

# VỀ SAI PHÂN CỦA GRADIENT ĐỐI VỚI HÀM THUỘC LỚP $C^{1,1}$ TRÊN KHÔNG GIAN HILBERT

ON THE DIFFERENCE OPERATOR OF GRADIENT OF  $C^{1,1}$ -FUNCTIONS ON HILBERT SPACES

Lâm Trần Phương Thủy<sup>1,\*</sup>

DOI: <http://doi.org/10.57001/hu1h5804.2024.225>

## TÓM TẮT

Cho  $f$  là một hàm thuộc lớp  $C^{1,1}$  trên một tập mở khác rỗng trong không gian Hilbert  $H$ . Gọi  $M$  là hằng số Lipschitz của gradient  $\nabla f$ . Với một điều kiện của  $f$  tác giả chứng minh rằng

$$\frac{1}{2M} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq \frac{M}{2} \|x - y\|^2.$$

**Từ khóa:**  $C^{1,1}$ -hàm, định lý thác triển Whitney.

## ABSTRACT

Let  $f$  be a  $C^{1,1}$ -function on a nonempty open subset of the Hilbert space  $H$ . Denote by  $M$  the Lipschitz constant of the gradient  $\nabla f$ . With an added condition of  $f$ , author prove the following inequalities

$$\frac{1}{2M} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq \frac{M}{2} \|x - y\|^2.$$

**Keywords:**  $C^{1,1}$ -function, Whitney Extension Theorem.

<sup>1</sup>Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Điện Lực

\*Email: [thuyltp@epu.edu.vn](mailto:thuyltp@epu.edu.vn)

Ngày nhận bài: 08/4/2024

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 10/5/2024

Ngày chấp nhận đăng: 25/6/2024

## 1. GIỚI THIỆU

Giả sử  $H$  là một không gian Hilbert với tích vô hướng được kí hiệu bởi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Một hàm thực trên  $H$  được gọi là thuộc lớp  $C^{1,1}$  nếu nó khả vi và gradient của nó là một hàm đồng liên tục Lipschitz. Gọi  $E$  là một tập con của  $H$ . Mỗi cặp hàm  $f: E \rightarrow \mathbb{R}, G: E \rightarrow H$  được gọi là một 1-jet. Trong [4], Gruyer chứng minh rằng, điều kiện cần và đủ để một 1-jet  $(f, G)$  có thể thác triển lớp  $C^{1,1}$  lên toàn  $H$  là:

$$2s \sup_{x \in H} \sup_{a \neq b \in E} \frac{f(a) - f(b) + \langle G(a), x - a \rangle - \langle G(b), x - b \rangle}{\|a - x\|^2 + \|a - b\|^2} < \infty.$$

Từ kết quả trên Gruyer cũng đạt được một mở rộng của Định lý thác triển Whitney [2, 3, 4, 5] cho các hàm thuộc lớp  $C^{1,1}$ .

Theo [1], 1-jet  $(f, G)$  được gọi là thỏa mãn điều kiện  $CW^{1,1}$  trên  $E$  nếu tồn tại hằng số  $M > 0$  sao cho

$$f(x) - f(y) - \langle G(y), x - y \rangle \geq \frac{1}{2M} \|G(x) - G(y)\|^2$$

với mọi  $x, y \in E$ .

Cũng trong công trình đó, Azagra và Mudarra chứng minh được rằng nếu  $f$  là một hàm lỗi thuộc lớp  $C^{1,1}$  trên  $H$  thì  $(f, \nabla f)$  thỏa mãn điều kiện  $CW^{1,1}$ .

Mục đích của bài báo này là đưa ra một chặn trên cho  $f(x) - f(y) - \langle G(y), x - y \rangle$  đối với hàm thuộc lớp  $C^{1,1}$  trên một tập mở thuộc  $H$  và mở rộng kết quả của Azagra và Mudarra [1] tới trường hợp mà ở đó điều kiện về tính lỗi được giảm nhẹ.

## 2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong phần này, tác giả đưa ra một số khái niệm và kết quả liên quan.

Cho  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  là một không gian Hilbert. Đoạn thẳng nối hai điểm  $x, y$  thuộc  $H$ , kí hiệu bởi  $[x, y]$  là tập các điểm  $z = tx + (1-t)y$  với  $t \in [0, 1]$ . Kí hiệu  $H^*$  là không gian đối ngẫu của  $H$ . Định lí biểu diễn Riesz khẳng định rằng ánh xạ  $\phi: H \rightarrow H^*$  cho bởi  $\phi(x)(y) := \langle x, y \rangle$  là một đẳng cấu bảo toàn chuẩn.

Xét  $E$  là một tập mở khác rỗng trong  $H$  và  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  là một ánh xạ khả vi, với ánh xạ đạo hàm

$$f': E \rightarrow H^*.$$

Gradient  $\nabla f$  của  $f$  là ánh xạ từ  $E$  vào  $H$  được cho bởi  $\nabla f = \phi^{-1} \circ f'$ .

Do đó, với mỗi  $x \in E, \nabla f(x)$  là phần tử duy nhất của  $H$  thỏa mãn  $\langle \nabla f(x), y \rangle = f'(x)(y)$  với mọi  $y \in H$ .

Do  $\phi^{-1}$  liên tục, nên nếu  $f$  thuộc lớp  $C^1$  thì  $\nabla f$  là ánh xạ liên tục.

Ánh xạ  $f$  được gọi là thuộc lớp  $C^{1,1}$  nếu  $f$  thuộc lớp  $C^1$  và  $\nabla f$  đồng liên tục Lipschitz.

Đạo hàm theo hướng  $h \in H$  của  $f$  tại  $x \in E$  được định nghĩa bởi

$$Df(x,h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

Nếu  $f$  khả vi tại  $x$  thì  $f$  có đạo hàm theo mọi hướng tại  $x$  và  $Df(x,h) = f'(x)(h)$ .

### 3. KẾT QUẢ CHÍNH

**Định lý 3.1.** Cho  $E$  là một tập mở khác rỗng trong không gian Hilbert  $H$  và  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm thuộc lớp  $C^{1,1}$ . Gọi  $M$  là hằng số Lipschitz của  $\nabla f$ . Khi đó:

a)  $|f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle| \leq \frac{M}{2} \|x - y\|^2$  với mọi  $x, y$  sao

cho đoạn thẳng  $[x; y]$  thuộc  $E$ .

b)  $\frac{1}{2M} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle$  với mọi  $x, y$  thuộc  $E$  sao cho tồn tại dãy các số dương  $\{t_k\}$  hội tụ đến 0 thỏa mãn  $t_k x + (1 - t_k)y \in E$  và  $f(t_k x + (1 - t_k)y) \leq t_k f(x) + (1 - t_k)f(y)$ .

#### Chứng minh:

Các kết luận của định lý là hiển nhiên đúng trong trường hợp  $x = y$ . Sau đây ta xét trường hợp  $x$  và  $y$  phân biệt.

a) Ta có

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx + (1-t)y) dt = \int_0^1 \langle \nabla f(tx + (1-t)y), x - y \rangle dt.$$

Mặt khác:  $\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt.$

Do đó:

$$f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f(y), x - y \rangle dt.$$

Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle| &\leq \int_0^1 |\langle \nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f(y), x - y \rangle| dt \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f(y)\| \|x - y\| dt \\ &\leq \int_0^1 Mt \|x - y\|^2 dt = \frac{M}{2} \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

b) Cố định  $x, y$  thỏa mãn điều kiện trong kết luận b). Xét hàm  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi:

$$h(z) = \frac{1}{M} (f(z) - f(y) - \langle \nabla f(y), z - y \rangle).$$

Ta có:

$$h(y) = 0 \text{ và } h(x) = \frac{1}{M} (f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle).$$

Ta cũng có:

$$\nabla h(z) = \frac{\nabla f(z) - \nabla f(y)}{M} \tag{1}$$

Do đó  $\nabla h(y) = 0$ .

Để chứng minh kết luận, ta giả sử điều ngược lại:

$$\frac{1}{2M} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 > f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

và chỉ ra điều mâu thuẫn.

Từ giả thiết này và những điều trên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla h(x)\|^2 &= \frac{1}{2M^2} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \\ &> \frac{f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle}{M} = h(x) \end{aligned} \tag{2}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} h(t_k x + (1 - t_k)y) &= \frac{1}{M} (f(t_k x + (1 - t_k)y) - f(y) - \langle \nabla f(y), t_k(x - y) \rangle) \\ &\leq \frac{1}{M} (t_k(f(x) - f(y)) - \langle \nabla f(y), t_k(x - y) \rangle) \\ &= \frac{t_k}{M} (f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle) = t_k h(x). \end{aligned}$$

Do  $\nabla h(y) = 0$  nên đạo hàm theo phương  $x - y$  của  $h$  tại  $y$  triệt tiêu. Do đó:

$$0 = Dh(y, x - y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(y + t_k(x - y))}{t_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k h(x)}{t_k} = h(x).$$

Kết hợp cùng (2) ta được  $\|\nabla h(x)\| > 0$ .

Đặt  $a = \|\nabla h(x)\| > 0$ ,  $b = h(x) \geq 0$  và  $v = -\frac{\nabla h(x)}{\|\nabla h(x)\|}$ .

Xét hàm số  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cho bởi  $\varphi(t) = h(x + tv)$ .

Ta có:

$$\varphi(0) = b, \varphi'(0) = \langle \nabla h(x), v \rangle = -a.$$

Hơn nữa, do  $v$  có chuẩn bằng 1,  $\nabla f$  có hằng số Lipschitz bằng  $M$  nên từ (1) ta cũng có:

$$\begin{aligned} |\varphi'(t) - \varphi'(s)| &= \langle \nabla h(x + tv), v \rangle - \langle \nabla h(x + sv), v \rangle \\ &= \langle \nabla f(x + tv) - \nabla f(x + sv), v \rangle \\ &= \left\langle \frac{\nabla f(x + tv) - \nabla f(x + sv)}{M}, v \right\rangle \\ &\leq \frac{\|\nabla f(x + tv) - \nabla f(x + sv)\|}{M} \leq |t - s|. \end{aligned}$$

Vậy  $\varphi'$  có hằng số Lipschitz không vượt qua 1. Áp dụng Định lý Lagrange, ta có:

$$|\varphi(t) - b + at| = |\varphi(t) - (\varphi(0) + \varphi'(0)t)| \leq \frac{t^2}{2}.$$

Mặt khác, từ (2) ta có  $b < \frac{1}{2}a^2$ . Do đó:

$$h(x + av) = \varphi(a) \leq -a^2 + b + \frac{a^2}{2} < 0.$$

Đặt  $x' = x + av$ . Do  $h(y) = 0$  nên  $x' \neq y$ . Ta có

$$\begin{aligned} h(t_k x + (1 - t_k)y) &= \frac{1}{M} (f(t_k x' + (1 - t_k)y) - f(y) - \langle \nabla f(y), t_k(x' - y) \rangle) \\ &\leq \frac{1}{M} (t_k(f(x') - f(y)) - \langle \nabla f(y), t_k(x' - y) \rangle) \\ &= \frac{t_k}{M} (f(x') - f(y) - \langle \nabla f(y), x' - y \rangle) = t_k h(x'). \end{aligned}$$

Do  $\nabla h(y) = 0$  nên đạo hàm theo phương  $x' - y$  của  $h$  tại  $y$  triệt tiêu. Do đó:

$$0 = Dh(y, x' - y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(y + t_k(x' - y)) - h(y)}{t_k}$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k h(x') - t_k h(y)}{t_k} = h(x') - h(y) = h(x + av) - h(y).$$

Ta dẫn tới điều mâu thuẫn. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

#### 4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, tác giả đã đạt được một số đánh giá sai phân tại địa phương. Chúng tôi hy vọng rằng trong các nghiên cứu tiếp theo, bài toán thác triển sẽ được mở rộng tương ứng.

---

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. D. Azagra, C. Mudarra, "An Extension Theorem for convex functions of class  $C^{1,1}$  on Hilbert spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, 446, 1167-1182, 2017.
- [2]. D. Azagra, C. Mudarra, "Whitney extension theorems for convex functions of the classes  $C^1$  and  $C^{1,w}$ ," *Proc. Lond. Math. Soc.*, 114, 133-158, 2017.
- [3]. M. Ghomi, "The problem of optimal smoothing for convex functions," *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130, 2255-2259, 2002.
- [4]. E. L. Gruyer, "Minimal Lipschitz extensions to differentiable functions defined on a Hilbert space," *Geom. Funct. Anal.*, 19, 1101-1118, 2009.
- [5]. H. Whitney, "Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36, 63-89, 1934.

---

#### AUTHOR INFORMATION

**Lam Tran Phuong Thuy**

Faculty of Basic Science, Electric Power University, Vietnam