

MÔ HÌNH TÍNH TOÁN ÁP LỰC SÓNG TÁC DỤNG LÊN TƯỜNG ĐỨNG DỰA TRÊN HỆ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES HAI CHIỀU

Nguyễn Danh Thảo, Nguyễn Thế Duy

Trường Đại học Bách Khoa, ĐHQG - HCM

(Bài nhận ngày 06 tháng 10 năm 2008, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 15 tháng 04 năm 2009)

TÓM TẮT: Bài báo này ứng dụng và phát triển một mô hình toán số dựa trên hệ phương trình Navier-Stokes hai chiều theo phương đứng nhằm mô phỏng sự biến đổi của các tham số sóng lan truyền trong vùng phía trước tường đứng theo thời gian và không gian. Mô hình sử dụng các hàm biến đổi nhằm biến đổi các phương trình chủ đạo và các điều kiện biên từ miền vật lý sang miền tính toán thông qua một lưới sai phân có khoảng cách không đều giữa các điểm nút. Ngoài các tham số sóng cơ bản, áp lực động học tác dụng lên tường đứng được tính toán thông qua mô hình. Kết quả số của mô hình được kiểm chứng bằng cách so sánh với các số liệu thí nghiệm cũng như với các mô hình lý thuyết và thực nghiệm khác. Các so sánh cho thấy lời giải số của mô hình có thể mô phỏng khá hợp lý các quá trình sóng ở vùng phía trước cũng như áp lực sóng tác dụng lên tường đứng.

Từ khóa: Áp lực sóng, tường đứng, hệ phương trình Navier-Stokes, hệ lưới sai phân không đều, sóng đứng.

1. GIỚI THIỆU

Song song với sự phát triển xây dựng đê chắn sóng tường đứng, các công thức tính toán áp lực sóng lên tường đứng cũng không ngừng được nghiên cứu và cải tiến. Bằng cách xem áp lực sóng tương tự như một tia nước đập vào tường đứng, Hiroi (1919) đưa ra công thức tính áp lực sóng phân bố đều trên suốt chiều cao của tường đứng và lên đến độ cao gấp 1.25 lần chiều cao sóng phía trên mực nước tĩnh. Công thức Hiroi phản ánh khá tốt áp lực trung bình trên miền bị ảnh hưởng bởi áp lực sóng. Tuy nhiên, áp lực sóng vỡ tính theo công thức Hiroi không phản ánh chính xác cường độ áp lực cục bộ quan trắc trong phòng thí nghiệm hay trong thực tế.

Đối với sóng có biên độ hữu hạn, Sainflou (1928) dựa trên lý thuyết sóng trochoidal để thiết lập công thức tính áp lực sóng và nhanh chóng được áp dụng rộng rãi. Phương pháp này sử dụng các phương trình thủy động lực học tổng quát của chất lỏng lý tưởng đối với sóng đứng ở độ sâu hạn chế. Tuy nhiên, kết quả nghiên cứu thực nghiệm cho thấy rằng giá trị của tổng áp lực sóng được tính theo công thức Sainflou thường lớn hơn rất nhiều so với thực tế trong trường hợp sóng dốc và nhỏ hơn rất nhiều trong trường hợp sóng thoải.

Minikin (1950) đề nghị công thức tính toán áp lực sóng vỡ dựa trên các kết quả thí nghiệm của Bagnold (Bagnold, 1939) và xét đến áp lực sóng giật lớn gây ra bởi sóng vỡ gần mặt

thoảng. Mặc dù vậy, công thức này ít được áp dụng trong thực tiễn thiết kế công trình vì có nhiều giá trị dự đoán quá lớn so với thực tế. Ito (1966) đã dựa vào các mô hình thủy lực thực nghiệm để đưa ra một công thức tính toán áp lực sóng cho cả sóng vỡ và sóng không vỡ, có xét đến vai trò của chân đê bằng cao su. Tiếp theo đó, Tanimoto (1976) đã hiệu chỉnh công thức này để tính áp lực sóng có kể đến tác động của sóng xiên góc với bờ.

Dựa trên các mô hình thí nghiệm và sử dụng các phương pháp kinh nghiệm, Goda (2000) đưa ra các công thức tính áp lực sóng dùng trong thiết kế đê chắn sóng tường đứng dựa trên hàng loạt những thí nghiệm về mô hình thủy lực, trong đó giả thiết áp lực phân bố dọc theo tường đứng có dạng hình thang. Công thức này được áp dụng đối với cả sóng vỡ lẫn không vỡ và sử dụng chiều cao sóng lớn nhất trong nhóm sóng để tính toán.

Những năm gần đây, nhiều tác giả cũng đã áp dụng nhiều phương pháp mới để nghiên cứu về áp lực sóng lên tường đứng. Goda đã mở rộng tính toán mô hình với sóng bậc năm và cho đến nay, mô hình này vẫn là mô hình sử dụng xấp xỉ có bậc cao nhất để tính sóng đứng trong vùng nước có chiều sâu hữu hạn. Mặc dù vậy, vẫn chỉ có một số ít các nghiên cứu thành công về vấn đề này mà không sử dụng giả thiết chuyển động không xoáy. Cách giải trực tiếp các phương trình bảo toàn khối lượng và bảo toàn động lượng trong hệ phương trình Navier-

Stokes đang dần được chú trọng hơn trong việc tính toán sóng đứng.

Trong phạm vi bài báo này, mô hình chỉ tập trung mô phỏng trường hợp sóng không vỡ trước tường đứng.

2. MÔ HÌNH SỐ HAI CHIỀU

2.1. Các phương trình chủ đạo

Hệ phương trình Navier-Stokes là hệ phương trình chủ đạo của cơ học lưu chất dựa trên các định luật về bảo toàn. Đối với dòng chảy rối của chất lỏng trong mặt phẳng thẳng đứng xz , phương trình Navier-Stokes được viết như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

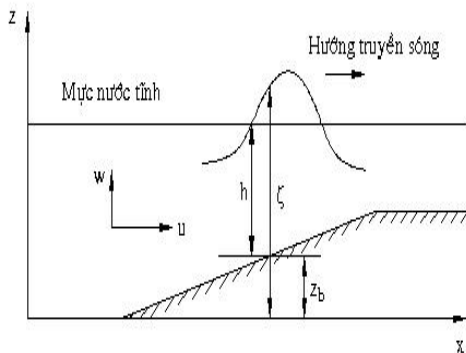
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\zeta} u dz = 0$$

Với u, w là các thành phần vận tốc theo phương x và z ; P là áp lực; ζ là cao trình mặt thoáng; z_b là cao trình đáy biển; và ν là hệ số nhớt động học.

Hình 1 thể hiện định nghĩa các tham số sóng hai chiều.



Hình 1. Sơ đồ định nghĩa các tham số sóng hai chiều

2.2. Các điều kiện biên

Điều kiện biên đối với các thông số sóng trong miền vật lý trong mặt phẳng hai chiều xz được xác định như sau:

o Biên mặt thoáng ($z = \zeta$)

Mặt thoáng là biên di động trong mô hình. Vị trí của biên được xác định ứng với mỗi bước thời gian cụ thể.

Điều kiện không có ứng suất cắt đối với vận tốc theo phương ngang u và điều kiện biên động học đối với vận tốc theo phương đứng w được giả định tại mặt thoáng.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\text{Điều kiện biên cho áp lực: } P = 0 \quad (7)$$

o Biên đáy biển ($z = z_b$)

Điều kiện không trượt được áp dụng cho biên đáy:

$$u = 0$$

$$w = 0$$

Kết hợp phương trình liên tục (1), điều kiện không trượt và phương trình bảo toàn động lượng theo phương thẳng đứng (3), ta được điều kiện biên Neumann cho áp lực: (4)

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho \left[-g + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

o Biên phía biển

Tùy thuộc vào tham số Ursell tại biên phía biển, các điều kiện biên đối với các tham số sóng có thể được tính theo lý thuyết sóng Cnoidal hay lý thuyết sóng Stokes.

$$U_r = \frac{HL^2}{h^3} \begin{cases} \geq 25: \text{ sóng Cnoidal} \\ < 25: \text{ Sóng Stokes} \end{cases}$$

Với H là chiều cao sóng tới; L là chiều dài sóng tới; và h là độ sâu.

o Biên phía bờ

Biên phía bờ là đê chắn sóng có tiết diện thẳng đứng không thấm được. Do đó, sóng tới sẽ phản xạ toàn phần dọc theo tường đứng tại biên.

Với vận tốc theo phương ngang $u = 0$ tại biên phía bờ, điều kiện biên động học đối với w tại mặt thoáng là:

$$w_s = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Giả thiết w phân bố tuyến tính dọc theo chiều cao thẳng đứng từ 0 đến w_s .

$$w = w_s \frac{z}{h}$$

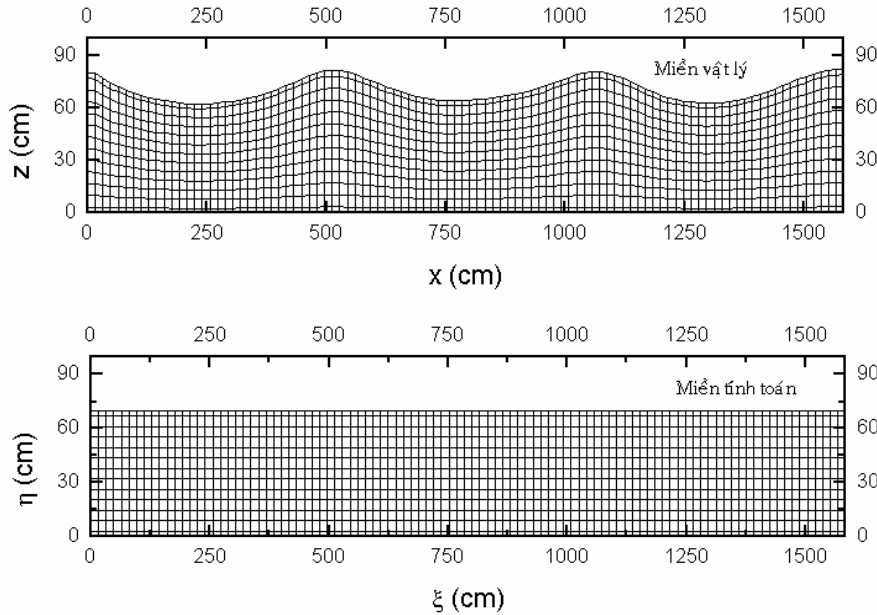
Điều kiện biên Neumann đối với áp lực P tại tường đứng được xác định bằng cách sử dụng phương trình động lượng theo phương x và điều kiện phản xạ toàn phần:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2.3. Tạo lưới sai phân

Để xây dựng một mô hình thống nhất, trong đó lớp biên đáy và vùng trên lớp biên có thể giải đồng thời, một hệ thống điểm lưới sai phân không đều được thiết lập (Duy, 1996; Thảo, 2003). Trong miền vật lý, mật thoáng là một biên di động theo sự chuyển động của sóng. Đáy biên cũng là đại lượng thay đổi theo không gian.

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta(x, t) \\ z_b &= z_b(x) \end{aligned} \quad (14)$$



Hình 2. Miền tính toán và lưới sai phân của mô hình

Như vậy, miền vật lý có lưới cong và di động. Nhằm giải các phương trình chủ đạo một cách dễ dàng hơn, lưới cong này được đưa về lưới tính toán thẳng. Ở mỗi thời điểm tính toán, miền vật lý (x, z, t) được biến đổi thành miền tính toán (ξ, η, τ) nhờ các phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= \eta_m \frac{z - z_b(x)}{\zeta(x, t) - z_b(x)} \end{aligned}$$

$$\tau = t$$

Với η_m là chiều dài theo phương đứng lớn nhất trong miền tính toán.

Hình 2 thể hiện lưới sai phân không đều trong miền tính toán được biến đổi từ miền vật lý. Các phương trình chủ đạo và điều kiện biên cũng sẽ được biến đổi và giải trong miền tính toán này bằng cách sử dụng ma trận Jacobian biến đổi tọa độ.

2.4. Phương trình Navier-Stokes biến đổi

Các phương trình chủ đạo (1) đến (4) được biến đổi trong miền tính toán như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta_z \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial \tau} + \eta_k \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial(u^2)}{\partial \xi} + \eta_k \frac{\partial(u^2)}{\partial \eta} + \eta_k \frac{\partial(uw)}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta_k \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) \\ & + v \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\eta_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta_k^2 + \eta_k^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial \xi} + \eta_k \frac{\partial \eta_k}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \\ & \frac{\partial w}{\partial \tau} + \eta_k \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial(uw)}{\partial \xi} + \eta_k \frac{\partial(uw)}{\partial \eta} + \eta_k \frac{\partial(w^2)}{\partial \eta} = -g \frac{\eta_k \partial P}{\rho \partial \eta} \\ & + v \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\eta_k \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta_k^2 + \eta_k^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial \xi} + \eta_k \frac{\partial \eta_k}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \\ & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\zeta} u dz = 0 \end{aligned}$$

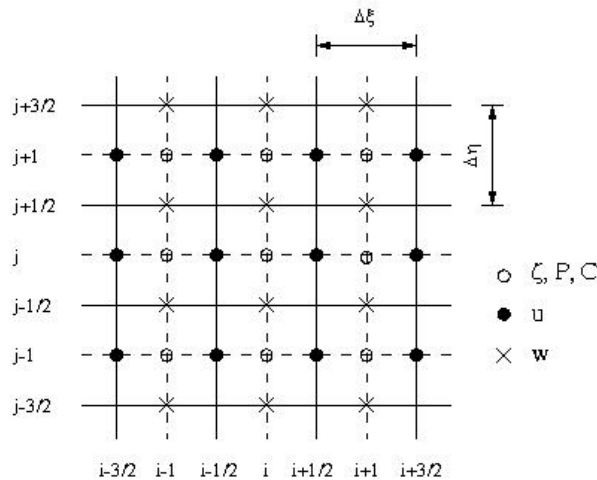
Lưu ý là phương trình (23) không được chuyển đổi sang miền tính toán (ξ, η, τ) vì

biên di động tại bề mặt nước được xác định trực tiếp từ miền vật lý (x, z, t) bằng cách sử dụng vận tốc (thực) phương ngang biến đổi ngược lại từ vận tốc tính được từ miền tính toán.

2.5. Lưới so le

Tiến hành giải các phương trình biến đổi và các điều kiện biên liên quan bằng phương pháp sai phân hữu hạn theo lưới so le như Hình 3. Các ẩn số cần tính là mặt nước, áp lực và vận tốc ở từng thời điểm khác nhau. P được xem như là điểm tại tâm các ô lưới, u và w là điểm tại cạnh các ô lưới.

(23)



Hình 3. Lưới so le

Đối với các phương trình (20) đến (23), sai phân trung tâm được sử dụng để khai triển đối với các điểm lưới $(i, j), (i + \frac{1}{2}, j),$

$(i, j + \frac{1}{2})$. Điều này cho phép tất cả các đạo hàm có thể được lấy chính xác đến bậc hai với số lượng điểm lưới nhỏ nhất, đồng thời cũng giúp dễ dàng tính được quan hệ với những điểm u, w và P ở điểm lưới gần kề cũng như làm tăng sự ổn định của lời giải so với sai phân trung tâm sử dụng lưới không so le.

Các phương trình (20) đến (23) được giải bằng cách lấy sai phân nửa ẩn.

2.6. Lời giải số của mô hình

Cao trình mặt thoáng được tính toán dựa vào các đạo hàm riêng phần từ các phương trình biến đổi trong miền tính toán. Đây là các hàm theo (x, t) , phụ thuộc vào sự thay đổi của mực nước và được xác định tại thời điểm bắt đầu của mỗi bước thời gian tính toán.

Các phương trình áp lực được thiết lập cho từng loại nút riêng biệt trong lưới số và cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\{A\} \cdot \{P\} = \{B\} \tag{24}$$

Với $\{A\}$ là ma trận hệ số; $\{B\}$ là vectơ các giá trị đã biết; và $\{P\}$ là vectơ áp lực cần phải giải.

Hệ phương trình tuyến tính (24) có số ẩn số rất lớn và xâu chuỗi với nhau giữa các phương trình. Do đó, phép truy đuổi và khử dần được áp dụng nhằm làm cho phép tính nhanh và đạt hiệu quả cao hơn.

Sau khi có trường áp lực, các thành phần vận tốc tại các điểm trong lưới số có thể được dễ dàng tính toán. Sau đó, cao trình mặt thoáng được tính toán lại cho bước thời gian kế tiếp.

Sau khi hoàn tất lời giải trong miền tính toán, các kết quả sẽ được biến đổi ngược trở lại ứng với vị trí thực trong miền vật lý theo quan hệ sau:

$$x = \xi$$

$$z = z_b + \frac{\zeta - z_b}{j_{\max} - 2}(j - 1.5)$$

Với j_{\max} là chỉ số j (theo phương thẳng đứng) lớn nhất.

3. KẾT QUẢ CỦA MÔ HÌNH

Kết quả mô hình được tính toán trong bốn trường hợp. Các điều kiện sóng tới được thể

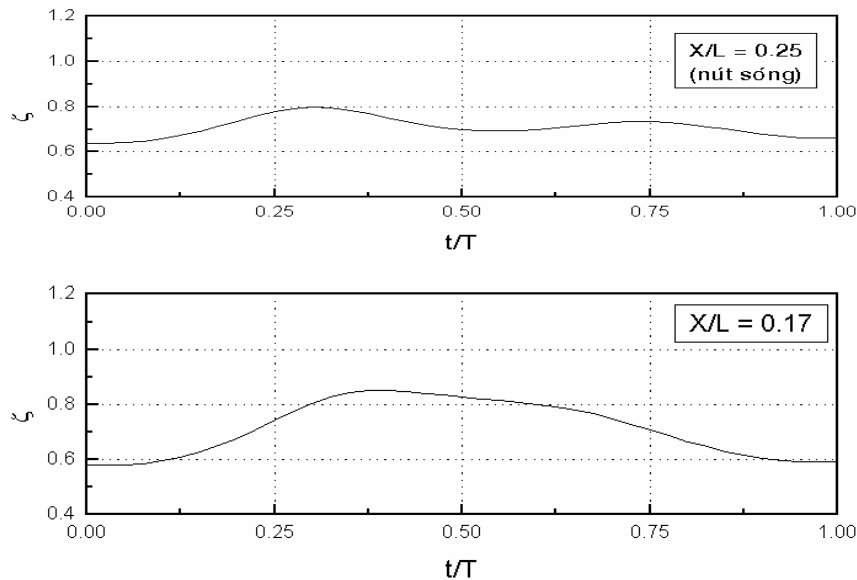
hiện trong Bảng 1. Nhằm đơn giản hóa việc tính toán, độ dốc đáy trong tất cả các trường hợp đều là nằm ngang.

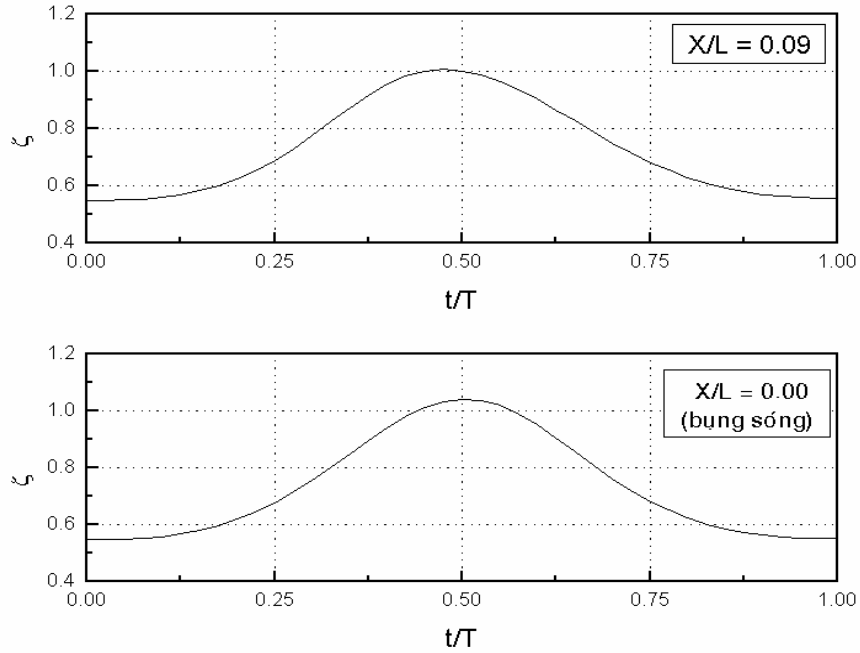
Bảng 1. Các thông số sóng tới ứng với từng trường hợp tính toán

| Trường hợp | Chiều cao sóng | Chu kỳ | Độ sâu | Độ dốc đáy |
|------------|----------------|--------|--------|------------|
| C1 | 5.5cm | 2.0s | 40cm | 0 |
| C2 | 17.1cm | 2.31s | 70cm | 0 |
| C3 | 26.4cm | 2.33s | 70cm | 0 |
| C4 | 14.4cm | 2.86s | 70cm | 0 |

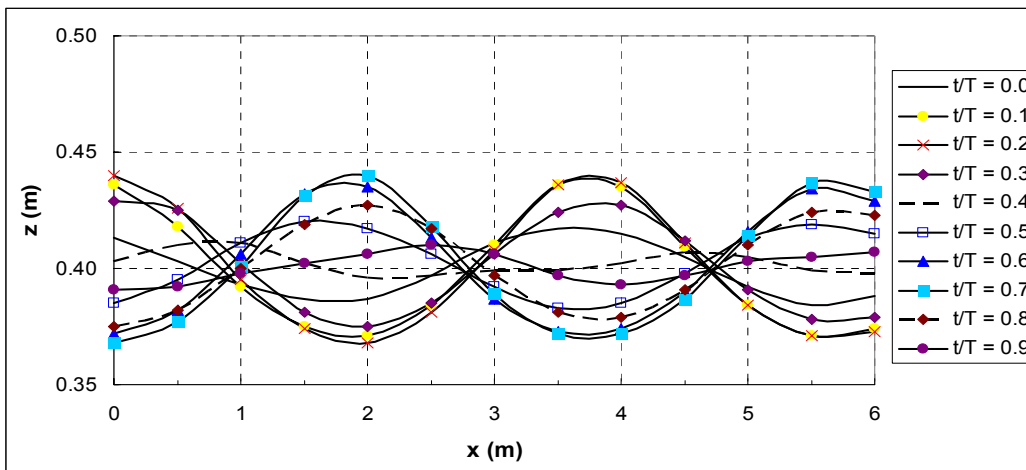
3.1. Đường mặt sóng

Hình 4 biểu diễn dao động theo thời gian của mặt nước trong một chu kỳ tính toán ứng với các trường hợp khác nhau. Dao động mặt nước được biểu diễn tại các vị trí khác nhau từ nút sóng đến bụng sóng, với X là khoảng cách theo phương ngang từ điểm đang xét đến sóng đứng và L là chiều dài sóng. Kết quả cho thấy tại vị trí nút sóng ($X/L = 0.25$), dao động của mặt nước theo thời gian là không đáng kể. Trong khi đó, tại vị trí bụng sóng ($X/L = 0$), dao động của mặt nước có biên độ cực đại. Kết quả này là phù hợp với lý thuyết sóng đứng.





Hình 4. Dao động theo thời gian của mặt nước trong một chu kỳ tính toán (trường hợp C3)



Hình 5. Đường mặt sóng tại những thời điểm tính toán khác nhau (trường hợp C1)

Hình 5 thể hiện đường mặt sóng tại những thời điểm khác nhau trong một chu kỳ tính toán ở vùng trước tường đứng. Khi biểu diễn tất cả các đường mặt sóng này trên cùng một hình vẽ, các nút sóng và bụng sóng sẽ được thể hiện rõ ràng.

Nhận xét rằng trong tất cả các trường hợp, ta cũng đều thu được hình ảnh bụng sóng ở

ngay tại vị trí tường đứng. Điều này trùng hợp với kết quả thực tế của sóng đứng. Như vậy, điều kiện biên được áp dụng tại biên phía bờ là khá hợp lý.

3.2. Trường vận tốc

Mô hình sau khi giải sẽ cho giá trị vận tốc theo phương ngang u và vận tốc theo phương

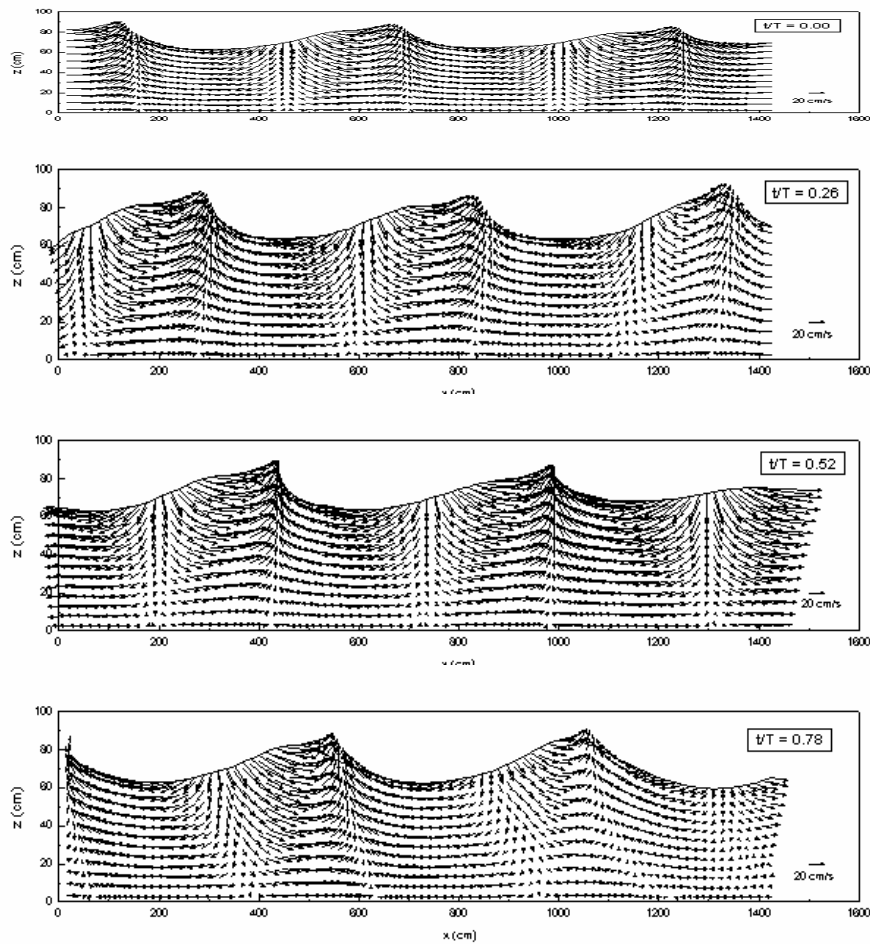
đứng w tại từng bước thời gian tính toán. Hình 6 thể hiện toàn cảnh trường lưu tốc tính toán đối với các pha khác nhau trong một chu kỳ sóng (trường hợp C2). Kết quả cho thấy mô hình mô phỏng khá tốt vận tốc của các phần tử nước trong vùng sóng đứng phía trước công trình. Mặc dù thiếu số liệu thí nghiệm để kiểm chứng nhưng có thể thấy rằng lời giải số của vận tốc là khá phù hợp với lý thuyết tính toán, kể cả đối với các điểm trong lớp biên đáy và biên mặt thoáng.

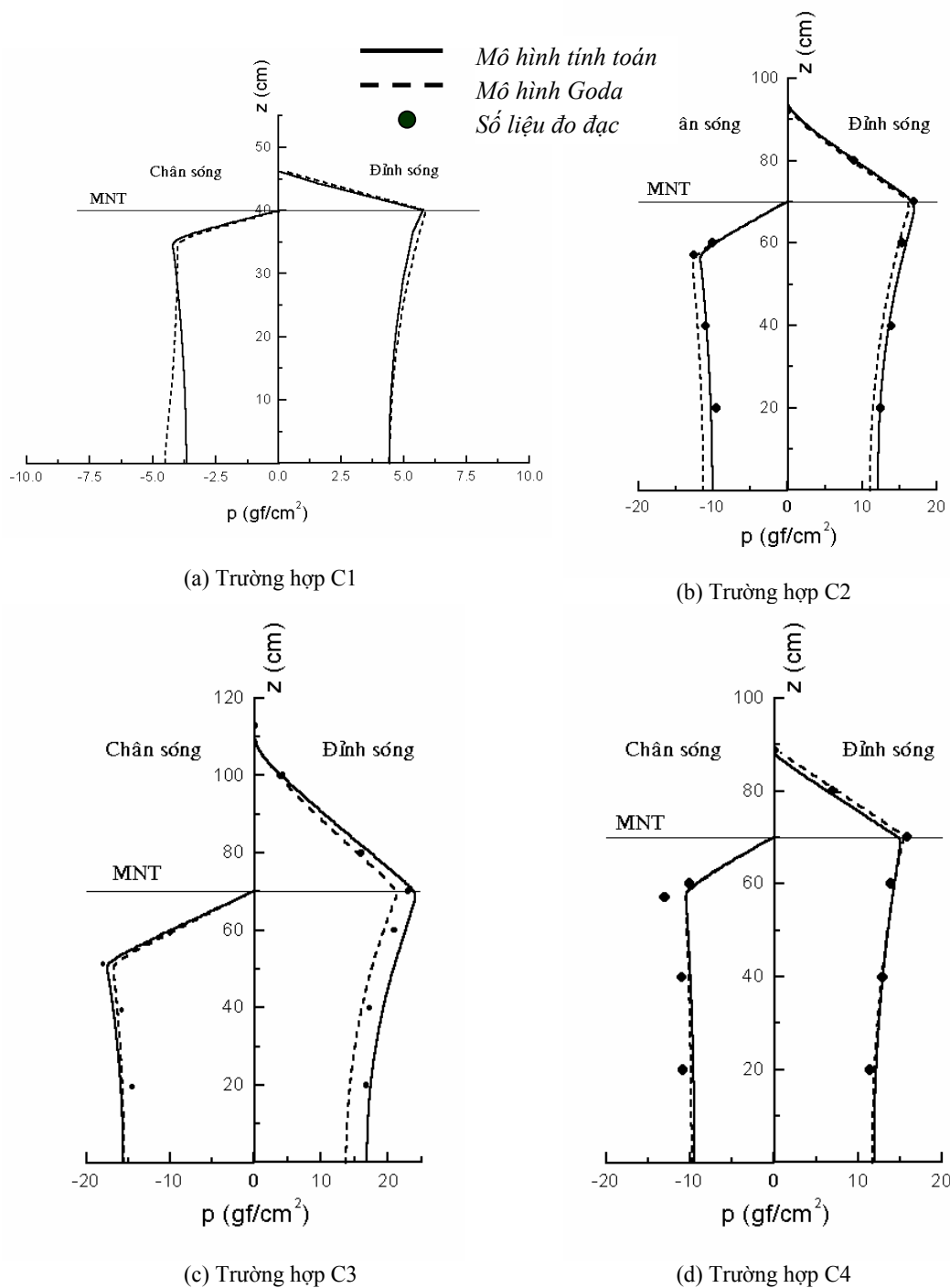
3.3. Phân bố áp lực sóng tại tường đứng

Hình 7 thể hiện các kết quả tính toán phân bố áp lực sóng theo phương thẳng đứng dọc theo bề mặt đê chắn sóng tường đứng đối với

bốn trường hợp tính toán như đã nêu. Các kết quả tính toán được so sánh với các số liệu đo đạc trong phòng thí nghiệm và với mô hình sóng bậc bốn của Goda và Kakizaki (1966). Các so sánh cho thấy rằng mô hình cho kết quả tương đối phù hợp so với các số liệu đo đạc trong phòng thí nghiệm. Lời giải thu được từ mô hình cũng có kết quả khá phù hợp với các số liệu của mô hình thực nghiệm của Goda và Kakizaki. Đây là mô hình đã được kiểm chứng và được công nhận rộng rãi. Do đó, có thể kết luận rằng mô hình số được áp dụng cho kết quả tính toán áp lực sóng lên đê chắn sóng tường đứng phù hợp với lý thuyết sóng bậc bốn

Hình 6. Trường vận tốc trong vùng trước đê chắn sóng tường đứng (trường hợp C2)





Hình 7. Phân bố áp lực sóng tại bề mặt dề chắn sóng tường đứng

Các số liệu thí nghiệm đo đạc được cũng như mô hình thực nghiệm đều cho thấy rằng áp lực sóng lớn nhất xuất hiện ở vùng ngang bằng với mực nước tĩnh. Trong trường hợp chân sóng xuất hiện tại bề mặt tường đứng, áp lực sóng trở nên nhỏ hơn áp lực thủy động ở dưới mực nước tĩnh. Áp lực này có xu hướng đẩy tường đứng về phía biển. Điều này cũng khá phù hợp với kết quả tính toán từ mô hình.

4. KẾT LUẬN

Một mô hình tính toán áp lực sóng lên tường đứng dựa trên hệ phương trình Navier-Stokes hai chiều được ứng dụng. Mô hình được xây dựng dựa trên điều kiện không tồn tại sóng vỡ ở trước và lân cận công trình, bỏ qua chuyển động rối. Để thu được độ phân giải cao trong vùng lân cận đáy, mô hình đã sử dụng

các hàm biến đổi nhằm đưa các phương trình chủ đạo và các điều kiện biên từ miền vật lý sang miền tính toán thông qua một lưới sai phân có khoảng cách không đều giữa các điểm nút. Với việc giải trực tiếp phương trình Navier-Stokes, mô hình đã mô phỏng tương đối hoàn chỉnh sự lan truyền sóng trong mặt phẳng thẳng đứng hai chiều phía trước tường đứng theo thời gian.

Thông qua mô hình, các thông số sóng trong mặt phẳng thẳng đứng hai chiều cũng như phân bố áp lực sóng lên bề mặt tường đứng được xác định. Kết quả tính toán áp lực sóng cho thấy lời giải số có thể mô phỏng tương đối chính xác và khá tin cậy khi so sánh với các mô hình lý thuyết cũng như các số liệu đo đạc trong phòng thí nghiệm.

SIMULATION OF WAVE PRESSURE ON A VERTICAL WALL BASED ON 2-D NAVIER-STOKES EQUATIONS

Nguyen Danh Thao, Nguyen The Duy
University of Technology, VNU-HCM

ABSTRACT: *This paper applies and develops a numerical model based on the two-dimensional vertical Navier-Stokes equations to simulate the temporal and spatial variations of wave parameters in front of vertical walls. A non-uniform grids system is performed in the numerical solution of the model by transforming a variable physical domain to a fixed computational domain. Through present model, beside some basic hydrodynamic problems of water waves such as wave profile and water particle velocities, standing wave pressures at the wall are examined. Numerical results of the present model are compared with laboratory data and with existing empirical and theoretical models. The comparisons show that the model can simulate reasonably the wave processes of the waves in front of vertical walls as well as the wave pressures on the wall.*

Keywords: *Wave pressure, vertical wall, Navier-Stokes equations, non-uniform grids system, standing waves.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- | | |
|--|--|
| <p>[1] Bagnold, R.A., Interim report on wave pressure research. <i>P. Inst. C. Eng.</i>, 12, pp. 202-226, (1939).</p> <p>[2] Duy, N. T., <i>A turbulent flow and sand suspension model in the surf zone</i>, Ph.D. Dissertation, Dept. Civil</p> | <p>Eng., Yokohama National University, (1996).</p> <p>[3] Goda, Y., <i>Random seas and design of maritime structures</i>. World Scientific, 2nd edition, Chapter 4, pp. 126-166, (2000).</p> <p>[4] Goda, Y. and Kakizaki, S., Study on the finite amplitude standing waves</p> |
|--|--|

- and their pressures on a vertical wall, *Report of the Port and Harbour Technical Res. Inst.*, Vol 5, No. 10, (1966).
- [5] Hiroi, I., On a method of estimating the force of waves. *J. College of Eng.*, University of Tokyo, 10(1), pp. 1–19, (1919).
- [6] Ito, Y., Fujishima, M., and Kitatani, T., On the stability of breakwaters. *Rep. of Port and Harbour Res. Inst.*, 5(14), 134 p., (1966).
- [7] Minikin, R.R., *Winds, waves and maritime structures*. Charles Griffin, London, (1950).
- [8] Nguyễn Danh Thảo, *Tính toán sóng trước tường đứng dựa trên phương trình Navier-Stokes hai chiều*, Luận văn Thạc sỹ, Trường ĐHBK Tp.HCM, (2003).
- [9] Sainflou, G., Essai sur les digues maritimes verticales. *Annales des Ponts et Chaussées*, Paris, 98(4), pp.5–48, (1928).
- [10] Tanimoto, T. et al., An experimental investigation of wave reflection, overtopping and wave forces for several types of breakwaters and sea walls. *Tech. Note of Port and Harbour Res. Inst.*, No. 246, 38p, (1976).