

# MÔ HÌNH TOÁN TÍNH CHUYỂN TẢI BÙN CÁT KẾT DÍNH VÙNG VEN BIỂN PHẦN 1: MÔ HÌNH TÓAN

Nguyễn Thị Bầy<sup>(1)</sup>, Mạch Quỳnh Trang<sup>(2)</sup>

(1) Đại học Bách Khoa, Đại Học Quốc Gia tp Hồ Chí Minh.

(2) Đại học KHTN, Đại Học Quốc Gia tp Hồ Chí Minh.

(Bài nhận ngày 13 tháng 10 năm 2005)

**TÓM TẮT:** Trong bài báo này tác giả trình bày phương pháp tính toán chuyển tải bùn cát dính vùng ven biển. Cơ sở lý thuyết của phương pháp dựa vào lời giải hệ phương trình Reynolds, kết hợp với hệ phương trình chuyển tải bùn cát, lấy trung bình theo chiều sâu, có tính đến hàm số nguồn, mô tả tốc độ bốc lên hay lắng xuống của hạt. Mô hình tính được kiểm tra với nghiệm giải tích. Các kết quả tính được từ mô hình rất phù hợp với các kết quả tính được từ lời giải giải tích.

## 1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

### 1.1 Hệ phương trình tính toán dòng chảy

Hệ phương trình tính toán dòng chảy và điều kiện biên được trình bày kỹ trong /5/ như sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v &= -g \frac{\partial(\zeta)}{\partial x} - \frac{k u (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{h + \zeta} + A \Delta^2(u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u &= -g \frac{\partial(\zeta)}{\partial y} - \frac{k v (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{h + \zeta} + A \Delta^2(v) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta) u] + \frac{\partial}{\partial y} [(h + \zeta) v] &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Với:  $u, v$ : thành phần vectơ vận tốc trong tọa độ vuông góc (m/s);

$h$ : độ sâu (m);

$\zeta$ : mực thủy triều (m);

$t$ : thời gian (s);

$k$ : hệ số ma sát đáy;

$f$ : thông số Coriolic;

$A$ : hệ số rối theo phương ngang ( $m^2/s$ );

$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ : toán tử Laplace.

• **Điều kiện ban đầu:**  $u, v, \zeta$  cho cả miền tính bằng 0.

• **Điều kiện tại biên:**

*Trên biên lỏng:* cho dưới dạng tổng dao động cho các sóng triều.

*Trên biên cứng (bờ)* có điều kiện không thấm  $u_n = 0$ ; với  $n$  là phương vuông góc bờ.

### 1.2 Phương trình chuyển tải

Sự phân bố bùn cát lơ lửng theo không gian và thời gian được mô tả bởi phương trình hai chiều sau:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_v \left( u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} (HK_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} (HK_y \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{S}{H} \quad (2)$$

Trong đó:

- C: Nồng độ thể tích bùn cát lơ lửng trung bình theo chiều sâu (tính bằng  $\text{kg/m}^3$ )
- u, v: Thành phần vận tốc trung bình theo chiều sâu của dòng chảy theo phương x, y.
- $K_x, K_y$ : Hệ số khuếch tán rối theo phương x, y.
- S: Hàm số nguồn, mô tả tốc độ bốc lên hay lắng xuống của hạt (m/s).
- $\gamma_v$ : hệ số phân bố vận tốc và nồng độ theo chiều sâu.

• **Tính hàm số nguồn /3,4/:**

$$\begin{aligned} S &= E && \text{đối với } \tau_b > \tau_e \\ S &= -D && \text{đối với } \tau_b < \tau_d \\ S &= 0 && \text{đối với } \tau_d \leq \tau_b \leq \tau_e \end{aligned} \quad (3)$$

Với:

- E - Tốc độ bốc lên của hạt (m/s).
  - D - Tốc độ lắng xuống của hạt (m/s).
  - $\tau_b$  - Ứng suất tiếp đáy.  $\tau_b = \frac{1}{2} \rho k V^2$  với k là hệ số ma sát đáy ;  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$
- (4)
- $\tau_d$  - Ứng suất tiếp đáy tới hạn để hạt lắng xuống.
  - $\tau_e$  - Ứng suất tiếp đáy tới hạn để hạt bốc lên.

## 2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN

Một trong những phương pháp phổ biến nhất mà các tác giả khác trong nước và trên thế giới áp dụng để giải bài toán chuyển động bùn cát là phương pháp sai phân hữu hạn, với các điều kiện biên về nồng độ như sau:

- Trên biên cứng (bờ): áp dụng điều kiện phản xạ toàn phần:  $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$
- Trên biên lỏng, **khí nước từ miền tính chảy ra**, áp dụng điều kiện :  $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$
- Trên biên lỏng, **khí nước từ ngoài chảy vào miền tính**, áp dụng điều kiện :  $C=C_0$

Với cách xác định điều kiện biên trên biên lỏng như trên, khí nước từ miền tính chảy ra, biên lỏng được áp đặt điều kiện vật chất phản xạ toàn phần (mang đặc tính giống như biên cứng), điều này dẫn tới kết quả: khí nước chảy ra, vật chất không được thoát ra khỏi miền tính, mà cứ chạy vòng trong miền tính, không được trao đổi ra ngoài miền tính, do đó không hợp với thực tế.

Trong bài nghiên cứu này, tác giả cũng áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn để giải bài toán, nhưng **cải tiến** cách xác định điều kiện biên C trên biên lỏng khi nước chảy ra khỏi miền tính bằng phương pháp đường đặc trưng (như trong mục III. phần xác định điều kiện biên). Với cách xác định biên mà tác giả áp dụng, tránh được kết quả không hợp lý là vật chất không thể thoát ra khỏi miền tính khi nước chảy ra khỏi miền tính. g (bờ) có điều kiện không thấm  $u_n = 0$  ; với n là phương vuông góc bờ.

## 3. SƠ ĐỒ GIẢI

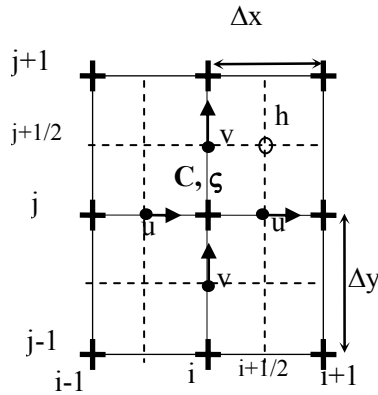
Hệ phương trình (1) được giải kết hợp với (2) bằng phương pháp sai phân hữu hạn, sơ đồ ẩn luân hướng ADI.

Nghiệm của bài toán được tính theo từng nửa bước thời gian:

- Tại nửa bước thời gian đầu  $t+1/2$ , thực hiện giải mực nước  $\zeta$  và vận tốc u (thành phần vận tốc theo phương x) ẩn, vận tốc v (thành phần vận tốc theo phương y) được giải hiện. Sau đó

kết hợp giải xen kẽ nồng độ C (với các thành phần theo phương x giải ẩn, theo phương y giải hiện).

Tại nửa bước thời gian sau t+1, mực nước  $\zeta$  và vận tốc v được giải ẩn, vận tốc u được giải hiện. Sau đó kết hợp giải xen kẽ nồng độ C (với các thành phần theo phương y giải ẩn, theo phương x giải hiện).



H.1 Lưới sai phân

**Lưới sai phân:**

Lưới tính toán của sơ đồ ADI được bố trí như sau: các thành phần u, v, C không được tính trên cùng một vị trí của lưới, mà sắp xếp xen kẽ như hình 1.

Sơ đồ giải hệ phương trình (1) được trình bày trong /5/. Ở đây chỉ trình bày phần sai phân hóa phương trình (2).

• **Giải nồng độ C cho nửa bước thời gian đầu**

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_{i,j}^{t+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^t}{\frac{\Delta t}{2}}$$

(5)

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{C_{i+1,j}^{t+\frac{1}{2}} - C_{i-1,j}^{t+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \tag{6}$$

$$v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{C_{i,j+1}^t - C_{i,j-1}^t}{2\Delta y} \tag{7}$$

$$\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left[ HK_x \frac{\partial C}{\partial x} \right] = \frac{1}{H_{i,j}^{t+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( HK_x \right)_{i+\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}} \frac{C_{i+1,j}^{t+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^{t+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \left( HK_x \right)_{i-\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}} \frac{C_{i,j}^{t+\frac{1}{2}} - C_{i-1,j}^{t+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right] \tag{8}$$

$$\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left[ HK_y \frac{\partial C}{\partial y} \right] = \frac{1}{H_{i,j}^{t+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta y} \left[ \left( HK_y \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \frac{C_{i,j+1}^t - C_{i,j}^t}{\Delta y} - \left( HK_y \right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \frac{C_{i,j}^t - C_{i,j-1}^t}{\Delta y} \right] \tag{9}$$

Sau khi thế các công thức sai phân 5,6,7, 8,9 vào phương trình (2) và rút gọn ta sẽ được phương trình có dạng:

$$a_i C_{i-1,j}^{t+\frac{1}{2}} + b_i C_{i,j}^{t+\frac{1}{2}} + c_i C_{i+1,j}^{t+\frac{1}{2}} = d_i^t \tag{10}$$

Với: 
$$a_i = -\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}}}{2 * 2\Delta x} \gamma_v - \frac{1}{(\Delta x)^2 H_{i,j}^{t+\frac{1}{2}}} (HK_x)_{i-\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$b_i = \frac{2}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ (HK_x)_{i+\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}} + (HK_x)_{i-\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}} \right] \quad (12)$$

$$c_i = -\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}}}{2 * 2\Delta x} \gamma_v - \frac{1}{(\Delta x)^2 H_{i,j}^{t+\frac{1}{2}}} (HK_x)_{i+\frac{1}{2},j}^{t+\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$d_i = \frac{C_{i,j}^t}{\frac{\Delta t}{2}} - \frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{C_{i,j+1}^t - C_{i,j-1}^t}{2\Delta y} \gamma_v + \left( \frac{S}{H} \right)_{i,j}^{t+\frac{1}{2}} + \frac{1}{(\Delta y)^2 H_{i,j}^{t+\frac{1}{2}}} \left[ (HK_y)_{i,j-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} (C_{i,j+1}^t - C_{i,j}^t) - (HK_y)_{i,j+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} (C_{i,j}^t - C_{i,j-1}^t) \right] \quad (14)$$

Viết hệ phương trình (10) với  $i=2$  đến  $n-1$ , ta thu được hệ gồm  $n-2$  phương trình,  $n$  ẩn số dạng ba đường chéo. Cùng với hai điều kiện biên đầu và cuối, ta giải hệ phương trình trên bằng phương pháp truy đuổi

• **Giải nồng độ C cho nửa bước thời gian sau**

Vẫn theo trình tự như trên, nhưng nồng độ C theo y được giải ẩn (tại bước thời gian  $t+1$ ), còn theo x giải hiện (tại  $t+1/2$ ).

• **Điều kiện biên của bài toán:**

**Các điểm trên biên rắn:**  $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$  (n là phương pháp tuyến với biên)

**Các điểm trên biên lỏng:**

Đây là bài toán mà trên biên lỏng, điều kiện biên về dòng chảy cho dưới dạng tổng dao động của các sóng triều, cho nên có những thời điểm nước sẽ chảy ra, vào hoặc song song biên. Để lời giải số được tốt hơn (không xuất hiện nghiệm âm trong vùng tính toán gần biên lỏng khi dòng chảy ra khỏi biên, hay dòng bùn cát chảy vòng như khi đặng biên cứng, ta cần xử lý điều kiện trên biên lỏng thật hợp lý. Ở đây, tác giả đề nghị xử lý điều kiện nồng độ trên biên như sau:

\* Khi nước chảy vào miền tính: nồng độ được cho trước  $C = C_b(t)$

\* Khi nước chảy song song biên lỏng (thành phần vận tốc vuông góc với biên bằng 0):  $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$

\* Khi dòng chảy từ miền tính hướng ra thì sử dụng điều kiện  $\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} = 0$  /6/. Khi đó, nồng độ tại

biên được tính thông qua quá trình tải, (quá trình khuếch tán được bỏ qua trong bước tính này). Nồng độ chất tại biên là nghiệm của phương trình tải và tính được theo phương pháp đường đặc trưng theo công thức  $C_B = C_A$

Với:  $C_B$  - nồng độ tại điểm cần tính (ở bước thời gian sau).

$C_A$  - nồng độ tại chân đường đặc trưng tại bước thời gian trước  $s$  - phương chuyển động của hạt từ lớp thời gian trước đến lớp thời gian sau, được chấp nhận xác định theo phương của vận tốc tại điểm trên biên trong kết quả tính toán của mô hình dòng chảy, kéo về lớp thời điểm trước.

Như vậy, với cách xử lý biên như trên ta có thể tránh được những trường hợp nghiệm âm C trong miền tính và vật chất được theo dòng chảy ra ngoài miền tính.

**4. KIỂM TRA MÔ HÌNH TOÁN**

Mô hình dòng chảy đã được kiểm tra với nghiệm giải tích và trình bày trong /5/. Sau đây là phần trình bày các kết quả kiểm tra mô hình chuyển tải bùn cát.

• **Lời giải giải tích hệ phương trình chuyển tải:**

Trong trường hợp miền tính đồng nhất, có chiều sâu không đổi, vận tốc  $u, v = \text{const}$ , hệ số khuếch tán rối  $K_x, K_y = \text{const}$ , có một nguồn tức thời đổ vào miền tính với khối lượng  $M$ , hệ phương trình (2) có nghiệm giải tích như sau / 1, 2/:

$$c(x, y, t) = \frac{M/H}{4\pi\sqrt{K_x K_y t}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{4K_x t} - \frac{(y-y_0-vt)^2}{4K_y t} - \frac{D}{H}t\right) \quad (15)$$

Trong đó:  $M$  là khối lượng bùn được đổ vào điểm tọa độ  $(x_0, y_0)$  trong miền tính bắt đầu tại thời điểm  $t > 0$ .

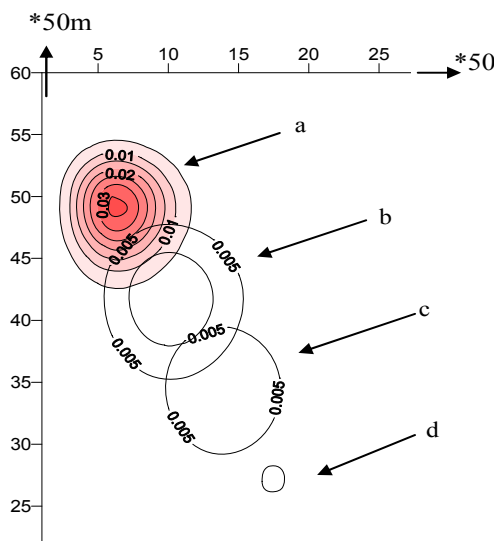
Các ký hiệu khác đã được giải thích ở trên.

Tính toán được thực hiện cho miền tính vuông có độ sâu không đổi bằng 5 m, kích thước 3000m x 3000m, với  $\Delta x = \Delta y = 50\text{m}$ , vận tốc lắng đọng  $D = 0,00002 \text{ m/s}$ ,  $\Delta T = 10\text{s}$ , nguồn đổ vào miền tính tại vị trí  $(x_0 = 3\Delta x, y_0 = 57\Delta y)$  có khối lượng  $M = 2500 \text{ kg}$ .

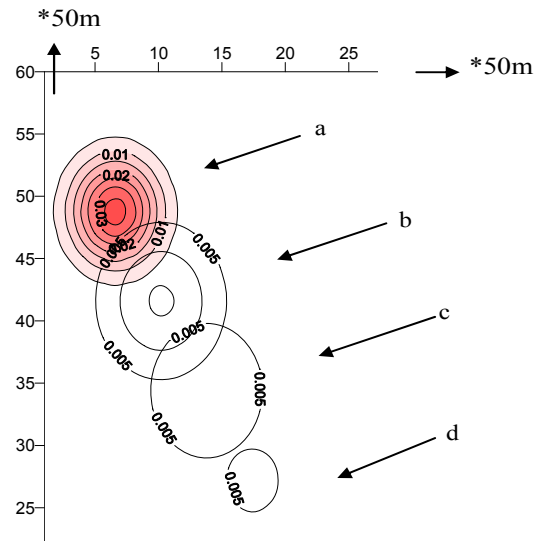
Mô hình được áp dụng tính thực nghiệm cho 3 trường hợp:

1.  $K_x = K_y = 4\text{m}^2/\text{s}$ ;  $u = v = 0,1 \text{ m/s}$ .
2.  $K_x = 6\text{m}^2/\text{s}$ ;  $K_y = 4\text{m}^2/\text{s}$ ;  $u = 0,2 \text{ m/s}$ ;  $v = 0,1 \text{ m/s}$ .
3.  $K_x = 4\text{m}^2/\text{s}$ ;  $K_y = 6\text{m}^2/\text{s}$ ;  $u = 0,1 \text{ m/s}$ ;  $v = 0,2 \text{ m/s}$ .

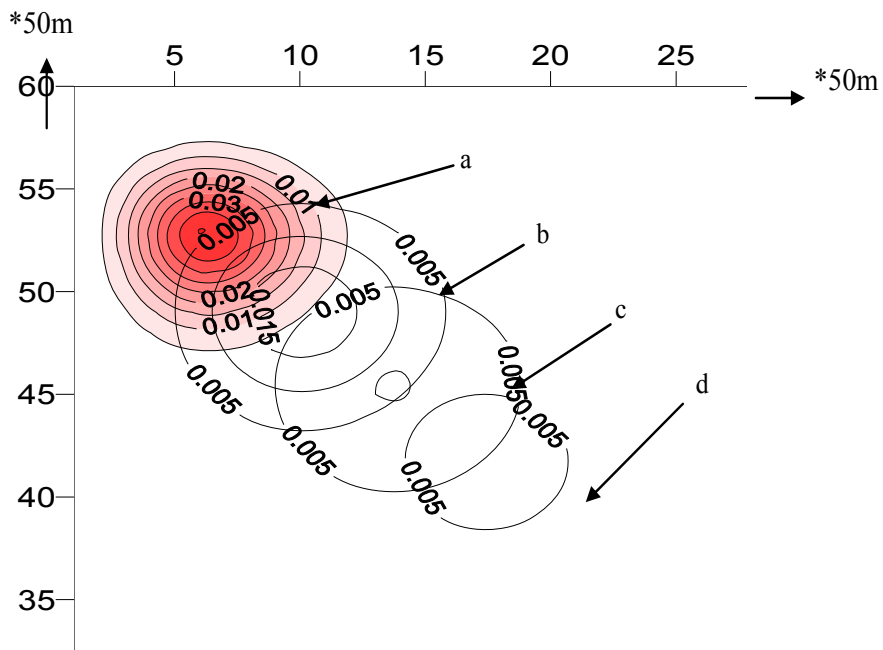
Các kết quả tính được trình bày dưới dạng các đường đồng mức nồng độ lần lượt tại 4 điểm thời gian ( $t = 0,5 \text{ giờ}$ ;  $1 \text{ giờ}$ ;  $1,5 \text{ giờ}$ ;  $2 \text{ giờ}$ ) từ mô hình (hình 2,4,6) và từ nghiệm giải tích (hình 3,5,7). Các hình vẽ tương ứng trong các hình này rất giống nhau.



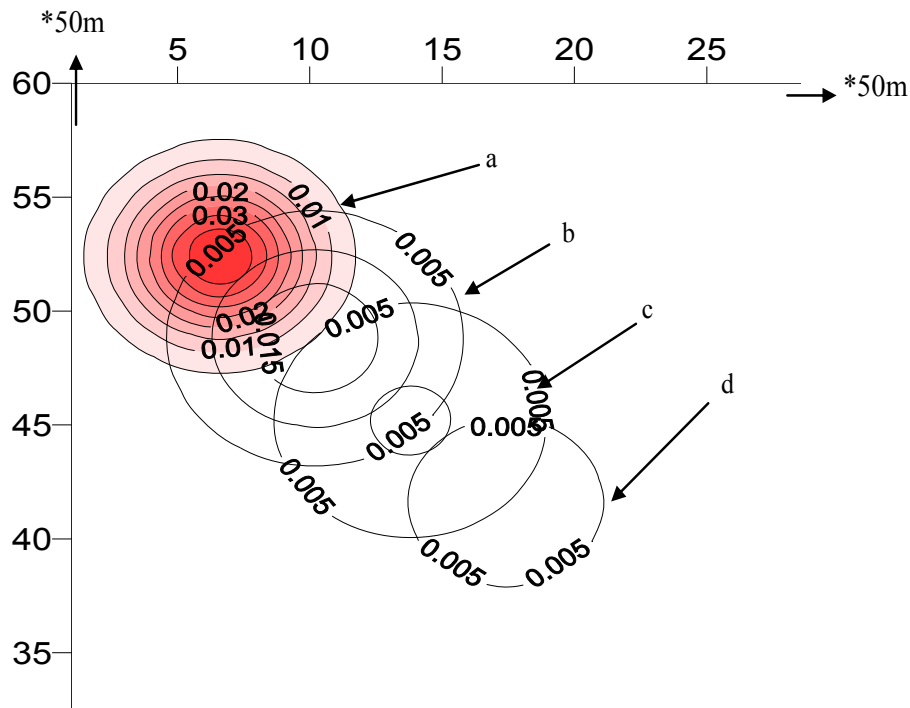
**H. 6** Các đường đồng mức nồng độ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) bùn cát:  
 a) sau 0,5 giờ tính toán lan truyền  
 b) sau 1 giờ tính toán lan truyền  
 c) sau 1,5 giờ tính toán lan truyền  
 d) sau 2 giờ tính toán lan truyền  
 Lời giải bằng mô hình toán  
 ( $u = 0,1 \text{ m/s}$ ;  $v = 0,2 \text{ m/s}$ ;  $K_x = 4\text{m}^2/\text{s}$ ;  $K_y = 6\text{m}^2/\text{s}$ )



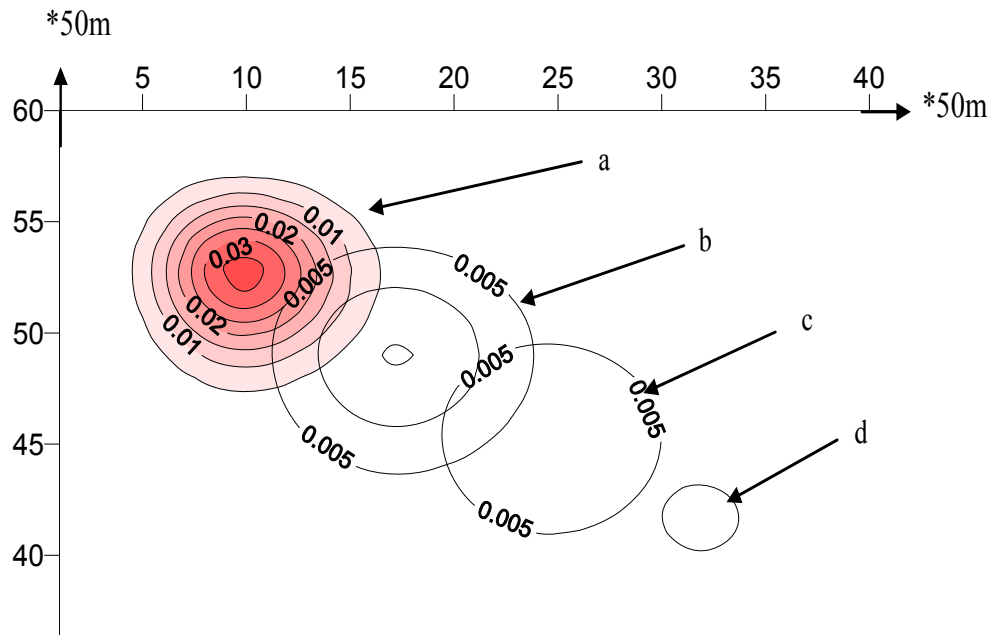
**H. 7** Các đường đồng mức nồng độ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) bùn cát:  
 a) sau 0,5 giờ tính toán lan truyền  
 b) sau 1 giờ tính toán lan truyền  
 c) sau 1,5 giờ tính toán lan truyền  
 d) sau 2 giờ tính toán lan truyền  
 Lời giải bằng nghiệm giải tích  
 ( $u = 0,1 \text{ m/s}$ ;  $v = 0,2 \text{ m/s}$ ;  $K_x = 4\text{m}^2/\text{s}$ ;  $K_y = 6\text{m}^2/\text{s}$ )



**H. 2** Các đường đồng mức nồng độ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) bùn cát:  
 a) sau 0,5 giờ tính toán lan truyền      b) sau 1 giờ tính toán lan truyền  
 c) sau 1,5 giờ tính toán lan truyền      d) sau 2 giờ tính toán lan truyền  
 Lời giải bằng mô hình toán  
 ( $u=0,1 \text{ m/s}$ ;  $v=0,1 \text{ m/s}$ ;  $K_x=K_y=4 \text{ m}^2/\text{s}$ )



**H. 3** Các đường đồng mức nồng độ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) bùn cát:  
 a) sau 0,5 giờ tính toán lan truyền      b) sau 1 giờ tính toán lan truyền  
 c) sau 1,5 giờ tính toán lan truyền      d) sau 2 giờ tính toán lan truyền  
 Lời giải bằng nghiệm giải tích  
 ( $u=0,1 \text{ m/s}$ ;  $v=0,1 \text{ m/s}$ ;  $K_x=K_y=4 \text{ m}^2/\text{s}$ )

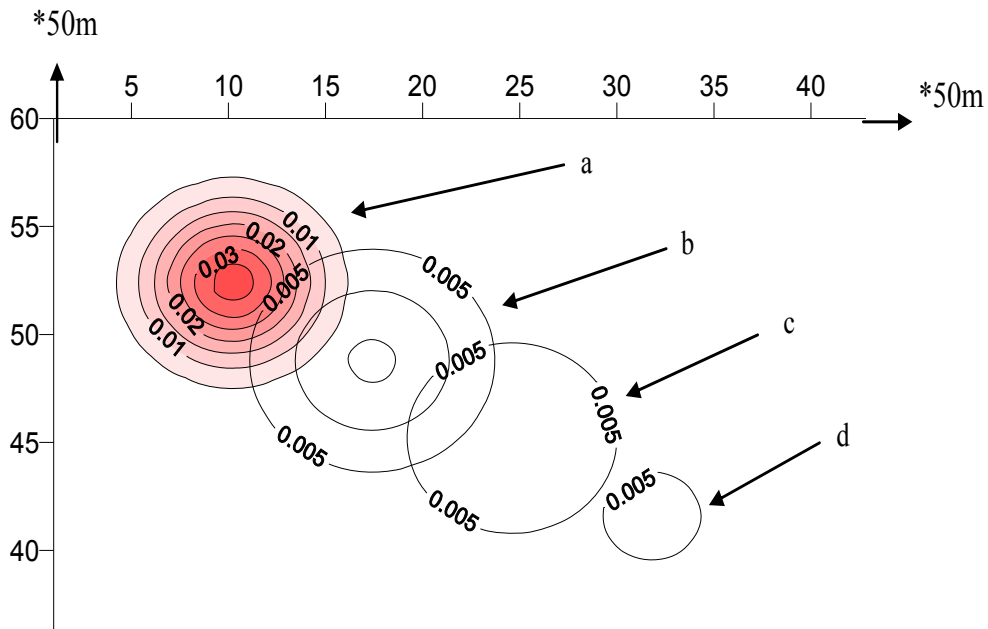


**H. 4** Các đường đồng mức nồng độ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) bùn cát:

- a) sau 0,5 giờ tính toán lan truyền      b) sau 1 giờ tính toán lan truyền  
 c) sau 1,5 giờ tính toán lan truyền      d) sau 2 giờ tính toán lan truyền

Lời giải bằng mô hình toán

( $u=0,2 \text{ m/s}$ ;  $v=0,1 \text{ m/s}$ ;  $Kx=6\text{m}^2/\text{s}$ ;  $Ky=4 \text{ m}^2/\text{s}$ )



**H. 5** Các đường đồng mức nồng độ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) thể tích bùn cát sau:

- a) sau 0,5 giờ tính toán lan truyền      b) sau 1 giờ tính toán lan truyền  
 c) sau 1,5 giờ tính toán lan truyền      d) sau 2 giờ tính toán lan truyền

Lời giải bằng nghiệm giải tích

( $u=0,2 \text{ m/s}$ ;  $v=0,1 \text{ m/s}$ ;  $Kx=6\text{m}^2/\text{s}$ ;  $Ky=4 \text{ m}^2/\text{s}$ )

## 5. KẾT LUẬN

Các kết quả thu được từ mô hình phù hợp với kết quả tính từ nghiệm giải tích. Điều này khẳng định độ tin cậy của mô hình. Mô hình được áp dụng tính chuyển tải bùn cát cho vùng biển Cần Giờ. Các kết quả nhận được sẽ được trình bày trong bài báo tiếp theo.

### MATHEMATICAL MODEL OF COHESIVE SEDIMENT TRANSPORT IN THE SHALLOW SEA BASIN *PART 1: MATHEMATICAL MODEL*

Nguyen Thi Bay <sup>(1)</sup>, Mach Quynh Trang <sup>(2)</sup>

(1) University of Technology – VNU- HCM

(2) University of National Sciences, VNU-HCM

**ABSTRACT :** *The aim of this study is to develop a method of calculation for cohesive sediment transport in the shallow sea basin due to tidal movements. The research is based on the Reynolds equations averaged over depth and the suspension transport equation; the later includes a source function describing the processes of stirring-up and deposition of the sediment. The results of computations for a simple case are verified by an analytic solution. The results obtained from this model is similar to those from the analytic solution.*

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Arthur T. Ippen, *Estuary and coastline hydrodynamics*, McGraw-Hill Book Company, Inc.1966.
- [2]. *Final report “Thailan LNG Terminal”*, AIT Engineering consultant, co., LTD. Bangkok, Thailand & Fluid Mechanics department, HCM City Univesity of Technology, Vietnam.
- [3]. Leo C. van Rijn, *Handbook- Sediment Transport by Currents and waves*, Delft Hydaulic June 1989.
- [4]. Leo C. van Rijn, *Principles of Sediment Transport in rivers, estuaries and coastal seas*, Delft Hydaulic June 1993.
- [5]. Nguyễn Thị Bãy, Nguyễn Anh Dũng, *Mô hình tính thủy triều vùng ven biển - Áp dụng tính năng lượng triều cho vùng biển Cần Giờ*, Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ- ĐHQG HCM.;V.8,4/2004. tr. 52-58
- [6]. Nguyễn Tất Đắc, *Mô hình toán cho dòng chảy và chất lượng nước trên hệ thống kênh sông*, NXB Nông nghiệp TP. Hồ Chí Minh, 2005.