

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ VÀ SÁNG TẠO CHO HỌC SINH LỚP 9 THÔNG QUA KHAI THÁC LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Đoàn Quang Mạnh
Khoa Toán và Khoa học tự nhiên, Trường Đại học Hải Phòng
Email: manhdq@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 13/6/2024
Ngày PB đánh giá: 19/6/2024
Ngày duyệt đăng: 05/7/2024

TÓM TẮT: Năng lực Giải quyết vấn đề và sáng tạo là một trong những năng lực chung cần hình thành và phát triển cho học sinh trong quá trình dạy học. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số biện pháp khai thác lời giải của các bài toán bất đẳng thức cho học sinh lớp 9 nhằm phát triển năng lực nêu trên.

Từ khoá: Năng lực, Giải quyết vấn đề, Sáng tạo, Bất đẳng thức.

DEVELOPING PROBLEM-SOLVING CAPACITY AND CREATIVITY FOR 9th GRADE STUDENTS THROUGH SOLVING PROBLEMS PROVING INEQUALITIES

ABSTRACT: Problem-solving capacity and creativity are the general capacities that need to be formed and developed for students during the teaching process. In this article, the researcher presents some methods to exploit the solutions to inequality problems for 9th grade students, which aims to develop the above-mentioned capacities.

Keywords: Capacity, Problem-solving Capacity, Creativity, Inequality.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Định hướng đổi mới căn bản và toàn diện giáo dục ở nước ta hiện nay là chuyển mạnh quá trình giáo dục từ chủ yếu trang bị kiến thức sang phát triển toàn diện năng lực và phẩm chất người học [4].

“Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể” (12/2018) [1] của Bộ Giáo dục và Đào tạo (BGD&ĐT) đã xác định: Hình thành và phát triển cho học sinh (HS) 05 phẩm chất, 03 năng lực (NL) chung, 07 năng lực đặc thù, trong đó NL

giải quyết vấn đề và sáng tạo (GQVĐ & ST) là một trong 03 NL chung cốt lõi.

Trong “Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình môn toán” (12/2018) [2] của BGD&ĐT, bất đẳng thức (BĐT) được chính thức giới thiệu ở lớp 9 trong nội dung Phương trình và Bất phương trình (mặc dù việc so sánh các số đã được đưa vào từ lớp 2). Khi HS học lên THPT thì BĐT được ứng dụng giải quyết các bài toán về BPT và Hệ BPT, giải quyết các bài toán về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, các bài toán thực tiễn.

Mặc dù nội dung BĐT ẩn sau những nội dung trong mạch kiến thức “Số, Đại số và Một số yếu tố giải tích” với yêu cầu cần đạt không cao (Nhận biết được thứ tự trên tập hợp các số thực; Nhận biết được bất đẳng thức và mô tả được một số tính chất cơ bản của bất đẳng thức (tính chất bắc cầu; liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, phép nhân)) nhưng các bài toán về BĐT lại xuất hiện trong các kỳ thi (Vào lớp 10, Thi học sinh giỏi các cấp...) một cách thường xuyên và rất đa dạng về thể loại, phong phú về nội dung.

Nhờ các bài tập về BĐT mà học sinh được rèn luyện kỹ năng giải toán, đồng thời phát triển được các năng lực cá nhân, đặc biệt là NL GQVĐ & ST. Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một số biện pháp nhằm phát triển NL GQVĐ & ST cho HS lớp 9 trong dạy học BĐT trên cơ sở khai thác lời giải các bài toán chứng minh (CM) BĐT đơn giản mà các em được giới thiệu trong sách giáo khoa (SGK) lớp 9.

2. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Hai phạm trù “giải quyết vấn đề” và “sáng tạo” trong nhiều năm qua luôn là vấn đề nghiên cứu được quan tâm của các nhà khoa học trên thế giới với nhiều quan điểm, phương tiện khác nhau, nhất là trong dạy học môn toán. Nhiều nước trên thế giới khi dạy học môn toán đều chủ trương giảm nhẹ lý thuyết hàn lâm, tăng cường thực hành và vận dụng toán học vào các hoạt động ứng dụng vào thực tiễn, điển hình trong đó là Đức, Nga, Pháp, Mỹ, ...

Đã có nhiều tác giả trên thế giới quan tâm nghiên cứu phát triển năng lực giải quyết vấn đề cho học sinh thông qua dạy học môn toán như A.N. Kôlmôgôrôv, V.A. Cruchelxki,...

Tác giả Macken Zie thuộc Khoa Giáo dục - Đại học Cambridge chỉ ra công nghệ thông tin có thể cung cấp cơ hội giải quyết vấn đề nhưng có thể nó cũng được sử dụng để xây dựng khả năng giải quyết vấn đề [16].

Jean - Paul Reeff, Anouk Zabl, Christine Blech [15] cho rằng: “Giải quyết vấn đề là khả năng suy nghĩ và hành động trong những tình huống có quy trình, thủ tục, giải pháp thông thường có sẵn. Người giải quyết vấn đề có thể ít nhiều xác định được mục tiêu hành động, nhưng không phải ngay lập tức biết cách làm thế nào để đạt được nó. Sự am hiểu tình huống vấn đề và lí giải dần việc đạt mục tiêu đó trên cơ sở việc kế hoạch và suy luận tạo thành quá trình giải quyết vấn đề”.

PISA cho rằng: “Giải quyết vấn đề là năng lực của một cá nhân tham gia vào quá trình nhận thức để hiểu, giải quyết các tình huống có vấn đề mà phương pháp của giải pháp đó không nhìn thấy ngay một cách rõ ràng. Nó bao gồm sự sẵn sàng tham gia vào các tình huống tương tự để đạt được tiềm năng của mình như một công dân có tính xây dựng và biết suy nghĩ” [17].

Raja Roy Singh đã khẳng định: “Để đáp ứng được những đòi hỏi mới được đặt ra do sự bùng nổ kiến thức và sáng tạo ra kiến thức mới, cần thiết phải phát triển năng lực tư duy, năng lực giải quyết vấn đề sáng tạo... Các năng lực này có thể quy gọn là “năng lực giải quyết vấn đề” [13].

Nghiên cứu về phát triển năng lực GQVĐ trong dạy học môn toán ở trong nước có các nghiên cứu của Nguyễn Thị Hương Trang (2002), Nguyễn Anh Tuấn (2003), Phan Anh Tài (2014), Từ Đức Thảo (2012), Nguyễn Thị Lan Phương (2015), ...

Tác giả Nguyễn Anh Tuấn quan niệm “năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề của HS trong học toán là tổ hợp năng lực thể hiện ở các kỹ năng (thao tác tư duy và hành động) trong hoạt động học tập nhằm phát hiện và giải quyết nhiệm vụ của môn toán”. Ông cũng đưa ra bảy thành tố của năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề và tám biện pháp bồi dưỡng năng lực này cho HS trong dạy học khái niệm toán học [12].

Tác giả Hà Xuân Thành đưa ra quan niệm “năng lực giải quyết vấn đề thực tiễn là năng lực giải quyết những câu hỏi, vấn đề đặt ra ở những tình huống thực tiễn trong nội bộ môn toán, trong những môn học khác ở trường phổ thông và trong thực tiễn cuộc sống”. Tác giả cũng chỉ ra năm thành phần năng lực giải quyết vấn đề thực tiễn và đề xuất bốn biện pháp phát triển năng lực này [10].

Tóm lại, các nghiên cứu trên đã phần nào làm rõ một số vấn đề lí luận về năng lực giải quyết vấn đề trong dạy học môn toán, một số biện pháp để bồi dưỡng, phát triển và đánh giá năng lực giải quyết vấn đề cho HS trong dạy học môn toán ở trường phổ thông.

Một trong những tác giả nghiên cứu về sáng tạo (ST) một cách có hệ thống là nhà tâm lý học Mỹ J.P. Guilford. Ông đưa ra mô hình phân định cấu tạo trí tuệ gồm hai khối cơ bản là: trí thông minh và ST. Ông xem ST là một thuộc tính của tư duy, là một phẩm chất của quá trình tư duy và nhân mạnh ý nghĩa của hoạt động ST, thậm chí ST là chỉ báo quan trọng hơn là trí thông minh về năng khiếu, tiềm năng của một người [14].

Ngoài J. P. Guilford, còn có các tên tuổi lớn trong lĩnh vực khoa học tâm lý nghiên cứu về ST, nội dung của các nghiên

cứu này chủ yếu đề cập tới một số vấn đề cơ bản của hoạt động ST như: bản chất và quy luật của hoạt động ST, tiêu chuẩn cơ bản của hoạt động ST, sự khác biệt giữa ST và không ST, vấn đề phát triển năng lực ST và kích thích hoạt động ST, những thuộc tính nhân cách của hoạt động ST... Từ phân tích hoạt động ST, so sánh nó với tư duy, các nhà tâm lý học nhận ra nó tương tự như hoạt động QVĐ.

Trong giáo dục toán học, G. Polya với các tác phẩm “Sáng tạo toán học” (1964), “Giải một bài toán như thế nào” (1975), “Toán học và những suy luận có lí” (1977), ông đã bàn về phát triển NL QVĐ & ST cho các thầy cô giáo dạy toán, học sinh phổ thông và những người quan tâm đến toán học.

Các nghiên cứu trong nước về ST cũng được các nhà giáo dục quan tâm từ lâu. Tác giả Hoàng Chúng trong [3], đã tập trung nghiên cứu vấn đề rèn luyện cho HS phát triển các phương pháp suy nghĩ cơ bản trong sáng tạo toán học như đặc biệt hóa, tổng quát hóa, tương tự hóa và cho rằng các phương pháp này có thể vận dụng trong giải toán để mò mẫm, dự đoán kết quả, tìm ra phương hướng giải toán, để mở rộng, đào sâu và hệ thống hóa kiến thức.

Tác giả Nguyễn Cảnh Toàn trong [11] đã đặt trọng tâm vào việc rèn luyện khả năng “phát hiện vấn đề”, rèn luyện tư duy ST và nhất là tư duy biện chứng thông qua lao động tìm tòi “cái mới”. Ông khẳng định: muốn sáng tạo toán học, rõ ràng là phải vừa giỏi phân tích, vừa giỏi tổng hợp. Phân tích và tổng hợp đan xen vào nhau, cái này tạo điều kiện cho cái kia.

Vấn đề vận dụng các thành tựu nghiên cứu về ST, đặc biệt là các phương pháp, kĩ thuật ST vào các lĩnh vực đang

được tiếp tục nghiên cứu và không ngừng phát triển. Những nghiên cứu đã có cũng chỉ ra rằng năng lực giải quyết vấn đề thường không tách khỏi năng lực ST, là cơ sở của năng lực ST vì ST nảy sinh trong quá trình giải quyết vấn đề. Như vậy, năng lực giải quyết vấn đề và năng lực ST từ lâu đã dành được sự quan tâm đặc biệt của các nhà nghiên cứu và ngày càng khẳng định vai trò quan trọng đối với sự phát triển của xã hội loài người. Những nghiên cứu về các năng lực này vẫn đang được không ngừng bổ sung và phát triển ở mọi lĩnh vực, đặc biệt là lĩnh vực giáo dục. Bộ Giáo dục và Đào tạo đã xác định: Hình thành và phát triển cho học sinh các phẩm chất và năng lực, trong đó NL GQVĐ & ST là một trong 03 NL chung cốt lõi [1].

3. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

3.1. Năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo

Chúng tôi quan niệm NL GQVĐ&ST trong học tập của HS là khả năng phát hiện

ra vấn đề cần giải quyết và biết vận dụng những kiến thức, kỹ năng, kinh nghiệm của bản thân để giải quyết tốt vấn đề mà mình đã phát hiện. Hơn nữa, trong quá trình phát hiện và giải quyết vấn đề có biểu hiện của sự sáng tạo (tìm ra được cái mới, cách nhìn nhận đánh giá mới hoặc cách giải quyết vấn đề khác với tiền lệ trong các khâu của quá trình). Trong phạm vi bài báo, cái mới theo chúng tôi được hiểu là mới so với NL, nhận thức, trình độ hiện tại của HS.

Khái niệm về NL GQVĐ và NL ST nói chung, được nhiều nhà giáo dục học nghiên cứu và đưa ra nhiều quan niệm khác nhau. Chúng tôi đồng quan điểm với BGD&ĐT: Năng lực GQVĐ&ST trong học tập là khả năng giải quyết vấn đề (GQVĐ) học tập để tìm ra những cái mới ở mức độ nào đó. Để có NL GQVĐ&ST, chủ thể phải ở trong tình huống có vấn đề, tìm cách giải quyết mâu thuẫn nhận thức hoặc hành động và kết quả là đề ra được phương án giải quyết có tính mới [1].

Bảng 1. Các thành phần của năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo, yêu cầu cần đạt đối với học sinh trung học cơ sở

THÀNH PHẦN	YÊU CẦU CẦN ĐẠT
1. Nhận ra ý tưởng mới	Biết xác định và làm rõ thông tin, ý tưởng mới; biết phân tích, tóm tắt những thông tin liên quan từ nhiều nguồn khác nhau.
2. Phát hiện và làm rõ vấn đề	Phân tích được tình huống trong học tập; phát hiện và nêu được tình huống có vấn đề trong học tập.
3. Hình thành và triển khai ý tưởng mới	Phát hiện yếu tố mới, tích cực trong những ý kiến của người khác; hình thành ý tưởng dựa trên các nguồn thông tin đã cho, đề xuất giải pháp cải tiến hay thay thế các giải pháp không còn phù hợp, so sánh và bình luận được về các giải pháp đề xuất.
4. Đề xuất, lựa chọn giải pháp	Xác định được và biết tìm hiểu các thông tin liên quan đến vấn đề, đề xuất được giải pháp GQVĐ.

5. Thiết kế và tổ chức hoạt động	<ul style="list-style-type: none"> - Lập được kế hoạch hoạt động với mục tiêu, nội dung, hình thức hoạt động phù hợp. - Biết phân công nhiệm vụ phù hợp cho các thành viên tham gia hoạt động. - Đánh giá được sự phù hợp hay không phù hợp của kế hoạch, giải pháp và việc thực hiện kế hoạch, giải pháp.
6. Tư duy độc lập	Biết đặt các câu hỏi khác nhau về một sự vật, hiện tượng, vấn đề; Biết chú ý lắng nghe và tiếp nhận thông tin, ý tưởng với sự cân nhắc, chọn lọc; Biết quan tâm tới các chứng cứ khi nhìn nhận, đánh giá sự vật, hiện tượng; biết đánh giá vấn đề, tình huống dưới những góc nhìn $a^2 + b^2 \geq 2ab$ khác nhau.

3.2. Biện pháp phát triển năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo cho học sinh lớp 9 trong dạy học bất đẳng thức

3.2.1. Biện pháp 1.

Phân tích lời giải bài toán - cách chứng minh BĐT nhằm giúp HS phát hiện ý tưởng hình thành bài toán (Nhận ra ý tưởng mới; Phát hiện và làm rõ vấn đề).

Trong biện pháp này, dựa trên các bước chứng minh để tìm ra mấu chốt hình thành bài toán (Tìm các BĐT “phụ”). Ta bắt đầu bằng ví dụ sau:

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c , ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Lời giải. Dễ thấy với mọi số thực a, b .

Thật vậy, BĐT trên tương đương với $(a - b)^2 \geq 0$ với mọi số thực a, b điều này luôn đúng.

Tương tự

$b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca$ cộng ba BĐT về với về ta được điều phải chứng minh (Đpcm).

Phân tích.

Cách giải trên được đưa ra một cách không $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ tự nhiên và người đặt bài toán đã “giấu” việc tìm ra BĐT “phụ” $a^2 + b^2 \geq 2ab$. BĐT này có được nhờ biến đổi sau:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

với mọi số thực a, b .

Với phân tích trên ta có thể hướng dẫn HS trình bày lại lời giải cho “tự nhiên” hơn bằng cách biến đổi BĐT cần CM tương đương với điều luôn đúng với mọi số thực a, b, c :

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi x, y, z là các số dương, ta có:

$$\frac{x^3 + y^3}{xy} + \frac{y^3 + z^3}{yz} + \frac{z^3 + x^3}{zx} \geq 2(x + y + z)$$

Lời giải. Trước hết, chứng minh: $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ đúng với mọi x, y .

Dễ thấy, BĐT này tương đương với $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$ đúng với mọi x, y .

Từ đây ta có: $\frac{x^3 + y^3}{xy} \geq x + y$ đúng

với mọi $x, y > 0$, tương tự $\frac{y^3 + z^3}{yz} \geq y + z$; $\frac{z^3 + x^3}{zx} \geq z + x$ cộng vế với vế của ba BĐT được ĐPCM, dấu “=” xảy ra khi $x=y=z$.

Phân tích. Trong lời giải này, ta cũng thấy sự xuất hiện các BĐT phụ một cách không tự nhiên. Câu hỏi đặt ra là làm sao để xuất được BĐT phụ và bản chất của bài toán là gì?

Trước hết, biến đổi BĐT cần CM thành dạng tương đương:

$$(x^3 + y^3)z + (y^3 + z^3)x + (z^3 + x^3)y \geq 2xyz(x + y + z)$$

Biến đổi khéo vế phải một chút:

$$2xyz(x + y + z) = xyz[(x + y) + (y + z) + (z + x)]$$

Ta có:

$$[(x^3 + y^3)z - xyz(x + y)] + [(y^3 + z^3)x - xyz(y + z)] + [(z^3 + x^3)y - xyz(z + x)] \geq 0$$

Dễ thấy việc còn lại là chứng minh BĐT sau: $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ và các BĐT tương tự.

Như vậy, có thể thấy từ một BĐT đã cho (luôn đúng hoặc đã được chứng minh) sau một vài thao tác mang tính kỹ thuật ta được một BĐT tương đối đẹp và việc CM khó hơn.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

$$b) \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

Với các BĐT trên việc áp dụng BĐT Cô si cho ta lời giải khá dễ dàng. Nhưng nếu với lớp 9 ta đưa ra lời giải BĐT ở phần a) bằng cách CM các BĐT phụ:

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a; \quad \frac{b^2}{c} + c \geq 2b; \quad \frac{c^2}{a} + a \geq 2c$$

lời giải kém tự nhiên hơn. Các BĐT phụ này được “ché” như sau: Từ BĐT thức luôn đúng với $x, y > 0$: $\frac{(x - y)^2}{y} \geq 0$ suy ra

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{y} \geq 0 \text{ hay}$$

$$\frac{x^2}{y} - 2x + y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} + y \geq 2x \quad (\text{Vì } y > 0).$$

Áp dụng cho $a, b, c > 0$ có Đpcm.

Với BĐT ở phần b), xuất phát từ $\frac{(x - y)^2}{xy} \geq 0$ với mọi $x, y > 0$. Triển khai vế

trái rồi nhân cả hai vế với $z > 0$ được BĐT $\frac{zx}{y} + \frac{zy}{x} - 2z \geq 0$ hay $\frac{zx}{y} + \frac{zy}{x} \geq 2z$. Áp

dụng cho a, b, c dương có Đpcm.

Biện pháp này, giúp HS rèn luyện Bước 4 trong lược đồ giải toán của G.Polia (Bước 4: Nhìn lại cách giải, nghiên cứu và phân tích nó) [5].

Việc nhìn lại cách giải bài toán, nghiên cứu và phân tích sâu lời giải giúp HS nhận ra con ý tưởng mới, phát hiện và làm rõ vấn đề.

3.2.2. Biện pháp 2. Khai thác lời giải bài toán giúp học sinh đề xuất và giải quyết các bài toán mới (Hình thành và triển khai ý tưởng mới).

Qua việc phân tích lời giải để tìm nguồn gốc của bài toán như các ví dụ ở Biện

pháp 1, biện pháp này giúp HS nhận ra hướng đề xuất những bài toán mới hoặc biết được nguồn gốc của bài toán đã cho.

$$\text{Nếu thêm ràng buộc } x + y + z = \frac{1}{2}$$

cho ví dụ thứ hai của Biện pháp 1, ta có:

Vi dụ 1. Chứng minh rằng với mọi x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z =$

$\frac{1}{2}$ ta luôn có

$$\frac{x^3 + y^3}{xy} + \frac{y^3 + z^3}{yz} + \frac{z^3 + x^3}{zx} \geq 1.$$

Lại xuất phát từ

$$x^3 + y^3 \geq xy(x + y) (*)$$

Ta có $\frac{x^3 + y^3}{xy} \geq x + y$ với mọi x, y

dương hay $\frac{(x^3 + y^3)z}{xyz} \geq x + y$ với mọi $x, y,$

z dương. Tương tự ta có thêm hai BĐT nữa. Cộng ba BĐT này (với x, y, z dương và $xyz = 1$), ta có bài toán sau:

Vi dụ 2. Cho x, y, z dương và $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$(x^3 + y^3)z + (y^3 + z^3)x + (z^3 + x^3)y \geq 2(x + y + z)$$

Nếu ta định hướng biến đổi BĐT (*) theo các hướng khác nhau thì được các bài toán tương đối khó và thường xuất hiện trong các kỳ thi HSG.

Thật vậy, với $x, y, z > 0$, (*) tương đương với

$$x^3 + y^3 + xyz \geq xy(x + y + z) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} \leq \frac{1}{xy(x + y + z)}$$

Ta có:

Vi dụ 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \\ + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

(USA MO 1998)

Với biện pháp này người giáo viên còn có thể “tùy biến” theo nhiều hướng khác nhau để có những BĐT hay và khó. Trong khuôn khổ bài báo chúng tôi xin được không đi sâu hơn nữa.

3.2.3. Biện pháp 3. Hướng dẫn học sinh khai thác bài toán dưới các góc nhìn khác nhau từ đó đưa ra nhiều lời giải cho một bài toán từ đó giúp các em phát triển tư duy độc lập.

Vi dụ 1. Chứng minh rằng với mọi x, y không âm, ta có: $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$

Cách 1. Từ giả thiết ta có: $x + y \geq 0$ và $(x - y)^2 \geq 0$ suy ra $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$. Biến đổi ta được BĐT cần CM.

Cách 2. Biến đổi BĐT đã cho thành BĐT tương đương:

$$x(x - y)^2 + y(x - y)^2 \geq 0,$$

BĐT này đúng vì x, y không âm.

Ở Cách 1 và Cách 2, giáo viên hướng dẫn HS giải theo hướng biến đổi tương đương về các BĐT luôn đúng với giả thiết đã cho.

Cách giải sau đây theo hướng dùng các BĐT thức đã biết (đã được học).

Cách 3. Áp dụng BĐT Cô si:

$$x^3 + xy^2 \geq 2\sqrt{x^3xy^2} = 2x^2y; \\ y^3 + yx^2 \geq 2\sqrt{y^3yx^2} = 2y^2x \quad \text{cộng vế với} \\ \text{vế có Đpcm.}$$

Cách 4. Vai trò của x và y bình đẳng nên có thể giả sử $x \geq y \geq 0$. Khi đó $(x-y)(x-y)^2 \geq 0$ biến đổi ta có Đpcm.

Rõ ràng lời giải trên thể hiện sự quan sát tinh tế của người giải (Thể hiện tư duy độc lập).

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực dương, thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$$

Cách 1. Dùng phương pháp biến đổi. Trước hết đặt ẩn phụ (thực tế không đặt ẩn phụ cũng được):

$$x = \sqrt{a+b}; y = \sqrt{b+c}; z = \sqrt{c+a}$$

Khi đó điều cần CM $x + y + z \leq \sqrt{6}$ với điều kiện:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2; 0 < x, y, z < \sqrt{2}$$

Bình phương hai vế của BĐT cần CM và chú ý đến điều kiện, thêm một chút biến đổi ta có:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$$

BĐT này luôn đúng, từ đó suy ra Đpcm.

Cách 2. Biến đổi kết hợp với BĐT Cô si. Đặt P là vế trái, ta có:

$$P^2 = 2(a+b+c) + 2(\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} + \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{c+a} + \sqrt{c+a} \cdot \sqrt{a+b})$$

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng BĐT Cô si: } P^2 &\leq 2(a+b+c) + 2\left[\frac{(a+b)+(b+c)}{2} \right. \\ &\left. + \frac{(b+c)+(c+a)}{2} + \frac{(c+a)+(a+b)}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P^2 \leq 2 + 2 \cdot \frac{4(a+b+c)}{2} = 6 \quad \text{Đpcm.}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \sqrt{6}$$

Cách 3. Dùng trực tiếp BĐT Cô si:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (a+b)} \leq \frac{\frac{2}{3} + (a+b)}{3} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{b+c} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (b+c)} \leq \frac{\frac{2}{3} + (b+c)}{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{c+a} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (c+a)} \leq \frac{\frac{2}{3} + (c+a)}{3} \quad (3)$$

cộng vế với vế của (1), (2) và (3) rồi rút gọn ta được Đpcm.

Cách 4. Dùng BĐT phụ:

$$\sqrt{1-x} \leq \frac{-3x+5}{2\sqrt{6}}; \forall x \in (0;1)$$

biến đổi, ta có $(3x-1)^2 \geq 0$, BĐT này đúng với mọi x trong khoảng $(0;1)$. Áp dụng cho a, b, c thuộc khoảng $(0;1)$ và $a+b+c=1$ rồi cộng vế với vế ta được Đpcm.

Biện pháp này giúp các em phát triển tư duy độc lập nhìn vấn đề theo nhiều hướng khác nhau từ đó có được các lời giải độc đáo.

4. KẾT LUẬN

Do khuôn khổ của bài báo, chúng tôi chỉ đưa ra 3 biện pháp thường được dùng trong dạy học và phát triển NL GQVĐ & ST cho học sinh, đặc biệt là các em học sinh lớp 9 là đối tượng mới tiếp xúc với BĐT. Mỗi biện pháp khi thực hiện yêu cầu GV nghiên cứu, đào sâu lời giải của các bài BĐT nhằm hướng dẫn cho các em một cách tốt nhất đáp ứng được các yêu cầu cần đạt của Chương trình giáo dục phổ thông 2018 trong việc dạy học môn toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu tiếng Việt

1. Bộ GD-ĐT (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể* (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

2. Bộ GD-ĐT (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018* (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

3. Hoàng Chúng (1969). *Rèn luyện khả năng ST toán học ở trường phổ thông*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

4. Đảng Cộng sản Việt Nam, Ban Chấp hành Trung ương khóa XI (2013). *Nghị quyết số 29-NQ/TW ngày 4/11/2013 về đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa trong điều kiện kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế*.

5. G. Polya (1997). *Giải một bài toán như thế nào*. NXB Giáo dục Việt Nam

6. Nguyễn Bá Kim (2015). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm

7. SGK lớp 9. *Cánh diều*

8. SGK lớp 9. *Chân trời sáng tạo*

9. SGK lớp 9. *Kết nối tri thức với cuộc sống*

10. Hà Xuân Thành (2017). *Dạy học Toán ở trường phổ thông theo hướng phát triển năng lực GQVĐ thực tiễn thông qua việc khai thác và sử dụng các tình huống thực tiễn*, Luận án Tiến sĩ

11. Nguyễn Cảnh Toàn (1992). *Tập cho HS giỏi làm quen dần với nghiên cứu toán học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

12. Nguyễn Anh Tuấn (2003). *Bồi dưỡng năng lực phát hiện và GQVĐ cho HS THCS trong dạy học khái niệm toán học (thể hiện qua một số khái niệm đại số ở THCS)*, Luận án Tiến sĩ.

13. Roy Singh (1994). *Nền giáo dục cho thế kỷ XXI: Những triển vọng của Châu Á - Thái Bình Dương*, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam.

Tài liệu tiếng nước ngoài

14. Guilford J.P. (1956). *The Structure of Intellect*, Psychological Bulletin, 53, pp. 267-293.

15. Jean - Paul Reeffer, Anouk Zabal, Christine Blech (2006), *The Assessment of Problem - Solving Competencies*.

16. Macken Zie (2001), *Developing problem - Solving Capacity in a primary School environment using Control ICT*.

17. OCED (2012), *Programme for International Student Assessment. PISA*.