

MÔ HÌNH TOÁN 1D+2D TÍNH LŨ BIẾN ĐỔI CHẬM Phần 1 : Mô hình toán

Nguyễn Thông

Trường Đại học Bách Khoa, ĐHQG-HCM

1. MÔ HÌNH DÒNG CHẢY MỘT CHIỀU (1D) TRONG MẠNG LƯỚI SÔNG

Mô hình toán biểu thị dòng chảy một chiều trong mạng lưới sông là hệ phương trình bao gồm phương trình liên tục và phương trình Saint Venant trong đó có kể đến tất cả các số hạng.

1.1. Hệ phương trình vi phân cơ bản

Dòng chảy trong lòng dẫn được mô tả bởi các phương trình sau đây :

Phương trình liên tục:

$$B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1)$$

Phương trình động lực (phương trình Saint Venant) cho bài toán một chiều :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2Q}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \right] + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{C^2 AR} = 0 \quad (2)$$

trong đó :

$$C = R^{1/6} / n \quad (3)$$

$R = A / c$: bán kính thủy lực.

t, x : biến thời gian, không gian.

A, B, Z : diện tích ướt, chiều rộng mặt thoáng, cao trình mực nước.

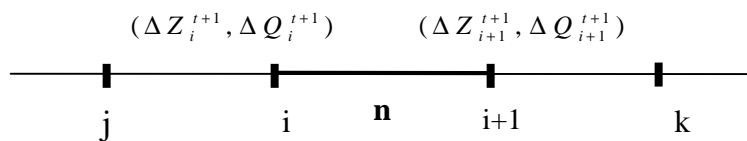
Q, q : lưu lượng qua diện tích ướt A , lưu lượng đơn vị bổ sung dọc tuyến (thẳng góc với trục sông).

c : chu vi ướt.

n : hệ số nhám.

1.2 Sơ đồ sai phân không gian và thời gian

Sơ đồ sai phân được thực hiện trên mạng lưới 1D như sau :



Hình 1. Sơ đồ mạng lưới sai phân không gian 1D

$\Delta Z_i^{t+1}, \Delta Q_i^{t+1}$ chỉ các ẩn số tại các nút i mạng lưới tại thời điểm $(t+1)$, định nghĩa như sau :

$\Delta Z_i^{t+1} = Z_i^{t+1} - Z_i^t$ với Z_i^t chỉ mực nước tại nút i ở thời điểm t .

$\Delta Q_i^{t+1} = Q_i^{t+1} - Q_i^t$ với Q_i^t chỉ lưu lượng tại nút i ở thời điểm t .

Sai phân thời gian được sử dụng theo sơ đồ ẩn Preissmann được định nghĩa như sau :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i+1}^{t+1} - f_{i+1}^t}{\Delta t} + \frac{f_i^{t+1} - f_i^t}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta f_{i+1}^{t+1} + \Delta f_i^{t+1}}{2\Delta t} \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = q \frac{f_{i+1}^{t+1} - f_{i+1}^t}{\Delta x} + (1-q) \frac{f_i^{t+1} - f_i^t}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[f_{i+1}^t - f_i^t + q(\Delta f_{i+1}^{t+1} - \Delta f_i^{t+1}) \right] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{y}{2} (f_{i+1}^{t+1} + f_i^{t+1}) + \frac{1-y}{2} (f_{i+1}^t + f_i^t) \\ &= 0.5 \left[f_{i+1}^t + f_i^t + y(\Delta f_{i+1}^{t+1} + \Delta f_i^{t+1}) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

f : hàm số cần sai phân hóa.

với $2/3 \leq q, y \leq 1$

1.3 Phương trình sai phân

Phương trình sai phân sẽ viết cho đoạn thứ (n) bất kỳ của mạng lưới 1D, với ký hiệu nút đầu (i) và nút cuối (i+1) như sau :

Phương trình liên tục (1) viết dưới dạng sai phân như sau :

$$\begin{aligned} &\left[\frac{y_B}{2} (B_i^{t+1} + B_{i+1}^{t+1}) + \frac{1-y_B}{2} (B_i^t + B_{i+1}^t) \right] \frac{\Delta Z_i^{t+1} + \Delta Z_{i+1}^{t+1}}{2\Delta t} + \\ &\frac{q_Q(Q_{i+1}^{t+1} - Q_i^{t+1}) + (1-q_Q)(Q_{i+1}^t - Q_i^t)}{\Delta x} = y_q q^{t+1} + (1-y_q) q^t \end{aligned} \quad (7)$$

Đây là phương trình tuyến tính theo ΔZ_i^{t+1} . Thu gọn phương trình nêu trên cho ta phương trình liên tục viết dưới dạng sai phân như sau:

$$a_1 \Delta Z_i^{t+1} - a_2 \Delta Q_i^{t+1} + a_1 \Delta Z_{i+1}^{t+1} + a_2 \Delta Q_{i+1}^{t+1} = a_3 \quad (8)$$

với :

$$a_1 = \frac{\Delta x}{4} \left[B_{i+1}^t + B_i^t + y_B \left(\frac{dB_{i+1}^t}{dZ} \Delta Z_{i+1}^t + \frac{dB_i^t}{dZ} \Delta Z_i^t \right) \right]$$

$$a_2 = q_Q \Delta t$$

$$a_3 = -\Delta t (Q_{i+1}^t - Q_i^t) + \Delta x \cdot \Delta t \left[y_q q^{t+1} + (1-y_q) q^t \right]$$

Các hệ số trong phương trình động lực (2) viết dưới dạng sai phân đã được tuyến tính hóa như sau :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \frac{\Delta Q_{i+1}^{t+1} + \Delta Q_i^{t+1}}{2\Delta t} \\ &\frac{2Q}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{Q_{i+1}^t + Q_i^t}{A_{i+1}^t + A_i^t} \cdot \frac{Q_{i+1}^t - Q_i^t + q_Q(\Delta Q_{i+1}^{t+1} - \Delta Q_i^{t+1})}{\Delta x} \\ &\frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{(Q_{i+1}^t + Q_i^t)^2}{(A_{i+1}^t + A_i^t)^2} \cdot \frac{(B_{i+1}^t + B_i^t)}{2} \cdot \frac{Z_{i+1}^t - Z_i^t + q_Z(\Delta Z_{i+1}^{t+1} - \Delta Z_i^{t+1})}{\Delta x} \\ &gA \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot g \frac{A_{i+1}^t + A_i^t}{2} \cdot \frac{Z_{i+1}^t - Z_i^t + q_Z(\Delta Z_{i+1}^{t+1} - \Delta Z_i^{t+1})}{\Delta x} \\ &g \frac{Q|Q}{C^2 AR} \cdot \frac{gn^2 \left[0.5(c_{i+1}^t + c_i^t)^{4/3} \right]}{\left[0.5(A_{i+1}^t + A_i^t)^{7/3} \right]} \cdot \frac{|Q_{i+1}^t + Q_i^t|}{4} \left[Q_{i+1}^t + Q_i^t + y_Q(\Delta Q_{i+1}^{t+1} + \Delta Q_i^{t+1}) \right] \end{aligned}$$

Thay tất cả vào phương trình (2) sẽ nhận được phương trình động lực viết dưới dạng sai phân :

$$b_1 \Delta Z_i^{t+1} + b_2 \Delta Q_i^{t+1} + b_3 \Delta Z_{i+1}^{t+1} + b_4 \Delta Q_{i+1}^{t+1} = b_5 \quad (9)$$

với :

$$b_1 = \Delta t \cdot \bar{U}^2 \bar{B} \cdot q_Z - g \bar{A} \cdot \Delta t \cdot q_Z$$

$$b_2 = \frac{\Delta x}{2} - 2 \Delta t \cdot \bar{U} \cdot q_Q + g \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \bar{D} y_Q$$

$$b_3 = -\Delta t \cdot \bar{U}^2 \bar{B} \cdot q_Z + g \bar{A} \cdot \Delta t \cdot q_Z$$

$$b_4 = \frac{\Delta x}{2} + 2 \Delta t \cdot \bar{U} \cdot q_Q + g \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \bar{D} y_Q$$

$$b_5 = -2 \Delta t \cdot \bar{U} \cdot (Q_{i+1}^t - Q_i^t) + \Delta t \cdot \bar{U}^2 \bar{B} (Z_{i+1}^t - Z_i^t) - g \bar{A} \Delta t (Z_{i+1}^t - Z_i^t) - g \Delta t \cdot \Delta x \cdot \bar{D} (Q_{i+1}^t + Q_i^t)$$

trong đó :

$$\bar{U} = \frac{Q_{i+1}^t + Q_i^t}{A_{i+1}^t + A_i^t}$$

$$\bar{B} = (B_{i+1}^t + B_i^t) / 2$$

$$\bar{A} = (A_{i+1}^t + A_i^t) / 2$$

$$\bar{D} = \frac{n^2 \left[0.5 (c_{i+1}^t + c_i^t)^{4/3} \right]}{4 \left[0.5 (A_{i+1}^t + A_i^t)^{7/3} \right]} \cdot |Q_{i+1}^t + Q_i^t|$$

1.4 Điều kiện tại nút hội tụ các nhánh sông, điều kiện biên, điều kiện đặc biệt

- **Điều kiện tại nút hội tụ nhiều nhánh (>2) của mạng lưới:**

Gọi N là số nhánh hội tụ tại một nút bất kỳ, các điều kiện sau đây sẽ được sử dụng :

- Cao trình mực nước tại các mặt cắt hội tụ về nút là bằng nhau. Từ đó có (N-1) phương trình có dạng như sau :

$$\Delta Z_k^{t+1} = \Delta Z_p^{t+1} \quad (10)$$

với k, p là các tên mặt cắt hội tụ về nút hội tụ đang xét.

- Tổng lưu lượng nước hội tụ về nút bằng tổng lưu lượng ra khỏi nút. Từ đó có 1 phương trình có dạng như sau :

$$\sum_{k=1}^N \Delta Q_k^{t+1} = 0 \quad (11)$$

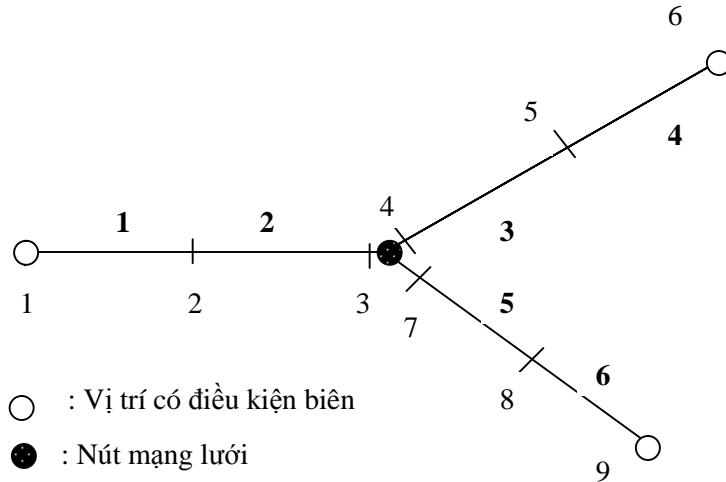
Tóm lại, tại mỗi nút hội tụ N nhánh sẽ lập được N phương trình độc lập tuyến tính.

- **Điều kiện biên :** Mô hình được thiết lập cho phép mô tả các điều kiện biên loại mực nước ΔZ_{Lim}^{t+1} và loại lưu lượng ΔQ_{Lim}^{t+1} .

- **Điều kiện đặc biệt :** Trong trường hợp dòng chảy đi qua các loại công trình : cống làm việc theo 1 hoặc 2 chiều, đập tràn, đập ngăn ... phương trình động lực Saint Venant (2) sẽ được thay thế bởi phương trình biểu diễn quy luật thủy lực qua công trình thích hợp tương ứng.

1.5 Thiết lập và giải hệ phương trình tuyến tính hóa

Ví dụ minh họa sau đây cho thấy nguyên tắc thiết lập hệ phương trình tuyến tính để giải bài toán. Xét một mạng lưới như sau :



Với mạng lưới nêu trên có 9 mặt cắt, do đó có 18 ẩn số ($2 \cdot 9 = 18$). Do đó, cần có hệ 18 phương trình độc lập tuyến tính để xác định ẩn số. Các phương trình sẽ được thiết lập như sau :

- Mạng lưới trên gồm có 6 đoạn, do đó sẽ thành lập được 12 phương trình. Thật vậy, mỗi đoạn lập được 2 phương trình : 1 phương trình liên tục (8) và 1 phương trình động lực (9).

- Mạng lưới nêu trên có 1 nút (ký hiệu ●) gồm $N=3$ nhánh hội tụ do đó sẽ thành lập được 3 phương trình (có 2 phương trình từ điều kiện mực nước tại các mặt cắt 3, 4, 7 và 1 phương trình về điều kiện tổng lưu lượng vào nút bằng tổng lưu lượng ra khỏi nút tại mọi thời điểm).

- Từ các mặt cắt tại biên (1, 6, 9) sẽ có 3 phương trình biểu thị điều kiện biên.

Tóm lại, ta thiết lập được một hệ gồm $12+3+3=18$ phương trình để xác định 18 ẩn số tại 9 nút của mạng lưới.

2. MÔ HÌNH HAI CHIỀU (2D) CHO DÒNG CHẢY TRÀN MẶT

Mô hình này chỉ giới hạn nghiên cứu hiện tượng trong đó dòng chảy có chiều sâu trung bình h của lớp nước là bé so với hai phương nằm ngang (dòng chảy nước nông) và dòng chảy tràn đồng biến theo thời gian tương đối chậm. Từ đặc tính nước nông, dòng chảy sẽ được mô hình hóa theo hai phương nằm ngang. Việc giới hạn nghiên cứu dòng chảy biến đổi chậm, mô hình toán sẽ được mô phỏng bằng mô hình dạng sóng khuếch tán. Điều này có nghĩa chỉ có hai số hạng biểu thị độ dốc mực nước và ma sát đáy tác dụng lên dòng chảy là được xem xét trong phương trình động lực.

2.1 Hệ phương trình vi phân cơ bản

Dòng chảy tràn mặt được mô tả bởi các phương trình sau đây.

Phương trình liên tục :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial(Vh)}{\partial y} = q_{bs} \quad (12)$$

Phương trình động lực dạng sóng khuếch tán theo phương X và phương Y :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q_x |Q_x|}{C_x^2 A_x^2 R_x} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{Q_y |Q_y|}{C_y^2 A_y^2 R_y} = 0 \quad (14)$$

trong đó :

U, V : vận tốc trung bình (theo phương thẳng đứng) theo phương x và y.

Z, h : cao trình mực nước, chiều sâu trung bình của lớp dòng chảy.

$Q_x = U(h\Delta y)$: lưu lượng theo phương x.

$Q_y = V(h\Delta x)$: lưu lượng theo phương y.

$A_x; A_y$: diện tích ướt theo phương x và phương y.

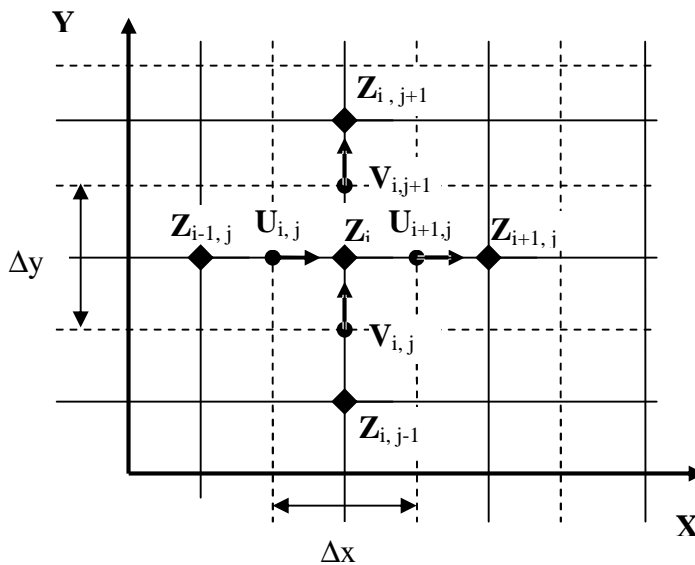
$R_x; R_y$: bán kính thủy lực theo phương x và phương y.

q_{bs} : chiều dày lớp nước (m/s) bổ sung (lấy ra) hệ thống trong một đơn vị thời gian.

$C_x = R_x^{1/6} / n_x; C_y = R_y^{1/6} / n_y$: n_x, n_y chỉ hệ số nhám theo phương x và phương y.

2.2 Sơ đồ sai phân không gian và thời gian

Sai phân không gian 2D được thực hiện trên lưới so le. Vị trí xác định gia số mực nước $\Delta Z_{i,j}^{t+1}$ (hoặc $\Delta h_{i,j}^{t+1}$) tạo thành một lưới. Các vị trí tính vận tốc U, V sẽ được xác định ở vị trí so le tạo thành mạng lưới riêng, trình bày trên sơ đồ sau.



Hình 2. Sơ đồ sai phân không gian 2D

Sai phân thời gian theo sơ đồ ẩn Preissmann.

2.3 Phương trình sai phân

Ấn số bài toán 2D là gia số mực nước tại các điểm nút cho mạng lưới $\Delta Z_{i,j}^{t+1}$, được định nghĩa như sau: $\Delta Z_{i,j}^{t+1} = Z_{i,j}^{t+1} - Z_{i,j}^t$

Từ phương trình sóng khuếch tán, với giả thiết là chiều sâu trung bình dòng chảy h là bé so với kích thước theo phương ngang của ô lưới ($\Delta x, \Delta y$), ta có :

$$[Uh]_{i,j} = \frac{h^{5/3}}{n_x [\Delta x |Z_{i-1,j} - Z_{i,j}|]^{1/2}} (Z_{i-1,j} - Z_{i,j}) = a_i (Z_{i-1,j} - Z_{i,j}) \quad (15)$$

$$[Vh]_{i,j} = \frac{h^{5/3}}{n_y [\Delta y |Z_{i,j-1} - Z_{i,j}|]} (Z_{i,j-1} - Z_{i,j}) = b_i (Z_{i,j-1} - Z_{i,j}) \quad (16)$$

Thay vào phương trình liên tục và thu gọn ta có phương trình sai phân viết tại ô thứ $\Delta Z_{i,j}$ cho ta :

$$\begin{aligned} & -q_z \frac{dt}{\Delta x} a_i \Delta Z_{i-1,j}^{t+1} - q_z \frac{dt}{\Delta x} a_j \Delta Z_{i+1,j}^{t+1} - q_z \frac{dt}{\Delta y} b_i \Delta Z_{i,j-1}^{t+1} - q_z \frac{dt}{\Delta y} b_j \Delta Z_{i,j+1}^{t+1} + \\ & (1 + q_z \frac{dt}{\Delta x} a_i + q_z \frac{dt}{\Delta x} a_j + q_z \frac{dt}{\Delta y} b_i + q_z \frac{dt}{\Delta y} b_j) \Delta Z_{i,j}^{t+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_i Z'_{i-1,j} + a_j Z'_{i+1,j}) + \\ & \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_i Z'_{i,j-1} + b_j Z'_{i,j+1}) - \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} (a_i + a_j) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_i + b_j) \right] Z'_{i,j} + q_{bs}(i) * \Delta t \end{aligned} \quad (17)$$

trong đó :

$$a_i = \frac{[0.5(h_{i-1,j} + h_{i,j})]^{5/3}}{n_x [\Delta x_i |Z_{i-1,j} - Z_{i,j}|]} ; b_i = \frac{[0.5(h_{i,j} + h_{i,j-1})]^{5/3}}{n_y [\Delta y_i |Z_{i,j} - Z_{i,j-1}|]}$$

(Ghi chú: Vị trí tính i trùng với vị trí tính $U_{i,j}$ và vị trí tính i trùng với vị trí tính $V_{i,j}$).

Đây là phương trình tuyến tính theo $\Delta Z_{i,j}^{t+1}$, biểu thị mối tương quan giữa gia số mực nước trung bình tại ô (i,j) và gia số mực nước trung bình của 4 ô chung quanh (i-1,j), (i+1,j), (i,j-1), (i,j+1).

2.4 Thiết lập và giải hệ phương trình tuyến tính hóa

Ta có M*N ẩn số giá trị gia số mực nước trung bình $\Delta Z_{i,j}^{t+1}$ (với i=1,M và j=1,N) tại các tâm ô cần xác định. Trên cơ sở phương trình (17), viết phương trình sai phân cho tất cả các ô của toàn mạng kết hợp với các điều kiện biên từ các ô ngoài biên ta sẽ nhận được hệ M*N phương trình độc lập tuyến tính (M: số ô theo phương ngang, N: số ô theo phương đứng) với các hệ số phụ thuộc vào ẩn số cần giải. Dùng phương pháp giải lập để xác định nghiệm số.

3. MÔ HÌNH TOÁN KẾT HỢP (1D+2D)

Mô hình toán 1D và 2D sẽ được giải tách biệt nhau. Sự quan hệ giữa hai mô hình thông qua phương trình trao đổi nước ở các ô ruộng có cạnh tiếp xúc với sông. Xem dòng chảy từ sông tràn vào đồng ở các ô nằm cạnh sông hoặc từ đồng đổ vào sông xem như dòng chảy qua một đập tràn đỉnh rộng. Lưu lượng trao đổi đơn vị q được xác định bởi phương trình sau :

$$q = \pm S_n * h \sqrt{2g |Z_s - Z_r|} \quad (m^2/s)$$

trong đó :

S_n : hệ số lưu lượng, phụ thuộc vào điều kiện địa hình.

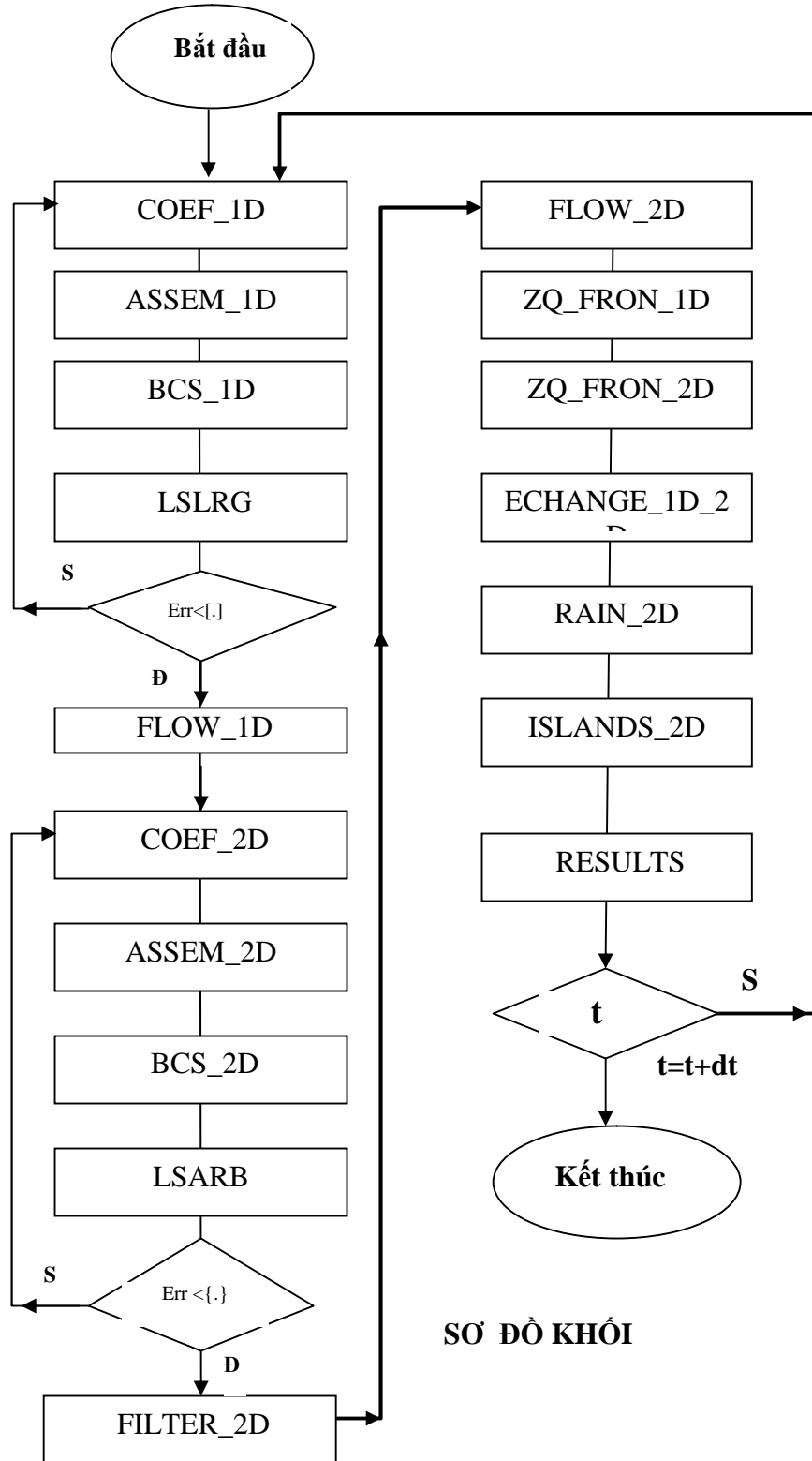
h : chiều sâu nước trung bình của ô trao đổi nước với sông.

Z_s, Z_r : cao trình mực nước trong sông, ô ruộng.

Giá trị lưu lượng đơn vị q sẽ tính với sơ đồ hiện sau mỗi lần lặp và sẽ được đưa vào phương trình 1D và 2D để tính các hệ số liên quan cho lần lặp kế tiếp.

4. SƠ ĐỒ KHỐI CHƯƠNG TRÌNH

Mô hình tính được tổ chức theo sơ đồ khối như sau:



SƠ ĐỒ KHỐI

Chức năng của các Subroutine trong sơ đồ khối nói trên được xác định như sau:

| | |
|---------------|---|
| COEF_1D | : Hệ số phương trình dòng chảy 1D. |
| ASSEM_1D | : Thiết lập hệ phương trình dòng chảy 1D. |
| BCS_1D | : Điều kiện biên dòng chảy 1D. |
| LSLRG | : Hàm thư viện giải hệ phương trình tuyến tính. |
| LSARB | : Hàm thư viện giải ma trận band. |
| FLOW_1D | : Tính vận tốc, lưu lượng chảy 1D. |
| COEF_2D | : Hệ số phương trình dòng chảy 2D. |
| ASSEM_2D | : Thiết lập hệ phương trình dòng chảy 2D. |
| BCS_2D | : Điều kiện biên dòng chảy 2D. |
| FILTER_2D | : Làm trơn kết quả trường vận tốc 2D : U và V. |
| RAIN_2D | : Tính lớp nước tương đương trao đổi giữa sông và ô ruộng và nước mưa nếu có. |
| ECHANGE_1D_2D | : Xác định lưu lượng đơn vị trao đổi nước giữa sông và đồng. |
| ISLANDS_2D | : Xác định vùng không ngập, vùng ngập sau mỗi bước lặp. |
| RESULTS | : Xuất kết quả trung gian. |

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. J. A. Cunge. *Simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux*. Institut national Polytechnique de Grenoble, 1986.
- [2]. Ven Te Chow. *Open channel hydraulics. International student edition*.
- [3]. Nguyễn Thống. *Simulation des écoulements 3D aux équations primitives. Effets des topographies sous marines à grandes et à moyennes échelles*. Thèse de doctorat en 1991 à l'INPG, France.
- [4]. Nguyễn Ân Niên. *Phân tích các mô hình tính toán thủy lực sử dụng cho đồng bằng sông Cửu Long*. Hội thảo Thiết kế & Thi công công trình Thủy lợi đồng bằng sông Cửu Long, 01/2002.