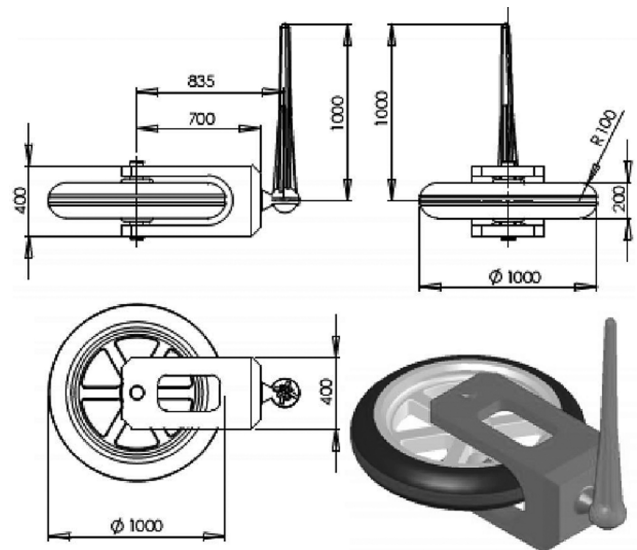
Bộ Khoa học và Công nghệ

Tóm tắt: Trong nghiên cứu này, mô hình xe một bánh với 9 bậc tự do được xây dựng và phân tích chuyển động với các ràng buộc cho trước. Hệ phương trình vi phân chuyển động của mô hình được thiết lập và giải tự động trên phần mềm Matlab. Kết quả phân tích chỉ ra một hướng mới trong việc ứng dụng phần mềm để mô phỏng và giải các bài toán động lực học của cơ hệ nhiều bậc tự do.

Từ khóa: Mô hình xe một bánh; phân tích chuyển động; 9 bậc tự do.

Abstract: An unicycle-pendulum model with 9 degrees of freedom is established and analyzed its motion with given constraints in this research. The system of differential equations of motion is established and solved automatically by using Matlab software. Analyzing results indicate a new method for applying software to simulate and solve dynamical problem of mechanical systems with high degrees of freedom.

Keywords: Unicycle-pendulum; Analyze motion; 9 degrees of freedom.



Hình 1: Mô hình xe một bánh 9 bậc tự do

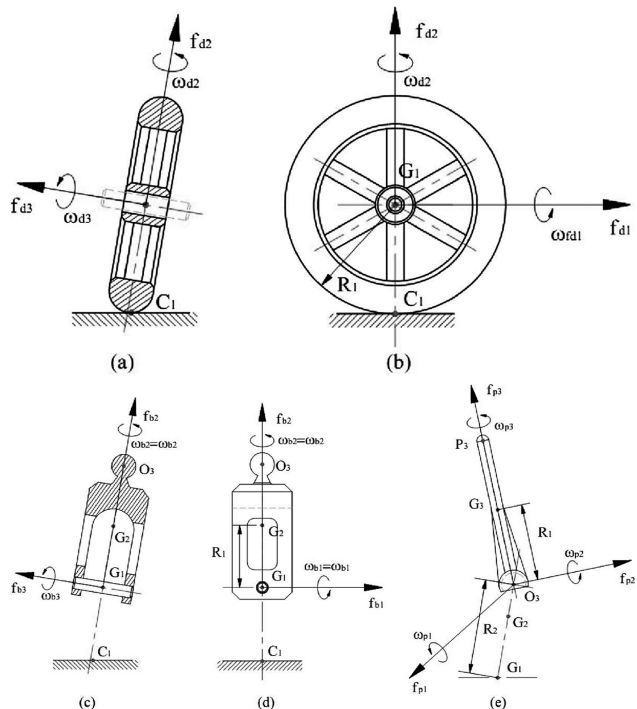
I. Giới thiệu tổng quan

Mô hình xe một bánh đã được nhiều người quan tâm nghiên cứu nhưng phần lớn các nghiên cứu chỉ dừng lại ở việc mô hình hóa thành các mô hình đơn giản với số bậc tự do hạn chế. Việc lập và giải hệ phương trình vi phân chuyển động của các mô hình đã đơn giản hóa đều được thực hiện một cách thủ công. Vì vậy, phương pháp này không thể áp dụng để giải các cơ hệ phức tạp với nhiều bậc tự do.

Hiện nay, với sự ra đời của nhiều phần mềm mô phỏng chuyển động, nhiều cơ hệ phức tạp được mô phỏng một cách trực quan. Người dùng có thể biết được các thông số động lực học của các phần tử của cơ hệ trong quá trình mô phỏng. Tuy nhiên, người dùng không thể sử dụng các thông số mô phỏng này để phát triển các ứng dụng khác như xây dựng mô hình kết hợp với các hệ điều khiển cho cơ hệ.

Mô hình xe một bánh được khảo cứu trong nghiên cứu này gồm 3 phần: Bánh xe có đường kính 1.000mm, càng xe có chiều cao là 835mm và thân xe được mô hình hóa như một con lắc ngược lắp trên càng xe có chiều dài là 1.000mm. Mô hình xe một bánh 9 bậc tự do với các kích thước cơ bản được mô tả chi tiết trong Hình 1.

Hình 2 (a,b) mô tả hình chiếu đứng và chiếu cạnh của bánh xe với hệ tọa độ suy rộng có gốc tọa độ gắn tại trọng tâm của bánh xe. Hệ tọa độ suy rộng của càng xe có gốc tọa độ gắn tại điểm G_1 (trọng tâm của bánh xe) được thể hiện trên Hình 2 (c,d). Hình 2 (e) mô tả hệ tọa độ suy rộng gắn trên con lắc ngược. G_1 , G_2 , G_3 lần lượt là trọng tâm của bánh xe, càng xe và con lắc ngược.



Hình 2: Các hệ tọa độ suy rộng gắn trên từng bộ phận của xe

II. Nội dung

1. Xây dựng hệ phương trình vi phân chuyển động

Đầu tiên ta xét chuyển động của bánh xe, trong nội dung nghiên cứu này, chuyển động của bánh xe được xem như chuyển động của một đĩa mỏng. Để mô tả chuyển động của bánh xe ta chọn thứ tự thay

đổi của ba góc Euler là 3-1-3, thứ tự này được mô tả như sau: Đầu tiên bánh xe quay quanh trục Z một góc ϕ làm hệ tọa độ xyz quay đến vị trí hệ trục mới là x', y', z' . Sau đó, bánh xe quay quanh trục x' một góc θ và cũng được hệ trục mới là x'', y'', z'' . Cuối cùng, bánh xe quay quanh trục z'' và thu được hệ trục mới là b_1, b_2, b_3 .

Lưu ý rằng: Trục x' là giao tuyến của mặt phẳng xy và mặt phẳng $x''y''$.

Trở lại với chuyển động của bánh xe, ta gắn hệ trục $x_d y_d z_d$ vào trọng tâm và ba góc Euler lần lượt là ϕ_1, θ_1, ψ_1 như trên Hình 2 (a, b). Véc tơ đơn vị của các trục $x_d y_d z_d$ và véc tơ đơn vị của các trục X Y Z được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{d1} &= c\phi_1 \mathbf{I} + s\phi_1 \mathbf{J} \\ \mathbf{f}_{d2} &= -s\phi_1 c\theta_1 \mathbf{I} + c\phi_1 c\theta_1 \mathbf{J} + s\theta_1 \mathbf{K} \\ \mathbf{f}_{d3} &= s\phi_1 s\theta_1 \mathbf{I} - c\phi_1 s\theta_1 \mathbf{J} + c\theta_1 \mathbf{K} \end{aligned} \quad (1)$$

Vận tốc góc của bánh xe được tính như sau:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_d &= \omega_{d1} \mathbf{f}_{d1} + \omega_{d2} \mathbf{f}_{d2} + \omega_{d3} \mathbf{f}_{d3} \\ &= \dot{\theta}_1 \mathbf{f}_{d1} + \dot{\phi}_1 s\theta_1 \mathbf{f}_{d2} + (\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1) \mathbf{f}_{d3} \end{aligned} \quad (2)$$

Xét quá trình quay của bánh xe có trượt, vận tốc của điểm tiếp xúc C_1 được tính như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C_1} &= \mathbf{v}_{G_1} + \boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{r}_{C_1/G_1} \\ &= \dot{X}\mathbf{I} + \dot{Y}\mathbf{J} + \dot{Z}\mathbf{K} + [\dot{\theta}_1 \mathbf{f}_{d1} + \dot{\phi}_1 s\theta_1 \mathbf{f}_{d2} + (\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1) \mathbf{f}_{d3}] \times (-R\mathbf{f}_{d2}) \\ &= [\dot{X} - R\dot{\theta}_1 s\phi_1 s\theta_1 + R(\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1) c\phi_1] \mathbf{I} \\ &\quad + [\dot{Y} + R\dot{\theta}_1 c\phi_1 s\theta_1 + R(\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1) s\phi_1] \mathbf{J} + (\dot{Z} - R\dot{\theta}_1 c\theta_1) \mathbf{K} \end{aligned} \quad (3)$$

Để trong quá trình trượt bánh xe vẫn luôn bám mặt đường thì vận tốc của điểm C_1 không có thành phần thẳng đứng và $\mathbf{v}_{C_1} \cdot \mathbf{K} = 0$. Từ đó ta có:

$$\dot{Z} = R\dot{\theta}_1 c\theta_1 \quad \text{or} \quad Z = R s\theta_1 \quad (4)$$

Mặt khác, nếu quá trình chuyển động của bánh xe không có trượt thì:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C_1} &= \mathbf{0} \text{ so} \\ \dot{X} &= R\dot{\theta}_1 s\phi_1 s\theta_1 - R(\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1) c\phi_1 \\ \dot{Y} &= -R\dot{\theta}_1 c\phi_1 s\theta_1 - R(\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1) s\phi_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Động năng của bánh xe được tính như sau:

$$\begin{aligned} T^d &= T_{\text{tran}}^d + T_{\text{rot}}^d \\ &= \frac{1}{2} m_d \mathbf{v}_{G_1} \cdot \mathbf{v}_{G_1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_d \cdot \mathbf{H}_{G_1}^d = \frac{1}{2} m_d \mathbf{v}_{G_1} \cdot \mathbf{v}_{G_1} + \frac{1}{2} (I_{G_1}^d \omega_{d1}^2 + I_{G_2}^d \omega_{d2}^2 + I_{G_3}^d \omega_{d3}^2) \\ &= \frac{1}{2} m_d (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} (I_{G_1}^d \dot{\theta}_1^2 + I_{G_2}^d \dot{\phi}_1^2 s^2 \theta_1 + I_{G_3}^d (\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1)^2) \end{aligned} \quad (6)$$

Thế năng của bánh xe là:

$$V^d = m_d g R s\theta_1 \quad (7)$$

Trong đó: T_{tran}^d và T_{rot}^d - Lần lượt là động năng tương ứng với chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của bánh xe.

Thực hiện các bước tương tự đối với cang xe và con lắc ngược, động năng và thế năng của cang xe và con lắc ngược được tính như sau:

- Động năng của cang xe:

$$\begin{aligned} T^b &= T_{\text{tran}}^b + T_{\text{rot}}^b \\ &= \frac{1}{2} m_b \mathbf{v}_{G_2} \cdot \mathbf{v}_{G_2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{H}_{G_2}^b = \frac{1}{2} m_b \mathbf{v}_{G_2} \cdot \mathbf{v}_{G_2} + \frac{1}{2} (I_{G_1}^b \omega_{b1}^2 + I_{G_2}^b \omega_{b2}^2 + I_{G_3}^b \omega_{b3}^2) \\ &= \frac{1}{2} m_b (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} (I_{G_1}^b \dot{\theta}_1^2 + I_{G_2}^b \dot{\phi}_1^2 s^2 \theta_1 + I_{G_3}^b (\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1)^2) \end{aligned} \quad (8)$$

Trong đó:

$$I_{G_1}^b = I_1^b + m_b R_2^2; \quad I_{G_2}^b = I_2^b; \quad I_{G_3}^b = I_3^b + m_b R_2^2 \quad (9)$$

Chú ý rằng:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{G_2/G_1} &= R_1 \mathbf{f}'_{b2} \\ \mathbf{f}'_{d2} &= -(c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi) \mathbf{I} + (-s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi) \mathbf{J} + s\theta c\psi \mathbf{K} \end{aligned} \quad (10)$$

- Thế năng của cang xe:

$$V^b = m_b g Z_{G_2} = m_b g (R + R_1 c\psi_2) s\theta_1 \quad (11)$$

- Động năng của con lắc ngược:

$$\begin{aligned} T^p &= T_{\text{tran}}^p + T_{\text{rot}}^p \\ &= \frac{1}{2} m_p \mathbf{v}_{O_3} \cdot \mathbf{v}_{O_3} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_p \cdot \mathbf{H}_{O_3}^p = \frac{1}{2} m_p \mathbf{v}_{O_3} \cdot \mathbf{v}_{O_3} + \frac{1}{2} (I_{O_3}^p \omega_{p1}^2 + I_{O_2}^p \omega_{p2}^2 + I_{O_3}^p \omega_{p3}^2) \\ &= \frac{1}{2} m_p \mathbf{v}_{O_3} \cdot \mathbf{v}_{O_3} + \frac{1}{2} (I_{O_3}^p \dot{\theta}_3^2 + I_{O_2}^p \dot{\phi}_3^2 s^2 \theta_3 + I_{O_3}^p (\dot{\phi}_3 c\theta_3 + \dot{\psi}_3)^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Trong đó:

$$I_{O_3}^p = I_1^p + m_p R_3^2; \quad I_{O_2}^p = I_2^p + m_p R_3^2; \quad I_{O_3}^p = I_1^p \quad (13)$$

Chú ý rằng:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{G_3/O_3} &= R_3 \mathbf{f}_{p3} \\ \mathbf{r}_{G_3} &= \mathbf{r}_{G_1} + \mathbf{r}_{O_3/G_1} + \mathbf{r}_{G_3/O_3} = R\mathbf{f}_{d2} + R_2 \mathbf{f}'_{b2} + R_3 \mathbf{f}_{p2} \\ Z_{G_3} &= \mathbf{r}_{G_3} \cdot \mathbf{K} \end{aligned} \quad (14)$$

- Thế năng của con lắc ngược:

$$V^p = m_p g Z_{G_3} \quad (15)$$

Từ các phương trình (6), (7), (8), (11), (12) và (15) ta thu được tổng động năng và thế năng của hệ là:

$$\begin{aligned} T &= T^d + T^b + T^p \\ &= \frac{1}{2} m_d (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} (I_{G_1}^d \dot{\theta}_1^2 + I_{G_2}^d \dot{\phi}_1^2 s^2 \theta_1 + I_{G_3}^d (\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_b (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} (I_{G_1}^b \dot{\theta}_1^2 + I_{G_2}^b \dot{\phi}_1^2 s^2 \theta_1 + I_{G_3}^b (\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_p \mathbf{v}_{O_3} \cdot \mathbf{v}_{O_3} + \frac{1}{2} (I_{O_3}^p \dot{\theta}_3^2 + I_{O_2}^p \dot{\phi}_3^2 s^2 \theta_3 + I_{O_3}^p (\dot{\phi}_3 c\theta_3 + \dot{\psi}_3)^2) \end{aligned} \quad (16)$$

$V = V^d + V^b + V^p$

$$\begin{aligned} &= m_d g R s\theta_1 + m_b g (R + R_1 c\psi_2) s\theta_1 + m_p g [(R + R_2 c\psi_2) s\theta_1 + R_3 c\theta_3] \\ &= (m_d + m_b + m_p) g R s\theta_1 + (m_b R_1 + m_p R_2) g c\psi_2 s\theta_1 + m_p g R_3 c\theta_3 \end{aligned} \quad (17)$$

Trong đó:

$$\mathbf{v}_{O_3} = \dot{X}\mathbf{I} + \dot{Y}\mathbf{J} + \dot{Z}\mathbf{K} + [\dot{\theta}_1 \mathbf{f}_{d1} + \dot{\phi}_1 s\theta_1 \mathbf{f}_{d2} + (\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1) \mathbf{f}_{d3}] \times R_2 \mathbf{f}'_{b2} \quad (18)$$

Các ràng buộc để bánh xe lăn không trượt như sau:

$$\begin{aligned} Z &= R s\theta_1 \\ \dot{X} &= R\dot{\theta}_1 s\phi_1 s\theta_1 - R(\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1) c\phi_1 \\ \dot{Y} &= -R\dot{\theta}_1 c\phi_1 s\theta_1 - R(\dot{\phi}_1 c\theta_1 + \dot{\psi}_1) s\phi_1 \end{aligned} \quad (19)$$

Áp dụng phương trình Lagrange cho cơ hệ có ràng buộc, hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ xe một bánh với 9 bậc tự do được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} &= \mathbf{F} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{X} &= [X \ Y \ Z \ \phi_1 \ \theta_1 \ \psi_1 \ \psi_2 \ \phi_3 \ \theta_3 \ \psi_3]^T \end{aligned} \quad (20)$$

Trong đó, các ma trận M, B, F được tính toán tự động nhờ chương trình lập trình sử dụng phần mềm Matlab.

2. Thiết lập ràng buộc cho quỹ đạo của điểm điểm P_3

Trong nghiên cứu này, chuyển động của bánh xe được phân tích với quỹ đạo ràng buộc của điểm P_3 là đường tròn bán kính $R_p = 1\text{m}$ và trên mặt phẳng cách mặt đất là $Z_p = 2\text{m}$. Phương trình ràng buộc của quỹ đạo điểm P_3 ở trường hợp này như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{P_3}(\mathbf{q}) &= R\mathbf{f}_{d2} + R_2 \mathbf{f}'_{b2} + 2R_3 \mathbf{f}_{p2} \\ &\quad - [R_p \cos(t) \ R_p \sin(t) \ Z_p]^T = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (21)$$

Các thông số sử dụng để mô phỏng bài toán như sau:

Khối lượng bánh xe $m_d = 5\text{kg}$

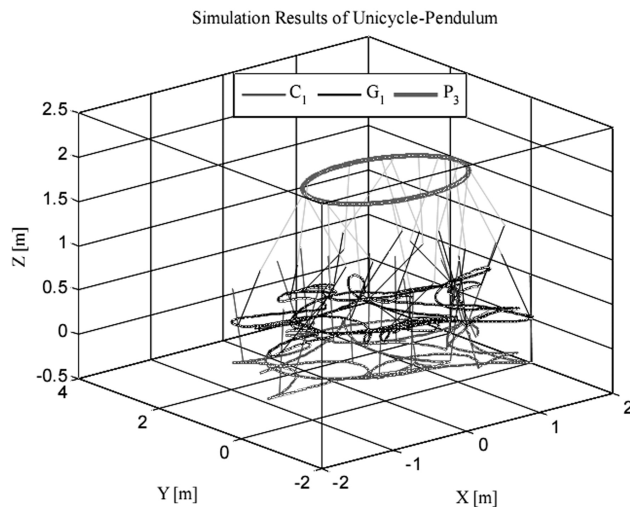
Khối lượng càng xe là $m_b = 3\text{kg}$

Khối lượng con lắc ngược là $m_p = 2\text{kg}$

Gia tốc trọng trường $g = 9,81\text{ m/s}^2$

Các thông số khác: $R = 0,5\text{m}$, $R_1 = 0,3\text{m}$, $R_2 = 0,835\text{m}$.

Hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ có kết hợp với các ràng buộc (bánh xe lăn không trượt trên mặt phẳng và quỹ đạo của điểm P_3 là đường tròn) được thiết lập và giải tự động nhờ chương trình lập trình sử dụng phần mềm Matlab. Kết quả mô phỏng được thể hiện trên Hình 3, 4 và 5.



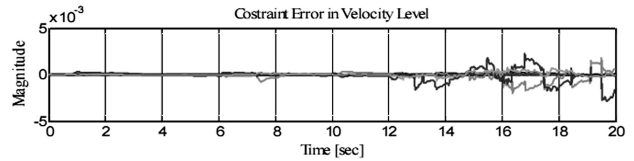
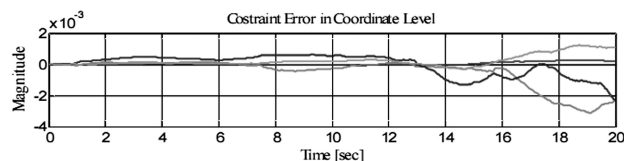
Hình 3: Quỹ đạo các điểm C_1 , G_1 và P_3 trong không gian 3 chiều

Hình 3 mô tả quỹ đạo của các điểm C_1 , G_1 khi điểm P_3 chuyển động theo đường tròn (đường màu hồng) với bán kính 1m. Đường màu đỏ là quỹ đạo của điểm tiếp xúc giữa bánh xe và mặt đường trong quá trình chuyển động. Đường màu xanh là quỹ đạo của trọng tâm bánh xe G_1 .

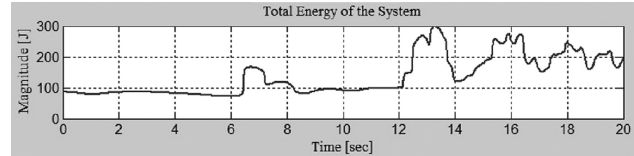
Hình 4 và 5 thể hiện sai số giữa quỹ đạo thực so với quỹ đạo yêu cầu của điểm P_3 và quá trình biến đổi năng lượng của mô hình xe một bánh. Kết quả mô phỏng cho thấy:

- Trong 12 giây đầu thì quá trình chuyển động ổn định, sai số quỹ đạo nhỏ và lượng biến động năng lượng nhỏ.

- Sau 12 giây quá trình chuyển động mất dần tính ổn định, sai số quỹ đạo tăng dần và lượng biến động năng lượng tăng dần. Vì vậy, phương pháp giải này cần phải kết hợp với các biện pháp hiệu chỉnh sai số của quỹ đạo ràng buộc để kết quả mô phỏng đạt độ chính xác cao hơn.



Hình 4: Sai số giữa quỹ đạo thực so với quỹ đạo yêu cầu của điểm P_3



Hình 5: Quá trình biến đổi năng lượng của mô hình xe một bánh 9 bậc tự do

III. Kết luận

Phương pháp giải và mô phỏng bài toán động lực học có ràng buộc của mô hình xe một bánh 9 bậc tự do ứng dụng phần mềm Matlab được trình bày chi tiết trong nghiên cứu này. Dựa trên cơ sở của phương pháp Lagrange và ứng dụng công cụ hỗ trợ của phần mềm Matlab, hệ phương trình vi phân chuyển động của bài toán động lực học được tự động thành lập và giải cùng với các ràng buộc của cơ hệ. Dựa trên những kết quả có được khi giải phương trình vi phân chuyển động, chuyển động thực của cơ hệ có ràng buộc được mô phỏng nhờ sử dụng công cụ mô phỏng 3D được cung cấp sẵn bởi phần mềm Matlab.

Dựa trên những kết quả nghiên cứu với cơ hệ cụ thể, phương pháp giải này có thể phát triển xa hơn với những cơ hệ phức tạp và nhiều bậc tự do hơn. Việc nắm vững phương pháp giải và mô phỏng chuyển động của cơ hệ ứng dụng Matlab sẽ là tiền đề cho việc ứng dụng Matlab để mô phỏng cho các hệ thống điều khiển của các cơ hệ □

Tài liệu tham khảo

- [1]. Haim Baruh, *Analytical Dynamics*, WCB McGraw-Hill, 1999.
- [2]. Hong Sheng Chin, *Stabilization methods for simulations of constrained multibody dynamics*, The University of British Columbia, 1995.
- [3]. Farif. M.L. Amirouche, *Computational Methods in Multibody Dynamics*, The University of Illinois at Chicago, 1992.
- [4]. <http://www.mathworks.com>.

Ngày nhận bài: 27/3/2014

Ngày chấp nhận đăng: 29/5/2014

Người phản biện: TS. Lê Lăng Vân

TS. Dương Huy Trung