SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA LỚP PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN DỊ THƯỜNG

ON THE EXISTENCE FOR ANOMALOUS DIFFUSION EQUATIONS

Lâm Trần Phương Thủy[1,*]

TÓM TẮT

Bằng phương pháp điểm bất động, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại nghiệm trên thang Hilbert cho lớp phương trình vi phân không địa phương nửa tuyến tính, lớp phương trình này được sử dụng để mô tả các hiện tượng khuếch tán dị thường. Kết quả thu được có thể áp dụng cho nhiều mô hình thực tế với phần phi tuyến tăng trưởng dạng đa thức.

Từ khóa: *Phương trình vi phân không địa phương, khuếch tán dị thường, sự tồn tại nghiệm.*

ABSTRACT

We analyze the existence of solutions on Hilbert scales for a class of anomalus diffusion equations by using fixed point arguments. The obtained results may be applied to concrete models with polynomial growth.

Keywords: *Nonlocal differential equations, anomalous diffusion, existence.*

[1]Trường Đại học Điện lực

[*]Email: thuyltp@epu.edu.vn

Ngày nhận bài: 15/4/2022

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 15/6/2022

Ngày chấp nhận đăng: 27/6/2022

1. GIỚI THIỆU

Cho Ω là một miền bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^n$ với biên trơn $\partial\Omega$. Xét phương trình

$$\partial_t\left[k*(u-u_0)\right]+(-\Delta)^\gamma u = f(u), t>0, x\in\Omega, \quad (1)$$

với điều kiện ban đầu

$$u(0,x)=\varphi(x), x\in\Omega, \quad (2)$$

và điều kiện biên Dirichlet

$$u(t,x)=0, t>0, x\in\partial\Omega. \quad (3)$$

Trong (1), nhân $k\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^+\right)$, $\gamma>0$ và $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm cho trước. Ký hiệu * là ký hiệu tích chập Laplace với biến thời gian, tức là $(k*v)(t,x)=\int_0^t k(t-s)v(s,x)ds$.

Trong tài liệu [14], các tác giả đã chỉ ra rằng hạng tử đầu tiên của phương trình (1) cho thấy phương trình này thuộc vào lớp các phương trình vi phân đạo hàm riêng không địa phương theo biến thời gian. Nó dùng làm mô hình để mô tả các quá trình khuếch tán dị thường. Hơn nữa, (1) còn là mô hình tổng quát của một số phương trình khi chọn hàm nhân k khác nhau.

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng giả thiết được sử dụng phổ biến cho hàm k sau đây:

Giả thiết (**K**): *Hàm* $k\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^+\right)$ *không âm và không tăng, và tồn tại một hàm* $l\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^+\right)$ *sao cho k*l = 1 trên (0,∞).*

Dựa theo giả thiết này, chúng ta có thể lấy một số ví dụ minh họa về tính tổng quát của mô hình nói trên. Cụ thể, với hàm gamma $\Gamma(\alpha),\alpha>0$, ta đặt $g_\alpha(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$. Khi đó, (1) là phương trình mô tả quá trình

- khuếch tán chậm: $k(t)=g_{1-\alpha}(t)$ và $l(t)=g_\alpha(t)$ với $\alpha\in(0;1)$. Phương trình (1) là phương trình vi phân phân thứ, đây là lớp phương trình được nghiên cứu rộng rãi và có rất nhiều ứng dụng.
- khuếch tán siêu chậm: $k(t)=\int_0^1 g_\beta(t)d\beta$ và $l(t)=\int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{1+p}dp, t>0$, thì ta có phương trình với bậc phân phối.

Mặt khác, (1) là phương trình vi phân phân thứ đa hạng tử nếu chọn $k(t)=\sum_{i=1}^m \mu_i g_{1-\alpha_i}(t)$ với $\alpha_i\in(0;1)$ và $\mu_i>0$.

Trong trường hợp phương trình (1) là phương trình tuyến tính thì sự tồn tại và dáng điệu nghiệm đã được nghiên cứu trong [5]. Trong trường hợp nửa tuyến tính, tính ổn định Lyapunov được công bố trong công trình [4, 5, 6]. Gần đây, chúng tôi nghiên cứu về tính giải được cũng như tính ổn định cho trường hợp không có trễ, và có trễ với phần nhiễu phi tuyến tăng trưởng dưới tuyến tính trong không gian Hilbert và kết quả được công bố trong [1, 2].

Mục đích của bài báo này là nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của hệ nói trên trong thang Hilbert với phần phi tuyến yếu hơn. Cấu trúc của bài báo như sau: Trong phần chuẩn bị, chúng tôi trình bày về phương trình tích phân Volterra, thang Hilbert và các toán tử liên quan đến nghiệm

nhẹ cùng các tính chất của chúng. Các tính chất này cũng là những đóng góp của chúng tôi trong việc làm phong phú nghiên cứu về những toán tử tuyến tính liên quan đến nghiệm của phương trình vi phân trong không gian Hilbert. Phần kết quả chính trình bày về sự tồn tại nghiệm và ổn định nghiệm. Các kết quả nghiêu cứu này sẽ làm tiền đề cho nghiên cứu tiếp về sự tồn tại trên các không gian Sobolev phân thứ bằng cách sử dụng phương pháp nhúng.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

2.1. Phương trình tích phân Volterra

Gọi s và r là các nghiệm của phương trình Volterra loại 2

$$s(t)+\mu.(l*s)(t)=1, \qquad t\geq 0$$
$$r(t)+\mu.(l*r)(t)=l(t), \quad t>0$$

Sự tồn tại nghiệm và tính duy nhất nghiệm đã được chứng minh trong [3]. Chúng tôi nhắc lại ở dưới đây một số tính chất quan trọng của các nghiệm $s(\cdot,\mu)$ và $r(\cdot,\mu)$.

Mệnh đề 1. (xem [1, 6]) Giả sử (**K**) được thỏa mãn. Khi đó $s(\cdot,\mu)$, $r(\cdot,\mu)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ với mỗi $\mu>0$. Thêm nữa, ta có các tính chất:

(a) Hàm $s(\cdot,\mu)$ không âm và không tăng và

$$s(t,\mu)\left[1+\mu\int_0^t l(\tau)d\tau\right]\leq 1, \quad \forall t\geq 0,$$ vì thế nếu $l\notin L^1(\mathbb{R}^+)$, thì $\lim\limits_{t\to\infty} s(t,\mu)=0$.

(b) Hàm $r(\cdot,\mu)$ là không âm và

$$s(t,\mu)=1-\mu\int_0^t r(\tau,\mu)d\tau=k*r(\cdot,\mu)(t),\ t\geq 0.$$

Nên $\int_0^t r(\tau,\mu)d\tau\leq\mu^{-1},\forall t>0$.

(c) Với mỗi $t>0$, các hàm số $\mu\mapsto s(t,\mu)$ và $\mu\mapsto r(t,\mu)$ không tăng.

2.2. Thang Hilbert

Ký hiệu $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian $L^2(\Omega)$ gồm các hàm riêng của toán tử $-\Delta$ với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất, tức là

$-\Delta e_n=\lambda_n e_n$ trong Ω và $e_n=0$ trên $\partial\Omega$.

Khi đó, ta có thể giả sử rằng các giá trị riêng thỏa mãn $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n\to\infty$ khi $n\to\infty$.

Với $\beta>0$, ta định nghĩa các không gian

$$H^\beta=\left\{v\in L^2(\Omega):\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^\beta(v,e_n)^2<\infty\right\},$$

ở đây ký hiệu $(\cdot,\cdot)$ được hiểu là tích vô hướng trong $L^2(\Omega)$. Khi đó H^β là các không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(u,v)_{H^\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^\beta(u,e_n)(v,e_n)$$

và chuẩn xác định như sau:

$$\|v\|_{H^\beta}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^\beta(v,e_n)^2.$$

Đây là các không gian con của $L^2(\Omega)$ với có tính nhúng như sau $H^{\beta_1}\subset H^{\beta_2}$ khi $\beta_1\geq\beta_2$, tính đơn điệu giảm.

Hơn nữa, các phép nhúng $H^\beta\subset L^2(\Omega)$ là compact và ta có thể xác định $H^{-\beta}$ bằng cách coi nó chính là không gian đối ngẫu của H^β với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle_{-\beta,\beta}$ và chuẩn như sau:

$$\|\phi\|^2:=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}\langle\phi,e_n\rangle_{-\beta,\beta}.$$

Các không gian $H^{-\beta}$ đơn điệu tăng theo β bởi vì ta có các phép nhúng $H^{-\beta_2}\subset H^{-\beta_1}$.

Các không gian Hilbert $H^\beta,\beta\in\mathbb{R}$ được gọi là các ***thang Hilbert*** của $L^2(\Omega)$.

Trên thang Hilbert, toán tử $(-\Delta)^\gamma$ xác định như sau

$$(-\Delta)^\gamma v=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^\gamma(v,e_n)e_n, v\in H^{2\gamma}.$$

2.3. Toán tử giải - tính chất và Định nghĩa nghiệm của hệ

Dựa vào các nghiệm của phương trình tích phân Volterra và các giá trị riêng của toán tử $(-\Delta)^\gamma$, ta định nghĩa các toán tử s(t) và R(t) như sau

$$S(t)v=\sum_{n=1}^{\infty}s(t,\lambda_n^\gamma)(v,e_n)e_n, \quad t\geq 0, v\in L^2(\Omega) \tag{4}$$

$$R(t)v=\sum_{n=1}^{\infty}r(t,\lambda_n^\gamma)(v,e_n)e_n, \quad t>0, v\in L^2(\Omega) \tag{5}$$

dễ thấy S(t) và r(t) là các toán tử tuyến tính. Sau đây chúng tôi đưa ra một số tính chất đóng vai trò chính trong phần sự tồn tại nghiệm.

Mệnh đề 2. Xét các toán tử S(t) và r(t) được định nghĩa bởi (4) và (5), ta có

(i) với $v\in H^\sigma$ thì

$$\|S(t)v\|_{H^\sigma}\leq s(t,\lambda_1^\gamma)\|v\|_{H^\sigma}.$$

(ii) Với $g\in C([0,T];H^\nu)$ thì $R*g\in C([0,T];H^\sigma)$, ở đây $\nu=\sigma-\gamma(\eta+1)$ và $\eta\in(0;1)$. Hơn nữa, ta có

$$\|R*g(t)\|_{H^\sigma}\leq\left(\int_0^t\frac{l(\tau)}{(1*l)^\eta}\|g(t-\tau)\|_{H^\nu}^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chứng minh: Phép chứng minh là tương tự như phép chứng minh của Lemma 2.3 trong [1].

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sử dụng kí hiệu u(t) thay cho $u(t,\cdot)$ và xét u là một hàm xác định trên [0, T] và lấy giá trị trong H^β, $\beta \in \mathbb{R}$. Với $g \in C([0,T];L^2(\Omega))$, ta xét bài toán tuyến tính

$$\partial_t\left[k*(u-u_0)\right]+(-\Delta)^\gamma u = g(t), t>0, x\in\Omega, \quad (6)$$

với điều kiện ban đầu

$$u(0)=u_0, \quad (7)$$

Dựa vào các toán tử S(t) và R(t), ta có định nghĩa nghiệm nhẹ cho bài toán (6)-(7) như sau

Định nghĩa 1. Hàm $u(t)\in H^\sigma, t\in[0,T], \sigma\geq 0$ được gọi là nghiệm nhẹ của bài toán (6)-(7) trên [0, T] nếu: với $t\in[0,T]$, $u(t)=S(t)u_0+\int_0^t R(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$.

Dựa vào Định nghĩa trên, ta có định nghĩa sau cho bài toán (1)-(3).

Định nghĩa 2.

Hàm $u(t)\in H^\sigma, t\in[0,T], \sigma\geq 0$ được gọi là nghiệm nhẹ của bài toán (1)-(3) trên [0, T] nếu: với $t\in[0,T]$,

$$u(t)=S(t)\varphi+\int_0^t R(t-\tau)f(u(\tau))\,d\tau \quad (8)$$

3. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM TRÊN THANG HILBERT

Trong phần này chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm trên thang Hilbert và tính ổn định nghiệm.

Giả thiết F.

Giả sử hàm $f: H^\sigma \to H^\nu$ với $\sigma\geq 0$ và $\sigma-2\gamma<\nu<\sigma-\gamma$, thỏa mãn các điều kiện sau

$$\|f(u)-f(v)\|_{H^\nu}\leq C\left(\|u\|_{H^\sigma}^m+\|v\|_{H^\sigma}^m\right)\|u-v\|_{H^\sigma},\ \forall u,v\in H^\sigma \quad (9)$$

với các hằng số cho trước C > 0, m > 0 và f(0) = 0.

Chú ý 1. Với giả thiết $\sigma-2\gamma<\nu<\sigma-\gamma$, thì luôn tồn tại số $\eta_*=\frac{\sigma-\nu}{\gamma}-1$ thỏa mãn $\eta_*\in(0,1)$, và ta sẽ sử dụng số η_* một cách thường xuyên trong chứng minh của các kết quả chính dưới đây.

Chú ý 2. Nếu $f(u)=|u|^p, p>1$, thì giả thiết trên được thỏa mãn.

Với số P > 0, sử dụng hàm trọng $\omega_P(t)=\frac{t}{1-e^{-t/P}}, t>0$, để xây dựng không gian Banach sau:

$$V_P^{\infty,\sigma}:=\left\{v\in L^\infty_{loc}((0,T);H^\sigma)\ \middle|\ \|v\|_{V_P^{\infty,\sigma}}:=\left\|\omega_P(t)\|v(t)\|_{H^\sigma}\right\|_{L^\infty(0,T)}<\infty\right\}.$$

Chú ý rằng, hàm trọng là hàm tăng trên (0, T) vì

$$\frac{d}{dt}\omega_P(t)=\frac{1}{\left(1-e^{-t/P}\right)^2}\left(1-e^{-t/P}-\frac{t}{P}e^{-t/P}\right)\geq 0, t>0.$$

Do đó: $0\leq \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\omega_P(t)\leq\frac{T}{1-e^{-T/P}}$. (10)

Định lí 3.1 (Về sự tồn tại nghiệm)

Cho $\varphi\in H^\sigma$. Nếu **giả thiết F** được thoản mãn, thì tồn tại các số dương δ, P sao cho: khi $\|\varphi\|_{H^\sigma}\leq\delta$ thì bài toán (1)-(3) có duy nhất nghiệm trong một hình cầu của không gian $V_P^{\infty,\sigma}$.

Chứng minh.

Chúng ta chứng minh bằng cách áp dụng nguyên lí ánh xạ co Banach cho ánh xạ được xác định như sau

$$\mathcal{F}:\bar{B}_R\subset V_P^{\infty,\sigma}\to V_P^{\infty,\sigma}$$

trong đó

$$\mathcal{F}(u)(t):=S(t)\varphi+\int_0^t R(t-\tau)f(u(\tau))d\tau, t\in[0,T] \quad (11)$$

với $u\in\bar{B}_R$, ở đây $\bar{B}_R$ là hình cầu đóng trong không gian $V_P^{\infty,\sigma}$, với tâm ở gốc và bán kính R > 0.

Trước hết ta xét hạng tử đầu trong vế trái của (11), sử dụng tính chất (i) trong Mệnh đề 2, ta có ước lượng sau

$$\begin{aligned}\|S(t)\varphi\|_{V_P^{\infty,\sigma}}&\leq \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left(\omega_P(t)\|S(t)\varphi\|_{H^\sigma}\right)\\&\leq\|\varphi\|_{H^\sigma}\operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)}(\omega_P(t))\\&\leq\|\varphi\|_{H^\sigma}\frac{T}{1-e^{-t/P}},\end{aligned} \quad (12)$$

ở đây ta đã sử dụng $s(t,\lambda_n^\gamma)\leq 1$ với $t\geq 0$, theo Mệnh đề 1 (b), và ước lượng (10).

Lấy một phần tử bất kì $u\in V_P^{\infty,\sigma}$, ta ước lượng hạng tử thứ hai trong (11).

Trước hết, sử dụng Mệnh đề 2(ii) với g(t) = f(u(t)), ta được:

$$\begin{aligned}\|R*f(u(\cdot))(t)\|_{H^\sigma}^2&\leq\int_0^t\frac{l(\tau)}{(1*l)^{\eta_*}}\|f(u(t-\tau))\|_{H^\nu}^2\,d\tau\\&\leq C^2\int_0^t\frac{l(\tau)}{(1*l)^{\eta_*}}\|u(t-\tau)\|_{H^\sigma}^{2(m+1)}\,d\tau\end{aligned} \quad (13)$$

ở đây chúng ta đã sử dụng (9) với f(0) = 0và số η_* được đưa ra trong **Chú ý 1**.

Ta thấy, với hầu khắp $t\in(0,T)$ thì:

$$\|u(t)\|_{H^\sigma}\leq\omega^{-1}(t)\|u\|_{V_P^{\infty,\sigma}} \quad (14)$$

Hơn nữa, sử dụng bất đẳng thức sơ cấp $1-e^{-x}\leq x, x\geq 0$ ta được

$$\omega_P^{-1}(t)=\frac{1-e^{-t/p}}{t}\leq\frac{1}{P} \quad (15)$$

với $t\in(0,T)$.

Sử dụng các ước lượng này, ta tiếp tục ước lượng (13) như sau:

$$\begin{aligned}\left\|R*f(u(\cdot))(t)\right\|_{H^\sigma}^2 &\le \frac{C^2}{P^{2(m+1)}}\|u\|_{V_P^{\infty,\sigma}}^{2(m+1)}\int_0^t \frac{l(\tau)}{(1*l)^{\eta_*}(\tau)}d\tau\\ &= \frac{C^2}{P^{2(m+1)}}\|u\|_{V_P^{\infty,\sigma}}^{2(m+1)}\frac{(1*l)^{1-\eta_*}(t)}{1-\eta_*}\\ &\le \frac{C^2}{P^{2(m+1)}}\frac{(1*l)^{1-\eta_*}(T)}{1-\eta_*}\|u\|_{V_P^{\infty,\sigma}}^{2(m+1)}\end{aligned}$$

ở đây, ta đã sử dụng tính đơn điệu tăng của hàm $t\mapsto (1*l)^{\eta_*}(t)$.

Do đó, ta được:

$$\left\|R*f(u(\cdot))(t)\right\|_{H^\sigma} \le \frac{C}{P^{(m+1)}}\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}\|u\|_{V_P^{\infty,\sigma}}^{m+1} \quad (16)$$

Kết hợp các ước lượng (10) và (16), ta thu được

$$\left\|R*f(u(\cdot))(t)\right\|_{V_P^{\infty,\sigma}} \le \frac{C}{P^{m+1}}\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}\frac{T}{1-e^{-T/P}}\|u\|_{V_P^{\infty,\sigma}}^{m+1}. \quad (17)$$

Từ định nghĩa của toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ đưa ra ở (11), kết hợp cùng với các ước lượng (12) và (17), ta được:

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{V_P^{\infty,\sigma}} \le \|\varphi\|_{H^\sigma}\frac{T}{1-e^{-T/P}} + \frac{C}{P^{m+1}}\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}\frac{T}{1-e^{-T/P}}\|u\|_{V_P^{\infty,\sigma}}^{m+1} \quad (18)$$

Do $\lim\limits_{P\to\infty}\frac{T/P}{1-e^{-T/P}} = 1$, nên ta có thể chọn số $P > 0$ sao cho

$$\frac{T/P}{1-e^{-T/P}} < 2. \quad (19)$$

Ta chọn $R = 2\|\varphi\|_{H^\sigma}\frac{T}{1-e^{-T/P}}$,

và $\delta = \frac{1}{2^{(2m+3)/m}}\left(\frac{\sqrt{1-\eta_*}}{C(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Từ đó, nếu $\|\varphi\|_{H^\sigma} \le \delta$ và $u\in\overline{B_R}$ thì

$$\begin{aligned}\frac{C}{P^{m+1}}\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}\frac{T}{1-e^{-T/P}}\|u\|_{V_P^{\infty,\sigma}}^{m+1} &\le C\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}\frac{T/P}{1-e^{-T/P}}\left(\frac{R}{P}\right)^m R\\ &= C\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}\frac{T/P}{1-e^{-T/P}}\left(2\|\varphi\|_{H^\sigma}\right)^m R\\ &\le C\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}\left(\frac{T/P}{1-e^{-T/P}}\right)^{m+1}(2\delta)^m R\\ &\le \frac{R}{2}\end{aligned}$$

Từ đó ước lượng (18) trở thành

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(u)\|_{V_P^{\infty,\sigma}} &\le \|\varphi\|_{H^\sigma}\frac{T}{1-e^{-T/P}} + \frac{R}{2}\\ &= \frac{R}{2}+\frac{R}{2} = R,\end{aligned}$$

với $u\in\overline{B_R}$. Như vậy, toán tử nghiệm giữa bất biến hình cầu $\overline{B_R}$. Tức là $\mathcal{F}\left(\overline{B}_R\right)\subset\overline{B}_R$.

Tiếp theo, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng toán tử nghiệm là co trên hình cầu $\overline{B_R}$. Thật vậy, ta lấy hai phần tử bất kì $u, v\in\overline{B}_R$ và sử dụng (11), thì được

$$\mathcal{F}(u)(t)-\mathcal{F}(v)(t) = \int_0^t R(t-\tau)\left[f(u(\tau))-f(v(\tau))\right]d\tau, t\in[0,T].$$

Tiếp tục sử dụng Mệnh đề 2(ii) và (9) trong **giả thiết F**, thì ta được

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}(u)(t)-\mathcal{F}(v)(t)\right\|_{H^\sigma}^2 &\le \int_0^t \frac{l(\tau)}{(1*l)^{\eta_*}(\tau)}\left\|f(u(\tau))-f(v(\tau))\right\|_{H^\sigma}^2 d\tau\\ &\le 2^2C^2\left(\frac{R}{P}\right)^{2m}\int_0^t\frac{l(\tau)}{(1*l)^{\eta_*}(\tau)}\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|_{H^\sigma}^2 d\tau\\ &\le 2^2C^2\left(\frac{R}{P}\right)^{2m}\frac{\|u-v\|_{V_P^{\infty,\sigma}}^2}{P^2}\frac{(1*l)^{1-\eta_*}(T)}{1-\eta_*}\end{aligned}$$

ở đây ta cũng đã sử dụng thêm các ước lượng (14) và (15).

Như vậy, ta được:

$$\left\|\mathcal{F}(u)(t)-\mathcal{F}(v)(t)\right\|_{H^\sigma} \le 2C\left(\frac{R}{P}\right)^m\frac{\|u-v\|_{V_P^{\infty,\sigma}}}{P}\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}, t\in(0,T).$$

Sử dụng (14) và (15) một lần nữa, ta được

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}(u)(t)-\mathcal{F}(v)\right\|_{V_P^{\infty,\sigma}} &\le 2C\left(\frac{R}{P}\right)^m\frac{T/P}{1-e^{-T/P}}\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}\|u-v\|_{V_P^{\infty,\sigma}}\\ &\le 2^{2m+2}C(\delta)^m\frac{(1*l)^{\frac{1-\eta_*}{2}}(T)}{\sqrt{1-\eta_*}}\|u-v\|_{V_P^{\infty,\sigma}}\\ &\le \frac{1}{2}\|u-v\|_{V_P^{\infty,\sigma}}.\end{aligned}$$

Vậy toán tử nghiệm là toán tử co trên $\overline{B_R}$.

Áp dụng nguyên lí ánh xạ co Banach ta được điều phải chứng minh.

Định lí tiếp theo sẽ chỉ ra nghiệm phân rã với tốc độ đặc trưng bởi hàm $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Định lí 3.2 (Về sự ổn định nghiệm). Nếu giả thiết của Định lí 3.1 được thỏa mãn, thì

$$\|u(t)\|_{H^\sigma} \le \frac{4\sqrt{P}}{\sqrt{t+P}}\|\varphi\|_{H^\sigma},$$

với hầu khắp nơi $t \in (0,T)$.

Chứng minh.

Gọi ulà nghiệm của bài toán (1)-(3) thu được từ Định lí 3.1, khi đó

$$\|u\|_{V_\rho^{\infty,\sigma}} \le R = 2\|\varphi\|_{H^\sigma}\frac{T}{1-e^{-t/P}}.$$

Kết hợp với ( ), ta được:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left(\frac{t/P}{1-e^{-t/P}}\|u(t)\|_{H^\sigma}\right) \le 4\|\varphi\|_{H^\sigma}.$$

Do đó

$$\|u(t)\|_{H^\sigma} \le \frac{1-e^{-t/P}}{t/P}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left(\frac{t/P}{1-e^{-t/P}}\|u(t)\|_{H^\sigma}\right)$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{1+t/P}}4\|\varphi\|_{H^\sigma} = \frac{4\sqrt{P}}{\sqrt{1+t}}\|\varphi\|_{H^\sigma},$$

với hầu khắp $t \in (0,T)$, ở đây ta đã sử dụng bất đẳng thức sơ cấp $\frac{1-e^{-x}}{x} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}}, x>0$. Phép chứng minh kết thúc.

4. KẾT LUẬN

Bằng cách xây dựng không gian có trọng cùng với sử dụng nguyên lí ánh xạ co Banach, chúng tôi đã chỉ ra điều kiện đủ để bài toán (1)-(3) có nghiệm trên thang Hilbert với phần phi tuyến có thể tăng trưởng đa thức, nội dung được phát biểu trong Định lí 3.1. Ngoài ra, chúng tôi chứng minh được tính ổn định nghiệm trong Định lí 3.2.

Hướng phát triển tiếp theo của nghiên cứu này là xét sự tồn tại nghiệm trong không gian Sobolev phân thứ và nghiên cứu tính chính qui của nghiệm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. T.D. Ke, N.N. Thang, L.T.P. Thuy, 2020. *Regularity and stability analysis for a class of semilinea nonlocal differential equations in Hilbert spaces*. J. Math. Anal. Appl. 483, No. 2, 123655

[2]. T.D. Ke, L.T.P. Thuy, 2020. *Dissipativity and stability for semilinear anomaluos diffusion equations involving delays*. Math. Methods Appl. Sci.

[3]. R.K. Miller, 1968. *On Volterra integral equations with nonnegative integrable resolvents*. J. Math. Anal. Appl. 22, 319-340.

[4]. J.C. Pozo, V. Vergara, 2019. *Fundamental solutions and decay of fully non-local problems*. Discrete Contin. Dyn. Syst. (39), 639-666.

[5]. V. Vergara, R. Zacher, 2015. *Optimal decay estimates for time-fractional and other nonlocal subdiffusion equations via energy methods*. SIAM J. Math. Anal. 47, 210-239.

[6]. V. Vergara, R. Zacher, 2017. *Stability, instability, and blowup for time fractional and other nonlocal in time semilinear subdiffusion equations*. J. Evol. Equ. 17, 599-626.

AUTHOR INFORMATION

Lam Tran Phuong Thuy

Electric Power University