

## ỨNG DỤNG PHẦN TỬ SUY BIẾN ĐIỂM PHẦN TỬ TRONG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐỂ MÔ PHỎNG ỨNG XỬ ĐỈNH VẾT NỨT

Trương Tích Thiện, Trần Kim Bằng

Trường Đại học Bách khoa, ĐHQG-HCM

**TÓM TẮT:** Cơ học rạn nứt là một lĩnh vực còn khá mới mẻ trong kỹ thuật. Sự phát triển của nền toán học hiện đại cùng với những phương pháp số khác nhau đã hỗ trợ cho cơ học rạn nứt giải quyết những bài toán vết nứt phức tạp trong thực tế vô cùng hiệu quả. Bài báo này sẽ giới thiệu việc áp dụng phần tử điểm phần tử trong phương pháp phần tử hữu hạn vào bài toán cơ học nứt để tính toán, mô phỏng ứng xử tại đỉnh vết nứt trong không gian hai chiều và sử dụng các chương trình ANSYS, FRANC2D để tính toán hệ số cường độ ứng suất, mô phỏng trường ứng suất, chuyển vị gần đỉnh vết nứt, hiện tượng vết nứt lan truyền. Các kết quả tính toán sẽ được so sánh với kết quả trong các bài báo khoa học khác.

### 1. GIỚI THIỆU

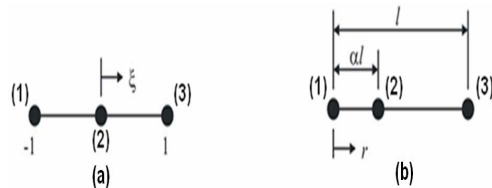
Sự khó khăn cơ bản của việc mô hình hóa bài toán cơ học nứt khi sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn là những hàm đa thức căn bản dùng cho các loại phần tử thông dụng không thể biểu diễn được ứng suất suy biến tại đỉnh vết nứt. Điều này có nghĩa là lưới được làm mịn trong lời giải phần tử hữu hạn sẽ hội tụ tới kết quả sai lệch so với lý thuyết. Một sự tiến bộ quan trọng trong việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn giải quyết bài toán cơ học nứt là sự phát triển của phần tử “điểm phần tử” (quarter-point). Trường ứng suất, chuyển vị, biến dạng gần đỉnh vết nứt có thể được biểu diễn chính xác bằng phần tử đẳng tham số bậc hai chuẩn nếu dịch chuyển điểm nút ở giữa phần tử đến vị trí về phía đỉnh vết nứt với khoảng cách một phần tư chiều dài phần tử. Với loại phần tử này, các chương trình phần tử hữu hạn có thể giải quyết bài toán cơ học nứt

một cách chính xác hơn và các yêu cầu ở phần tiền xử lý được đơn giản hóa đi.

### 2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG CƠ HỌC NỨT

#### 2.1. Phần tử suy biến điểm phần tử

Sự ảnh hưởng của việc di chuyển điểm nút giữa của phần tử bậc hai đến vị trí điểm một phần tư được minh họa rõ ràng nhất trong trường hợp phần tử một chiều. Mặc dù loại phần tử này không hữu dụng trong thực tế nhưng phương pháp đại số sẽ đơn giản hơn nhiều so với phần tử hai chiều, ba chiều.



**Hình 1.** Phần tử bậc hai một chiều: a) trong không gian tham số phần tử, b) trong không gian Descartes.

Chuyển vị  $u$  tại bất kỳ điểm nào trong phần tử được xác định bằng cách nội suy các

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)u_1 + (1-\xi^2)u_2 + \frac{1}{2} \xi(\xi+1)u_3 \quad (1)$$

Với  $\xi$  là tọa độ điểm nút trong không gian tham số phần tử.

Phương trình (1) được sắp xếp lại theo bậc của  $\xi$

$$u = u_2 + \frac{1}{2}(u_3 - u_1)\xi + \left[ \frac{1}{2}(u_1 + u_3) - u_2 \right] \xi^2 \quad (2)$$

Sử dụng sự thiết lập công thức đẳng tham số, các hàm dạng tương tự được dùng để nội suy dạng hình học của phần tử.

$$r = \sum_{i=1}^3 N_i r_i = \alpha l + \frac{1}{2} l \xi + l \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \xi^2 \quad (3)$$

Với  $r$  là tọa độ điểm nút trong không gian Descartes một chiều và  $\alpha$  là tham số.

$$u = u_1 + 2(u_1 - 2u_2 + u_3) \frac{r}{l} + (-3u_1 + 4u_2 + u_3) \frac{\sqrt{lr}}{l} \quad (5)$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dr} = 2(u_1 - 2u_2 + u_3) \frac{1}{l} + \left( -\frac{3}{2}u_1 + 2u_2 - \frac{1}{2}u_3 \right) \frac{1}{\sqrt{lr}} \quad (6)$$

Phương trình biến dạng có chứa biến  $r$  ở dạng  $r^{1/2}$  và có thể biểu diễn dạng suy biến trong bài toán cơ học nứt.  $r^{-1/2}$  còn được gọi là **suy biến  $r^{-1/2}$**  ( $r^{-1/2}$  singularity) hay **suy biến căn bậc hai** (square root singularity).

## 2.2. Phương pháp tương quan chuyển vị (Displacement Correlation Method)

Hệ số cường độ ứng suất  $K$  là thông số quan trọng trong cơ học nứt, biểu thị mức độ tập trung ứng suất tại đỉnh vết nứt. Phương pháp tương quan chuyển vị là một trong những kỹ thuật đơn giản nhất dùng để tính toán hệ số cường độ ứng suất từ kết quả phần tử hữu hạn.

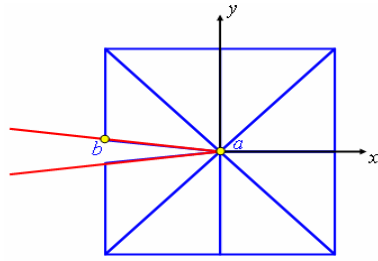
chuyển vị của điểm nút  $u_i$  nhờ sử dụng hàm dạng Lagrange bậc hai

Theo tài liệu [2], để biến đổi phần tử bậc hai một chiều thành phần tử điểm phần tử thì điểm nút giữa được di chuyển tới vị trí một phần tư. Khi đó  $\alpha = 1/4$ . Thế  $\alpha = 1/4$  vào phương trình (3) sẽ được

$$\xi = \frac{2\sqrt{lr}}{l} - 1 \quad (4)$$

Thế phương trình (4) vào phương trình (2) sau đó đạo hàm sẽ lần lượt dẫn đến các phương trình chuyển vị và biến dạng trong phần tử

Đây là phương pháp trực tiếp. Các biểu thức của trường chuyển vị gần đỉnh vết nứt có thể được tham khảo trong chương 4 của tài liệu [1]. Với dạng đơn giản nhất, chuyển vị tại một điểm bên trong lưới được thế trực tiếp vào biểu thức giải tích của trường chuyển vị gần đỉnh vết nứt, sau khi đã trừ đi chuyển vị tại đỉnh vết nứt. Điểm được chọn là điểm nút trên mặt nứt mà chuyển vị tại đó là lớn nhất.



**Hình 2.** Điểm tương quan được chọn trong trường hợp đơn giản.

Biểu thức hệ số cường độ ứng suất của dạng I (mode I) và dạng II (mode II) được tính như sau

$$K_I = \frac{\mu\sqrt{2\pi}(u_{yb} - u_{ya})}{\sqrt{r}(2 - 2\nu')} \quad (7)$$

$$K_{II} = \frac{\mu\sqrt{2\pi}(u_{xb} - u_{xa})}{\sqrt{r}(2 - 2\nu')} \quad (8)$$

Với  $\mu$  là module đàn hồi trượt.

$r$  là khoảng cách từ đỉnh vết nứt đến điểm tương quan.

$u_{xi}, u_{yi}$  là các chuyển vị theo phương  $x, y$  tại điểm  $i$ .

$\nu$  là hệ số Poisson.

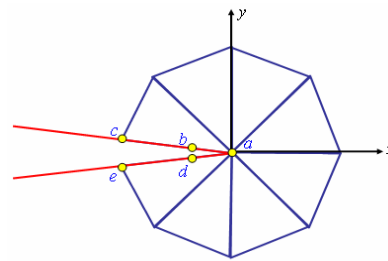
$\nu' = \nu$  trong trường hợp biến dạng phẳng và  $\nu' = \nu/(1 + \nu)$  trong trường hợp ứng suất phẳng.

Theo tài liệu [2], khi sử dụng **phần tử điểm phần tử** thì kết quả hệ số cường độ ứng suất là

$$G_I = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta L} \int_0^{\Delta L} \sigma_{yy}(r = x, \theta = 0) u_y(r = \Delta L - x, \theta = \pi) dr \quad (11)$$

$$G_{II} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta L} \int_0^{\Delta L} \tau_{xy}(r = x, \theta = 0) u_x(r = \Delta L - x, \theta = \pi) dr \quad (12)$$

Tích phân Irwin liên hệ suất giải phóng năng lượng  $G$  với trường ứng suất và chuyển vị



**Hình 3.** Phương pháp tương quan chuyển vị với phần tử điểm phần tử.

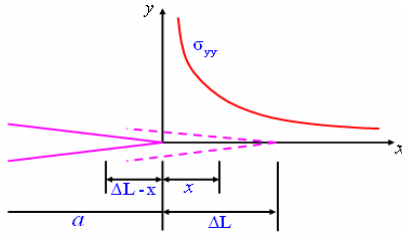
$$K_I = \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{\sqrt{r}(2 - 2\nu')} [4(u_{yb} - u_{yd}) + u_{ye} - u_{yc}] \quad (9)$$

$$K_{II} = \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{\sqrt{r}(2 - 2\nu')} [4(u_{xb} - u_{xd}) + u_{xe} - u_{xc}] \quad (10)$$

### 2.3. Phương pháp tích phân kín nứt hiệu chỉnh (Modified Crack Closure Integral)

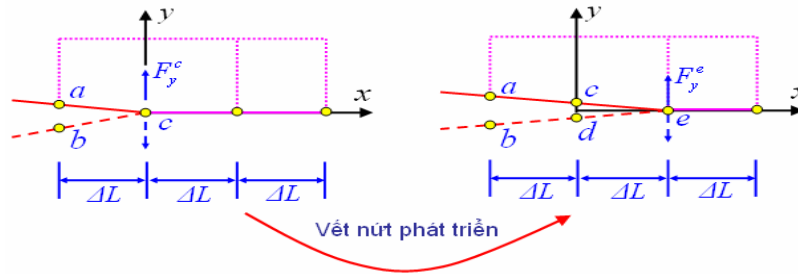
Suất giải phóng năng lượng  $G$  là năng lượng cần thiết cho sự phát triển của vết nứt. Theo tài liệu [2], trong phương pháp tích phân kín nứt hiệu chỉnh, tích phân kín nứt Irwin được sử dụng để tính toán suất giải phóng năng lượng  $G$  của dạng I và dạng II

đỉnh vết nứt trong trường hợp vết nứt tăng trường nhỏ.



**Hình 4.** Ứng suất và chuyển vị gần đỉnh vết nứt với tích phân kín nứt Irwin.

Khi những phần tử hữu hạn tuyến tính được sử dụng, biểu thức tính G trở nên đơn



**Hình 5.** Lưới được chia tại đỉnh vết nứt với phần tử hữu hạn tuyến tính.

Nếu đỉnh vết nứt chỉ dịch chuyển một khoảng nhỏ thì chuyển vị tại các nút c và d có thể xấp xỉ gần bằng với chuyển vị tại các nút a và b.

Đối với mode I và mode II, G có quan hệ với K như sau

$$G = (K_i)^2 / E' \quad (15)$$

Với  $E' = E$  trong trường hợp ứng suất phẳng và  $E' = E / (1 - \nu^2)$  trong trường hợp biến dạng phẳng.

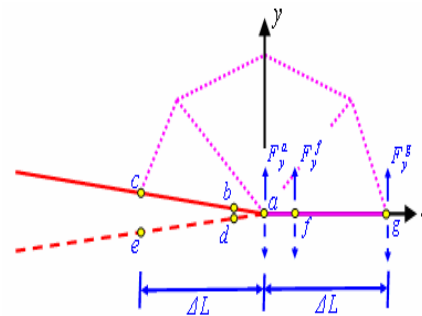
Phương pháp tích phân kín nứt hiệu chỉnh có thể được mở rộng bằng cách sử dụng những phần tử bậc cao hơn như phần tử điểm phần tử tam giác.

$$G_I = \frac{1}{\Delta L} [(C_{11}F_y^a + C_{12}F_y^f + C_{13}F_y^g)(u_y^b - u_y^e) + (C_{21}F_y^a + C_{22}F_y^f + C_{23}F_y^g)(u_y^c - u_y^d)] \quad (16)$$

giản hơn. Như được minh họa trong hình (4), ban đầu, nội lực  $F^c$  gần đỉnh vết nứt sẽ được tính trước. Sau đó vết nứt phát triển, chuyển vị tại các điểm nút c và d ( $u^c$  và  $u^d$ ) sẽ được tính tiếp. Phương trình (11) và (12) được rút gọn như sau

$$G_I = \frac{1}{2\Delta L} F_y^c (u_y^c - u_y^d) \quad (13)$$

$$G_{II} = \frac{1}{2\Delta L} F_x^c (u_x^c - u_x^d) \quad (14)$$



**Hình 6.** Lưới được chia tại đỉnh vết nứt với phần tử điểm phần tử tam giác.

Sau khi lấy tích phân phương trình (11) và (12), biểu thức tính G sẽ là

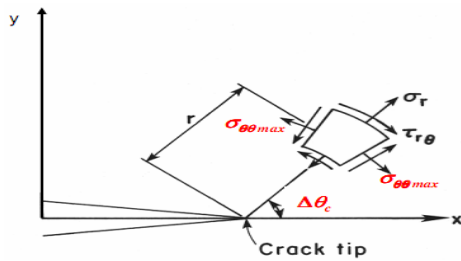
$$G_{II} = \frac{1}{\Delta L} [(C_{11}F_x^a + C_{12}F_x^f + C_{13}F_x^g)(u_x^b - u_x^e) + (C_{21}F_x^a + C_{22}F_x^f + C_{23}F_x^g)(u_x^c - u_x^d)] \quad (17)$$

Với các hằng số  $C_{ij}$  được cho như sau

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{33\pi}{2} - 52, & C_{12} &= 17 - \frac{21\pi}{4}, & C_{13} &= \frac{21\pi}{2} - 32 \\ C_{21} &= 14 - \frac{33\pi}{8}, & C_{22} &= \frac{21\pi}{6} - \frac{7}{2}, & C_{23} &= 8 - \frac{21\pi}{8} \end{aligned} \quad (18)$$

### 3. PHƯƠNG PHÁP DỰ ĐOÁN HƯỚNG LAN TRUYỀN CỦA VẾT NỨT

Thuyết ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại  $\sigma_{\theta\theta\max}$  bậc nhất đối với vật liệu đẳng hướng khẳng định vết nứt sẽ phát triển theo hướng vuông góc với ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại.



Hình 7. Ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại trong hệ tọa độ cực.

Theo chương 4, tài liệu [1], ứng suất  $\sigma_{\theta\theta}$  tại đỉnh vết nứt được biểu diễn như sau

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \quad (19)$$

Đạo hàm phương trình (19) theo biến  $\theta$  và giải phương trình  $\partial\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta = 0$  theo biến  $\theta$ . Sau đó đặt  $\theta = \Delta\theta_c$  sẽ được góc uốn của vết nứt khi lan truyền như sau

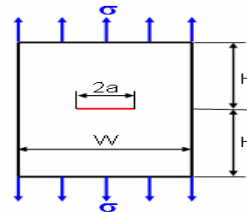
$$\text{Với } \alpha = \sqrt{1 + 0,5(a/W)^2 + 20,46(a/W)^4 + 81,72(a/W)^6} = 1,00356 \quad (22)$$

$$\Delta\theta_c = 2 \tan^{-1} \left( \frac{1 - \sqrt{1 + 8(K_{II}/K_I)^2}}{4(K_{II}/K_I)} \right) \quad (20)$$

### 4. MÔ HÌNH TÍNH TOÁN

#### 4.1. Tấm phẳng với vết nứt nằm trong chịu ứng suất kéo đều đơn trục

Xét một tấm phẳng với các kích thước  $W = 0,08$  m,  $H = 0,1$  m,  $a = 0,008$  m. Trường hợp đang xét là biến dạng phẳng. Vật liệu sử dụng là thép AISI 4147 với  $E = 207.10^3$  MPa, hệ số Poisson  $\nu = 0,3$  và giới hạn phá hủy  $K_{IC} = 120$  MPam<sup>1/2</sup>. Tính chất vật liệu là đàn hồi đẳng hướng. Ứng suất kéo  $\sigma = 820$  MPa. Độ tăng trường vết nứt  $\Delta a = 0,002$  m.

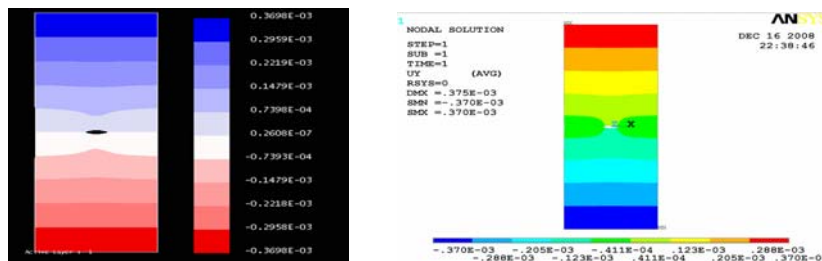


Hình 8. Tấm phẳng với vết nứt nằm trong.

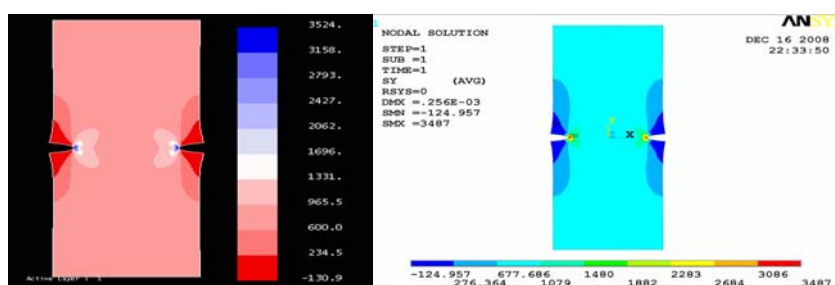
Kết quả giải tích hệ số cường độ ứng suất được tham khảo từ tài liệu [1] như sau

$$K_I = \alpha\sigma\sqrt{\pi a} = 130,46 \text{ MPa}\sqrt{m} \quad (21)$$

Các kết quả chuyển vị, ứng suất được tiến hành so sánh giữa hai chương trình FRANC2D và ANSYS như sau



Hình 9. So sánh kết quả chuyển vị theo phương y giữa FRANC2D và ANSYS.

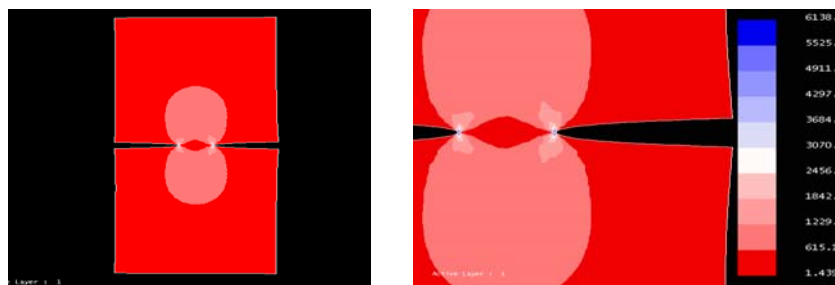


Hình 10. So sánh kết quả ứng suất  $\sigma_{yy}$  giữa FRANC2D và ANSYS.

Bảng 1. So sánh kết quả hệ số cường độ ứng suất  $K_I$ .

Lý thuyết giải tích	FRANC2D (J-Integral)	ANSYS	Sai số giữa FRANC2D và lý thuyết	Sai số giữa ANSYS và lý thuyết
149,8216	149,1	147,79	0,48 %	1,356 %

Biến dạng và ứng suất  $\tau_{max}$  tại đỉnh vết nứt khi vết nứt lan truyền sau 7 step khi mô phỏng bằng FRANC2D



Hình 11. Biến dạng.

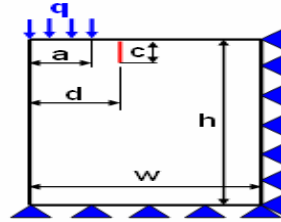
Hình 12. Ứng suất  $\tau_{max}$  tại đỉnh vết nứt.

**4.2. Tấm phẳng với một vết nứt biên và chịu áp lực trên một phần cạnh**

Mô hình được tham khảo trong tài liệu [5]. Trường hợp là biến dạng phẳng.

Với  $E = 3,86 \text{ GPa}$ , hệ số Poisson  $\nu = 0,31$ ,  $K_{IC} = 1 \text{ MPam}^{1/2}$ . Áp lực  $q = 1 \text{ Pa}$ . Độ tăng trường vết nứt  $\Delta a = 1 \text{ mm}$ . Với các kích thước  $w = 30 \text{ mm}$ ,  $h = 45 \text{ mm}$ ,  $a = 4 \text{ mm}$ ,  $c = 5 \text{ mm}$ .

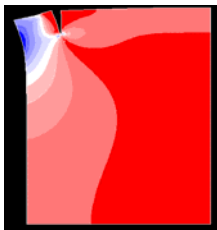
Kích thước  $d$  thay đổi theo ba trường hợp là  $d = 6 \text{ mm}$ ,  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $d = 14 \text{ mm}$ .



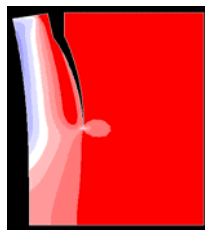
**Hình 13.** Tấm phẳng với một vết nứt biên và chịu ứng suất tiếp.

So sánh kết quả lưới biến dạng khi vết nứt lan truyền sau 20 step giữa FRANC2D và kết quả ứng dụng SBFEM (Scale Boundary Finite Element Method) được tham khảo trong tài liệu [5] theo 3 trường hợp thay đổi của kích thước  $d$ .

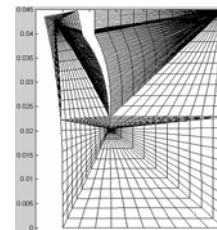
**Trường hợp  $d = 6 \text{ mm}$**



Vết nứt trước khi lan truyền



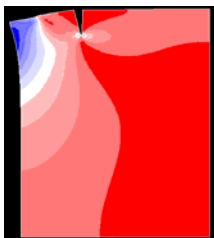
FRANC2D



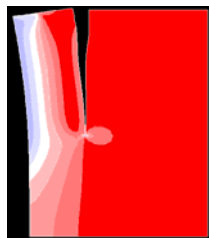
Tham khảo tài liệu [5]

**Hình 14.** So sánh biến dạng khi vết nứt lan truyền giữa FRANC2D với SBFEM.

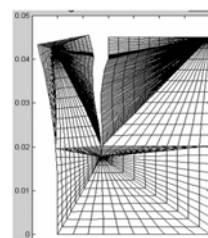
**Trường hợp  $d = 10 \text{ mm}$**



Vết nứt trước khi lan truyền



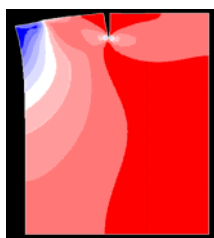
FRANC2D



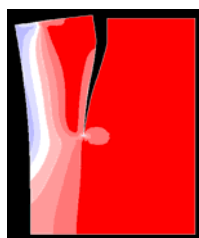
Tham khảo tài liệu [5]

**Hình 15.** So sánh biến dạng khi vết nứt lan truyền giữa FRANC2D với SBFEM.

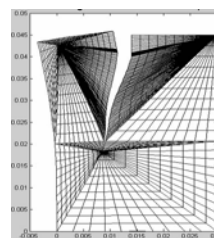
**Trường hợp  $d = 14\text{mm}$**



Vết nứt trước khi lan truyền



FRANC2D



Tham khảo tài liệu [5]

**Hình 16.** So sánh biến dạng khi vết nứt lan truyền giữa FRANC2D với SBFEM.

## 5. KẾT LUẬN

Bằng cách sử dụng phần tử suy biến điểm phần tử trong phương pháp phần tử hữu hạn để mô phỏng ứng xử đỉnh vết nứt trong không gian hai chiều, trường ứng suất và trường chuyển vị gần đỉnh vết nứt sẽ được thể hiện chính xác hơn so với các loại phần tử khác, việc tính toán hệ số cường độ ứng suất sẽ

nhanh hơn so với lý thuyết giải tích khi gặp mô hình vết nứt phức tạp. Đồng thời, có thể dự đoán được một cách tương đối cách thức phát triển và hình dạng của vết nứt hai chiều khi lan truyền trong những điều kiện khác nhau về mô hình, vật liệu và cách thức đặt tải.

## APPLICATION OF QUARTER-POINT SINGULAR ELEMENT IN FINITE ELEMENT METHOD TO SIMULATION OF CRACK TIP BEHAVIOR

**Truong Tich Thien, Tran Kim Bang**

University of Technology, VNU-HCM

**ABSTRACT:** *Fracture mechanics is a new branch in engineering. The development of modern mathematical background with different numerical methods has supported fracture mechanics to solve many complex fracture problems in practice effectively. This article introduces the application of quarter – point singular element in finite element method to simulate crack tip behavior in two dimensional problems. The ANSYS and FRANC2D programs are used to compute stress intensity factor, simulate the stress and displacement fields near crack tip and simulate crack propagation. The calculation results are compared with analytical results and the results in other articles.*

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1]. Nestor Perez, *Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, (2004).
- [2]. Ingraffea A. R., *Lecture Notes*, Cornell University, CEE 770, Fall (2007).
- [3]. *ANSYS Structural Analysis Guide – Fracture Mechanics*. Release 11.0, SAS IP, Inc, (2007).
- [4]. CFG. *FRANC2D Users Guide – Version 3.1*, (2003).
- [5]. Zhenjun Yang, *Fully automatic modelling of mixed – mode crack propagation using scaled boundary finite element method*, Engineering Fracture Mechanics 73, pp. 1711 – 1731, (2006).