

# THUẬT TOÁN CHIẾU KẾT HỢP PHÂN TÍCH DC GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HAI CẤP

Đỗ Thị Hoài, Nguyễn Đức Trường  
Khoa Toán và KHTN  
Email: hoaidt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 12/4/2024

Ngày PB đánh giá: 13/5/2024

Ngày duyệt đăng: 31/5/2024

**Tóm tắt:** Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất và chứng minh sự hội tụ của một thuật toán mới để giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, trong đó, cấp thứ nhất là bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá  $G$ , là một hàm affine, còn cấp thứ hai tương ứng ánh xạ giá  $F$ , là một hàm đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz. Trong bài toán này, miền ràng buộc đối với bài toán cấp thứ hai là một tập ẩn, do đó không thể sử dụng kỹ thuật chiếu thông thường để tìm nghiệm, vì vậy, thuật toán mới sử dụng kỹ thuật phân tích DC, kết hợp một phép chiếu trực tiếp lên tập  $C$ . Đây chính là điểm mới trong phương pháp giải của chúng tôi. Miền ràng buộc  $C$  được chọn là một tập lồi đa diện và kết quả hội tụ của dãy lặp được chứng minh chi tiết trong không gian  $\mathbb{R}^n$ .

**Từ khóa:** bất đẳng thức biến phân, hàm affine, phép chiếu, giả đơn điệu, hai cấp.

---

## PROJECTION ALGORITHM COMBINED WITH DC ANALYSIS TO SOLVE BILEVEL VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS

**Abstract:** In this paper, we propose and prove the convergence of a new algorithm to solve the bilevel variational inequality problem. The first level, namely the variational inequality problem with cost mapping  $G$ , is an affine function, while the second level corresponding to the cost mapping  $F$  is a strongly monotone and Lipschitz continuous mapping. In this problem, the constraint domain for the second level problem is a hidden set, so it is not possible to use conventional projection techniques to find solutions; therefore, our new algorithm uses DC analysis techniques, combined with projection onto the set  $C$ . This is a new factor in our solution method. The constraint domain  $C$  is chosen as a polyhedral convex set and the convergence result of sequence is proven in  $\mathbb{R}^n$  space.

**Keywords:** variational inequalities, affine function, projection, pseudomonotone, bilevel.

---

### 1. GIỚI THIỆU

Bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp:

Cho  $C$  là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian  $\mathbb{R}^n$ . Cho các ánh xạ  $F, G: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ , được gọi là các ánh xạ giá. Bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá  $G$ , ký hiệu  $VI(C, G)$ , tức là:

Tìm  $x^* \in C$  sao cho  $\langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C, (1.1)$

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán (1.1) là  $Sol(C, G)$ .

Trong bài báo này, chúng tôi chỉ xét trường hợp  $G(x) = Qx + q$ , miền ràng buộc  $C$  là đa diện lồi  $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , ma trận  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  thỏa mãn  $Q$  đối xứng với các giá trị riêng bé nhất là  $\tau_1(Q)$ , lớn nhất là  $\tau_2(Q)$ , và ma trận  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , các véc tơ  $q \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$  là các véc tơ được chọn sao cho  $G$  là giả đơn điệu, tức là  $\langle G(x), y - x \rangle \geq 0$ , ta suy ra  $\langle G(y), x - y \rangle \leq 0$ , với mọi  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, ký hiệu là  $BVI(C, F, G)$  được định nghĩa như sau:

Tìm  $x^* \in Sol(C, G)$  sao cho  $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in Sol(C, G). (1.2)$

## 2. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

Bài toán bất đẳng thức biến phân lần đầu tiên được giới thiệu bởi Stampacchia và cộng sự năm 1966 [5] và trở nên nổi tiếng bởi các ứng dụng thực tế của nó, bao gồm bài toán tối ưu, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng mạng giao thông, mô hình xử lý ảnh và là một trường hợp riêng của bài toán cân bằng,... [1, 2]. Bài toán bất đẳng thức biến phân được phát triển theo hai hướng chính, hướng nghiên cứu điều kiện tồn tại nghiệm và hướng đề xuất các thuật toán giải. Năm 2001, khi nghiên cứu phương pháp giải mở rộng cho bài toán  $VI(C, G)$ , I. Yamada [12] đã thay thế miền ràng buộc  $C$  bằng tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn, kể từ đó, một số nhà khoa học đã tập trung khai thác vấn đề giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán khác [3, 10]. Nối tiếp các kết quả đó, chúng tôi nghiên cứu giải bài toán *bất đẳng thức biến phân hai cấp*  $BVI(C, F, G)$ , khi đó tập ràng buộc đối với bài toán (1.2) là tập ảnh  $Sol(C, G)$  chưa biết, vì vậy, bài toán hai cấp là vấn đề nghiên cứu khó khăn. Tuy vậy, trong bài báo này, chúng tôi chọn  $G$  có tính chất giả đơn điệu, sẽ đảm bảo tập  $Sol(C, G)$  lồi và đóng [11], khi đó ta có thể sử dụng một số kỹ thuật trong giải tích lồi để áp dụng cho bài toán (1.2). Chúng tôi dựa vào kỹ thuật phân tích DC của L.T.H. An với cộng sự [8], kết hợp phép chiếu trực tiếp lên tập  $C$  [1], để xây dựng thuật toán mới giải bài toán  $BVI(C, F, G)$ . Các kết quả chứng minh được trình bày trong không gian  $\mathbb{R}^n$ .

## 3. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 3.1. Thuật toán

Cho ánh xạ giá  $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  thỏa mãn các điều kiện sau:

(A1)  $F$  là đơn điệu mạnh với hệ số  $\beta > 0$ :  
 $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2, \forall x, y \in C;$

(A2)  $F$  là liên tục Lipschitz với hệ số  $L > 0$ :  $\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in C$

**Thuật toán 1: Bước 1:** Chọn bất kì  $x^0 \in C$ ,  $\eta > 0$  và các tham số:

$$\begin{cases} \tau := 1 - \sqrt{1 - \mu(2\beta - \mu L^2)}, \quad \mu \in \left(0, \frac{2\beta}{L^2}\right), \quad \alpha_k \in \left(0, \frac{2\mu\beta - 2\tau}{\mu^2 L^2 - \tau^2}\right), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \\ \eta > \max \left\{ -6\tau_1(Q), \frac{L \|Q\| (L + \sqrt{L^2 - \beta^2})}{\beta^2}, \frac{-2\tau_1(Q)(\beta^2 + L^2)}{\beta^2} \right\} \end{cases} \quad (1.3)$$

**Bước 2:** Tính

$$y^k = \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - x^k\|^2 : x \in C \right\}, \quad (1.4)$$

$$\text{tìm: } x^{k+1} = Pr_C \left[ y^k - \mu \alpha_k F(y^k) \right]. \quad (1.5)$$

**Bước 3.** Đặt  $k = k + 1$ , quay lại *Bước 2*.

**Chú ý.** Trong công thức (1.4), theo thuật toán DC [8], ta luôn tìm được nghiệm tối ưu duy nhất  $y^k$ .

### 3.2. Sự hội tụ

Định lý sau chỉ ra sự hội tụ của dãy lặp trong Thuật toán 1.

#### Định lý 3.1.

Dưới điều kiện (A1) và (A2), dãy  $\{x^k\}$ ,  $\{y^k\}$  trong Thuật toán 1 hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất  $x^*$  của bài toán (1.2).

Sau đây là các bổ đề cần thiết cho chứng minh sự hội tụ.

$$\mathbf{Bổ đề 3.1.} \quad [4, \text{trang 834}] \quad \text{Xét bài toán } \min \left\{ f(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle : x \in C \right\}. \quad (1.6)$$

Điểm  $\bar{x}$  là điểm điểm KKT (Karush - Kuhn - Tucker) của bài toán (1.6) khi và chỉ khi  $\bar{x} \in \text{Sol}(C, G)$ .

**Bổ đề 3.2.** [7, bổ đề 3.1] Cho  $\rho > 0$  và  $\text{Sol}(C, G) \neq \emptyset$ . Khi đó tồn tại hai số  $\epsilon > 0$  và  $\beta > 0$  sao cho

$$d(x, \text{Sol}(C, G)) \leq \beta \left\| x - Pr_C \left[ x - \frac{1}{\rho} (Qx + q) \right] \right\|,$$

$$\text{với mọi } x \in C, \text{ mà } \left\| x - Pr_C \left[ x - \frac{1}{\rho} (Qx + q) \right] \right\| \leq \epsilon, \text{ và ở đây,}$$

$$d(x, \text{Sol}(C, G)) = \min \{ \|x - y\| : y \in \text{Sol}(C, G) \}.$$

**Bổ đề 3.3.** [4, bổ đề 2.2] Cho các tập  $S_1, \dots, S_r$  là họ hữu hạn tất cả  $r$  tập liên thông của  $\text{Sol}(C, G)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Khi đó ta có các tính chất sau:

$$\text{a, } \text{Sol}(C, G) = \bigcup_{i=1}^r S_i$$

b, mỗi  $S_i$  là hợp hữu hạn của các tập lồi đa diện;

c, các tập  $S_i (i = 1, \dots, r)$  rời nhau, tức là tồn tại  $\delta > 0$  sao cho nếu  $i \neq j$  thì  $d(x, S_j) \geq \delta$  với mọi  $x \in S_i$ .

d, hàm  $f$  trong (1.6) là hằng số trên các tập  $S_i$ .

**Bổ đề 3.4.** [9, mệnh đề 4.4] Cho  $\{a_k\}$  là một dãy số thực dương. Giả sử rằng với mọi số tự nhiên  $m$ , tồn tại một số tự nhiên  $p$  sao cho  $p \geq m$  và  $a_p \leq a_{p+1}$ . Cho  $k_0$  là một số tự nhiên thỏa mãn  $a_{k_0} \leq a_{k_0+1}$  và với mọi  $k \geq k_0$  đặt:

$$\tau_k = \max\{i \in \mathbb{N} : k_0 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\},$$

khi đó  $0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}$  với mọi  $k \geq k_0$ . Hơn nữa dãy  $\{\tau(k)\}_{k \geq k_0}$  là không giảm và tiến đến  $+\infty$ , khi  $k \rightarrow \infty$ .

#### Chứng minh sự hội tụ.

Ta chứng minh sự hội tụ của dãy lặp sinh bởi Thuật toán 1 thông qua các khẳng định sau:

**Khẳng định 1.** Ta có

$$\|y^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2.$$

Thật vậy, nếu ma trận  $Q$  có giá trị riêng  $\tau_1(Q)$  thỏa mãn  $\eta > -2\tau_1(Q) \geq 0$  thì bài toán (1.4) là lồi mạnh, có nghiệm duy nhất  $y^k$  [8], thỏa mãn bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh sau:

$$\langle Qy^k + q + \eta y^k - \eta x^k, x - y^k \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \quad (1.7)$$

Từ  $x^*$  là nghiệm duy nhất của bài toán  $BVI(C, F, G)$ , có  $\langle Qx^* + q, y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C$ , do  $G$  là giả đơn điệu trên  $C$  và từ  $y^k \in C$ , ta có  $\langle Qy^k + q, y^k - x^* \rangle \geq 0$ . Ta thay  $x$  bằng  $x^* \in C$  vào bất đẳng thức (1.7), ta có:

$$2\eta \langle y^k - x^k, y^k - x^* \rangle \leq \langle Qy^k + q, x^* - y^k \rangle \leq 0,$$

kết hợp điều này và đẳng thức sau:

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2} (\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a - b\|^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n,$$

ta có

$$\eta \langle y^k - x^k, y^k - x^* \rangle = \frac{\eta}{2} (\|y^k - x^k\|^2 + \|y^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2) \leq 0.$$

Từ giả thiết  $\eta > 0$ , ta có

$$\|y^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2.$$

**Khẳng định 2.** (Xem [6]) Cho ánh xạ  $S_k : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ , được cho bởi công thức

$S_k(x) := x - \mu\alpha_k F(x)$ ,  $\forall x \in C$ . Khi đó,  $S_k$  là ánh xạ co

$$\|S_k(x) - S_k(y)\| \leq (1 - \tau\alpha_k) \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C,$$

ở đây,  $\tau := 1 - \sqrt{1 - \mu(2\beta - \mu\mathbb{L}^2)}$ .

**Khẳng định 3.** Ta có

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \tau\alpha_k) \left[ \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2 \right] + \frac{\alpha_k \mu^2}{\tau} \|F(x^*)\|^2.$$

Thật vậy, do hình chiếu  $Pr_C$  là không giãn, kết hợp với **Khẳng định 2** và bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &= \|Pr_C[y^k - \mu\alpha_k F(y^k)] - x^*\| \\ &\leq \|S_k(y^k) - S_k(x^*) - \mu\alpha_k F(x^*)\| \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\leq (1 - \tau\alpha_k) \|y^k - x^*\| + \mu\alpha_k \|F(x^*)\|. \quad (1.9)$$

Kết hợp với **Khẳng định 1**, ta chỉ ra

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \left[ (1 - \tau\alpha_k) \|y^k - x^*\| + \mu\alpha_k \|F(x^*)\| \right]^2 \\ &\leq (1 - \tau\alpha_k) \left[ \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2 \right] + \frac{\alpha_k \mu^2}{\tau} \|F(x^*)\|^2. \end{aligned}$$

**Khẳng định 4.** Nếu tồn tại  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^2 < \infty$  thì hai điều sau đây luôn đúng:

$$(4a) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0;$$

$$(4b) \quad \{x^k\}, \{y^k\} \text{ hội tụ về } \bar{x} \in \text{Sol}(C, G).$$

Thật vậy, từ **Khẳng định 3**, ta suy ra

$$\|y^k - x^k\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k \mu^2}{\tau} \|F(x^*)\|^2.$$

Vì  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$  và  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^2 < \infty$  ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ , do đó,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0$

Từ (1.7), điểm  $y^k$  là nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân  $VI(C, (Q + \eta I)x + q - \eta x^k)$ , ở đây,  $I$  là ma trận đơn vị. Vậy,  $y^k$  là điểm bất động của ánh xạ  $Pr_C \left\{ x - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)x + q - \eta x^k] \right\}$ . Từ  $\eta > 0$  và  $\eta > -\tau_1(Q)$  với mọi  $k \geq 0$ , ta có

$$y^k = Pr_C \left\{ y^k - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] \right\}. \quad (1.10)$$

Từ (1.10), ta suy ra

$$\begin{aligned}
\|y^{k+1} - y^k\| &= \left\| Pr_C \left\{ y^{k+1} - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^{k+1} + q - \eta x^{k+1}] \right\} \right. \\
&\quad \left. - Pr_C \left\{ y^k - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] \right\} \right\| \\
&\leq \left\| y^{k+1} - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^{k+1} + q - \eta x^{k+1}] - y^k + \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] \right\| \\
&\leq \frac{\|Q\|}{\eta} \|y^{k+1} - y^k\| + \|x^{k+1} - x^k\|. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Vì vậy,  $\|y^{k+1} - y^k\| \leq \frac{\eta}{\eta - \|Q\|} \|x^{k+1} - x^k\|$ . (1.12)

Sử dụng *Khẳng định 2*,  $x^k \in C$  và  $x^{k+1} = Pr_C[y^k - \mu\alpha_k F(y^k)]$ , ta có  $x^k = Pr_C(x^k)$  và  $\|x^{k+1} - x^k\| = \|Pr_C[y^k - \mu\alpha_k F(y^k)] - Pr_C(x^k)\| \leq \|y^k - \mu\alpha_k F(y^k) - x^k\| \leq \|y^k - x^k\| + \mu\alpha_k \|F(y^k)\|$ .

Lấy giới hạn hai vế khi  $k \rightarrow \infty$ , sử dụng tính bị chặn của  $\{y^k\}$  và (4a), suy ra

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$ . Từ (1.12), ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^{k+1} - y^k\| = 0$ . Kết hợp với (1.10) và tính

không giãn của  $Pr_C$ , ta được

$$\begin{aligned}
\left\| y^k - Pr_C \left[ y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \right\| &= \left\| \begin{array}{l} Pr_C \left\{ y^k - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] \right\} \\ - Pr_C \left[ y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \end{array} \right\| \\
&\leq \left\| y^k - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] - y^k + \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right\| \\
&= \|y^k - x^k\|. \tag{1.13}
\end{aligned}$$

Từ  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = 0$  và (1.13), suy ra  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| y^k - Pr_C \left[ y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \right\| = 0$ .

Với mỗi  $\epsilon > 0$ , tồn tại số tự nhiên  $k_0 \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}$  sao cho

$$\left\| y^k - Pr_C \left[ y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \right\| \leq \epsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Từ *Bổ đề 3.2* tồn tại số  $l > 0$  để

$$\begin{aligned}
d(y^k, Sol(C, G)) &\leq l \left\| y^k - Pr_C \left[ y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \right\|, \quad \forall k \geq k_0 \\
&\leq l \| y^k - x^k \| \\
&\rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Do  $Sol(C, G)$  là tập đóng, khác rỗng, nên tồn tại  $z^k \in Sol(C, G)$  sao cho  $d(y^k, Sol(C, G)) = \| y^k - z^k \|$ . Suy ra  $\lim_{k \rightarrow \infty} \| y^k - z^k \| = 0$ .

Sử dụng (1.11), ta có

$$\begin{aligned}
\| z^{k+1} - z^k \| &\leq \| z^{k+1} - y^{k+1} \| + \| y^{k+1} - y^k \| + \| y^k - z^k \| \\
&\leq \| z^{k+1} - y^{k+1} \| + \frac{\| Q \|}{\eta} \| y^{k+1} - y^k \| + \| x^{k+1} - x^k \| + \| y^k - z^k \| \\
&\rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Từ  $G$  là giả đơn điệu, ta có  $Sol(C, G)$  là tập lồi và đóng. Do đó,  $Sol(C, G)$  có duy nhất 1 thành phần liên thông. Từ **Bổ đề 3.3** và  $\lim_{k \rightarrow \infty} \| z^{k+1} - z^k \| = 0$ , tồn tại số  $k_0$  và  $c$  sao cho  $z^k \in Sol(C, G)$ , và  $f(z^k) = c$ ,  $\forall k \geq k_0$ , với hàm  $f$  trong bài toán (1.6). Sử dụng  $\lim_{k \rightarrow \infty} \| y^k - x^k \| = \lim_{k \rightarrow \infty} \| y^k - z^k \| = 0$  và  $f(z^k) = c$ ,  $\forall k \geq k_0$ , ta có  $f_*$  là giá trị cực tiểu của bài toán  $\min \{ f(x) : x \in C \}$ , sao cho  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f_*$ . Từ dãy  $\{x^k\}$  hội tụ, kết hợp **Bổ đề 3.1**, tồn tại  $\bar{x} \in Sol(C, G)$  và  $\lim_{k \rightarrow \infty} \| x^k - \bar{x} \| = 0$ . Vì vậy, cả hai dãy  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  cùng hội tụ về  $\bar{x} \in Sol(C, G)$ .

**Khẳng định 5.** Các dãy  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  hội tụ về nghiệm duy nhất  $x^*$  của bài toán  $BVI(C, F, G)$ .

Thật vậy, ta chỉ ra sự hội tụ trong hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1.** Tồn tại số  $k_0 \in \mathbb{N}$  sao cho  $\{\| x^k - x^* \|^2\}_{k=k_0}^\infty$  không tăng.

Suy ra  $\lim_{k \rightarrow \infty} \| x^k - x^* \|^2 = A < +\infty$ . Dùng bước lặp 4, ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \| x^k - y^k \| = 0$ ,  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  hội tụ về  $\bar{x} \in Sol(C, G)$ . Khi đó,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \langle y^k - x^*, F(y^k) \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\langle y^k - x^*, F(y^k) - F(x^*) \rangle + \langle y^k - x^*, F(x^*) \rangle] \\
&\geq \lim_{k \rightarrow \infty} [\beta \| y^k - x^* \|^2 + \langle y^k - x^*, F(x^*) \rangle] \\
&= \beta A + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle y^k - x^*, F(x^*) \rangle \geq \beta A \geq 0. \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Để chỉ ra sự mâu thuẫn, ta giả sử  $A > 0$ , chọn  $\epsilon = \frac{1}{2} \beta A$ , từ (1.14), tồn tại  $k_1 \geq k_0$  sao cho  $\langle y^k - x^*, F(y^k) \rangle \geq \beta A - \epsilon = \beta A - \frac{1}{2} \beta A = \frac{1}{2} \beta A > 0$  đúng với mọi  $k \geq k_1$ . Khi đó, ta chỉ ra bất đẳng thức sau:

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 = \|Pr_C(y^k - \mu\alpha_k F(y^k)) - Pr_C(x^*)\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \mu\alpha_k\beta A + \alpha_k^2 M,$$

ở đây,  $M := \sup\{\mu^2 \|F(y^k)\|^2 : k = 0, 1, \dots\} < \infty$ . Vì thế,

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \mu\alpha_k\beta A + \alpha_k^2 M, \quad \forall k \geq k_1.$$

Ta viết lại,  $\|x^{k+1} - x^*\|^2 - \|x^{k_1} - x^*\|^2 + \mu\beta A \sum_{j=k_1}^k \alpha_j \leq M \sum_{j=k_1}^k \alpha_j^2$ .

Lấy giới hạn khi  $k \rightarrow \infty$ , sử dụng  $\sum_{k=k_1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ , ta có  $\sum_{k=k_1}^{\infty} \alpha_k < \infty$ . Mâu thuẫn với giả

thiết  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$  của (1.3). Như vậy, ta có  $A = 0$ ,  $x^k \rightarrow x^*$  và  $y^k \rightarrow x^*$ .

**Trường hợp 2.** Giả sử không tồn tại số  $k_0 \in \mathbb{N}$  sao cho dãy số  $\{\|x^k - x^*\|^2\}_{k=k_0}^{\infty}$  không tăng.

Đặt  $a_k = \|x^k - x^*\|^2$ . Ta làm theo kỹ thuật của Maingé, trong *Bổ đề 3.4*. Đặt

$$\tau(k) = \max\{i \in \mathbb{N} : i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\},$$

khi đó,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(k) = \infty, \quad \tau(k) \leq \tau(k+1), \quad a_{\tau(k)} \leq a_{\tau(k)+1}, \quad 0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}, \quad \forall k \geq k_0. \quad (1.15)$$

Từ *Khẳng định 3*, ta chỉ ra

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - \tau\alpha_k) \left[ \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2 \right] + \frac{\alpha_k \mu^2}{\tau} \|F(x^*)\|^2 \\ &\leq \max \left\{ \|x^0 - x^*\|^2, \frac{\mu^2 \|F(x^*)\|^2}{\tau^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Do đó, dãy  $\{x^k\}$  bị chặn. Từ dãy con  $\{a_{\tau(k)}\}$  không tăng, kết hợp với tính bị chặn của dãy  $\{x^k\}$ , tồn tại giới hạn  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)} < +\infty = B$ . Kết hợp với (1.15), *Khẳng định 1* và (1.16), ta có

$$\begin{aligned} a_{\tau(k)} &\leq a_{\tau(k)+1} \leq \left[ 1 - \tau\alpha_{\tau(k)} \right] \|y^{\tau(k)} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_{\tau(k)} \mu^2}{\tau} \|F(x^*)\|^2 \\ &\leq \left[ 1 - \tau\alpha_{\tau(k)} \right] a_{\tau(k)} + \frac{\alpha_{\tau(k)} \mu^2}{\tau} \|F(x^*)\|^2. \end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn khi  $k \rightarrow \infty$  và sử dụng  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{\tau(k)} = 0$ , ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^{\tau(k)} - x^*\|^2 = B.$$

Từ *Khẳng định 4*, ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - y^{\tau(k)}\| = 0$  và cả hai dãy  $\{x^{\tau(k)}\}$  và  $\{y^{\tau(k)}\}$  cùng hội tụ về  $\hat{x} \in \text{Sol}(C, G)$ . Từ (1.8) và *Khẳng định 2*, ta chỉ ra

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|S_k(y^k) - S_k(x^*) - \mu\alpha_k F(x^*)\|^2 \\ &\leq (1 - \tau\alpha_k) \|x^k - x^*\|^2 - 2\mu\alpha_k \langle F(x^*), y^k - x^* - \mu\alpha_k [F(y^k) - F(x^*)] \rangle \\ &\quad + \mu^2 \alpha_k^2 \|F(x^*)\|^2. \end{aligned}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} a_{\tau(k)} &\leq a_{\tau(k)+1} \\ &\leq (1 - \tau\alpha_{\tau(k)}) a_{\tau(k)} - 2\mu\alpha_{\tau(k)} \langle F(x^*), y^{\tau(k)} - x^* - \mu\alpha_{\tau(k)} [F(y^{\tau(k)}) - F(x^*)] \rangle \\ &\quad + \mu^2 \alpha_{\tau(k)}^2 \|F(x^*)\|^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\tau a_{\tau(k)} \leq -2\mu \langle F(x^*), y^{\tau(k)} - x^* - \mu\alpha_{\tau(k)} [F(y^{\tau(k)}) - F(x^*)] \rangle + \mu^2 \alpha_{\tau(k)} \|F(x^*)\|^2.$$

Nhắc lại rằng,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle F(x^*), y^{\tau(k)} - x^* - \mu\alpha_{\tau(k)} [F(y^{\tau(k)}) - F(x^*)] \rangle = \langle F(x^*), \hat{x} - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{với}$$

$\hat{x} \in \text{Sol}(C, G)$ .

Cho  $k \rightarrow \infty$ , ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)} = 0$ .

Từ (1.16) và  $a_k \leq a_{\tau(k)+1}$ , với mọi  $k$ , ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Vì vậy, hai dãy  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  cùng hội tụ về nghiệm duy nhất  $x^*$  của bài toán  $BVI(C, F, G)$ . (*Điều phải chứng minh*).

#### 4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã đề xuất và chứng minh sự hội tụ của thuật toán mới là sự kết hợp giữa kỹ thuật phân tích DC với phương pháp chiếu, để giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, trong trường hợp ánh xạ giá  $G$  là hàm affine, thỏa mãn tính chất giả đơn điệu, còn  $F$  là ánh xạ đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz. Bài toán  $BVI(C, F, G)$  của chúng tôi là sự mở rộng của bất đẳng thức biến phân, chẳng hạn như, cho  $G(x) = 0$ , khi đó tập nghiệm  $\text{Sol}(C, G) = C$ , bài toán quay về trường hợp thông thường.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO:

##### Tiếng Việt

1. Phạm Ngọc Anh (2015), 'Các phương pháp tối ưu và ứng dụng', NXB Thông tin và Truyền thông, Hà Nội.
2. Nguyễn Văn Hiền, Lê Dũng Mưu và Nguyễn Hữu Điền (2018), 'Giáo trình Giải tích lồi ứng dụng', NXB Đại học quốc gia Hà Nội.

##### Tiếng Anh

3. P.N. Anh, J.K. Kim, L.D. Muu (2012), 'An extragradient method for solving bilevel variational inequalities', J. Glob. Optim. **52**, 627-639.
4. M.S. Gowda, J.S. Pang (1994), 'Stability analysis of variational inequalities and nonlinear complementarity problems, via the mixed linear complementarity problem and degree theory', Math. Oper. Res. **19**(4), 831-879.

5. P. Hartman, G. Stampacchia (1966), '*On some non linear elliptic differential functional equations*', Acta Math., 115, p. 271-310.
6. I.V. Konnov (2000), '*Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*'. Springer, Berlin.
7. Z.Q. Luo, P. Tseng (1992), '*Error bound and convergence analysis of matrix splitting algorithms for the affine variational inequality problem*', Siam J. Optim. 2(1), 43-54
8. L.T.H. An, P.D. Tao (1997), '*Solving a class of linearly constrained indefinite quadratic problems by DC algorithms*', J. Global Optim. 11, 253-285.
9. P.E. Maing'e (2008), '*A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems*', SIAM J. Control Optim., 47, 1499-1515.
10. S. Sabach, S. Shtern (2017), '*A first order method for solving convex bilevel optimization problems*', SIAM J. Optim. 27(2), 640-660.
11. N.T. Hao (2006), '*Tikhonov regularization algorithm for pseudomonotone variational inequalities*', Acta Math. Vietnam. **31**, 283-289.
12. I. Yamada (2001), '*The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings*', Stud. Comput. Math. **8**, 473-504.