

# ỨNG DỤNG ĐẠI SỐ GIA TỬ VÀO DỰ BÁO THEO CHUỖI THỜI GIAN

Nguyễn Văn Quyền  
Phòng Quản lý sau đại học  
Email: quyennv@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 19/4/2024  
Ngày PB đánh giá: 30/5/2024  
Ngày duyệt đăng: 31/5/2024

**Tóm tắt:** Dự báo theo chuỗi thời gian là vấn đề đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. Kể từ sau các nghiên cứu của Song và Chissom, nhiều mô hình và phương pháp đã được đề xuất. Các mô hình và phương pháp đề xuất này chủ yếu dựa trên chuỗi thời gian mờ và định nghĩa hình thức để xử lý tính mờ của dữ liệu. Năm 1996, Chen đã đề xuất một phương pháp mới, hiệu quả để giảm độ phức tạp thuật toán định nghĩa hình thức đã đề cập [1]. Năm 1998, Hwang và cộng sự đã đề xuất mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ mới, theo đó mô hình sẽ xử lý dựa trên dữ liệu đã được biến đổi từ dữ liệu gốc. Nghiên cứu này đề xuất chuỗi thời gian ngôn ngữ dựa trên lý thuyết Đại số gia tử, trong đó các từ có ngữ nghĩa riêng được sử dụng thay các tập mờ. Bằng cách này, mối quan hệ logic giữa các từ ngữ dự báo có thể được thiết lập dựa trên sự biến đổi của chuỗi thời gian. Hiệu quả của mô hình đề xuất được chứng minh bằng cách áp dụng mô hình đề xuất để dự báo dữ liệu tuyển sinh đại học.

**Từ khóa:** Mô hình dự báo, chuỗi thời gian mờ, đại số gia tử, chuỗi thời gian ngôn ngữ.

## APPLYING THE HEDGE ALGEBRA TO TIME SERIES FORECASTING

**Abstract:** So far, the time series forecasting is a topic that has attracted the attention of many scientists. Since 1993, after the study by Song and Chissom [15], many models and methods have been proposed. All of the studies are based on fuzzy time series and formal definitions to handle the fuzziness of data. In 1996, Chen proposed a new and more effective method to reduce the complexity of the previously mentioned formal algorithms. In 1998, Hwang and colleagues introduced a new fuzzy time series forecasting model, which processes data that has transformed from the original data. This research proposes a linguistic time series based on the theory of Hedge Algebra theory, in which words with their own semantics are used instead of fuzzy sets. In this way, the logical relationship between the forecasting terms can be established based on the transformation of the time series. The effectiveness of the proposed model is demonstrated by applying it to forecast university admission data.

**Keywords:** Forecasting model, fuzzy time series, hedge algebras, linguistic time series.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bài toán dự báo theo chuỗi thời gian là vấn đề vẫn đang thu hút được nhiều sự quan tâm các nhà khoa học. Các phương pháp đề

xuất chủ yếu dựa trên chuỗi thời gian mờ và định nghĩa hình thức để xử lý tính mờ của dữ liệu. Việc tính toán với chuỗi thời gian mờ chủ yếu dựa trên các tập mờ được xây dựng

nhất quán cho dữ liệu lịch sử đầu vào. Các tập mờ được xây dựng cho chuỗi thời gian là các yếu tố cơ bản để tạo ra các quan hệ logic mờ (fuzzy logical relationship - FLR) để xử lý dữ liệu chuỗi thời gian. Tuy nhiên, việc xây dựng các tập mờ vẫn phụ thuộc rất nhiều vào kiến thức và kinh nghiệm của người phát triển. Trong lý thuyết tập mờ, không có định nghĩa hình thức nào để liên kết các tập mờ và các từ ngữ liên quan. Điều tự nhiên và yêu cầu cần thiết là có thể xử lý ngay các nhãn ngôn ngữ với ngữ nghĩa vốn có được gán cho các tập mờ trong chuỗi thời gian mờ và trong các FLR của nó.

Đại số gia tử (Hedge algebras - HA) được giới thiệu vào năm 1990 để hình thức hóa miền từ của các biến ngôn ngữ dưới dạng cấu trúc đại số và ngữ nghĩa của các từ được xác định trong cấu trúc tương ứng [6]. Theo cách tiếp cận này, miền từ của một biến ngôn ngữ được coi là một cấu trúc đại số, trong đó các từ được tạo ra từ hai từ gốc có nghĩa trái ngược nhau bằng cách bổ sung các gia tử được coi là các phép toán đơn nhất như “rất”, “đúng hơn”, “ít”... Chúng tạo thành một chủ nghĩa hình thức đủ để xử lý thông tin ngôn ngữ và xây dựng các đối tượng tính toán hợp lý, bao gồm cả các tập mờ, để biểu diễn ngữ nghĩa vốn có của các từ. Trong nghiên cứu này, chúng tôi giới thiệu chuỗi thời gian ngôn ngữ và mô hình ngôn ngữ dự báo dữ liệu chuỗi thời gian dựa trên đại số gia tử HA. Mô hình dự báo ngôn ngữ đề xuất đảm bảo rằng kiến trúc ngôn ngữ được xây dựng từ các FLR thể hiện được ngữ nghĩa vốn có của các từ, tương tự như kiến trúc ngôn ngữ thông thường của con người.

## **2. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU**

### **2.1. Tổng quan vấn đề nghiên cứu**

Chuỗi thời gian mờ được Song và Chissom đề xuất lần đầu tiên vào năm 1993 [13], theo đó mô hình dự báo chuỗi thời gian

mờ được đề xuất để giải quyết sự không chắc chắn của dữ liệu chuỗi thời gian. Sau đó, Song và Chissom cũng giới thiệu hai mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ bất biến [14] và xử lý chuỗi thời gian biến thiên [15] áp dụng để dự báo chuỗi thời gian tuyến sinh của Trường Alabama. Năm 1994, trong [16], Sullivan và Woodall đã đề xuất sử dụng mô hình Markov để dự báo chuỗi thời gian tuyến sinh sinh viên. Đến năm 1998, Hwang và cộng sự [9] đã đề xuất mô hình dự báo chuỗi thời gian mờ sử dụng dữ liệu đã được biến đổi từ dữ liệu gốc thay vì chính chuỗi thời gian. Mô hình này tập trung vào sự thay đổi của dữ liệu gốc, là một cách tiếp cận phù hợp với sự thay đổi hàng năm của dữ liệu tuyến sinh. Sau các nghiên cứu này, nhiều mô hình và phương pháp mới đã được đề xuất [1-4, 8, 10-12], trong đó nổi bật là các nghiên cứu của Chen và cộng sự như phương pháp số học [1, 2, 3] hay thuật toán phân cụm tự động và quan hệ logic mờ [3]. Các phương pháp do Chen đề xuất được chứng minh là tương đối hiệu quả dựa trên các tiêu chí như thời gian tính toán nhanh hơn, kết quả dự báo chính xác hơn. Tuy nhiên, các phương pháp đề xuất vẫn chủ yếu dựa trên chuỗi thời gian mờ, việc tính toán với chuỗi thời gian mờ vẫn chủ yếu dựa trên các tập mờ được xây dựng nhất quán cho dữ liệu lịch sử đầu vào.

Chuỗi thời gian mờ là một cách hiệu quả để xử lý dữ liệu chuỗi thời gian có phạm vi rộng và không chắc chắn. Việc tính toán với chuỗi thời gian mờ chủ yếu dựa trên các tập mờ được xây dựng nhất quán cho dữ liệu lịch sử đầu vào. Các tập mờ được xây dựng cho chuỗi thời gian là các yếu tố cơ bản để tạo ra các quan hệ logic mờ (FLR) liên quan đến việc xử lý dữ liệu chuỗi thời gian.

### **2.2. Phương pháp nghiên cứu**

Trong quá trình nghiên cứu, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu:

- Phương pháp phân tích: phân tích các phương pháp đề xuất trong các công trình đã công bố trước đây.

- Phương pháp thực nghiệm: thực nghiệm phương pháp đề xuất trên cùng cơ sở dữ liệu với các phương pháp đã công bố trước đây.

- Phương pháp so sánh: dùng để so sánh, đánh giá kết quả thực nghiệm của phương pháp đề xuất với các phương pháp đã công bố.

### 3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

#### 3.1. Đại số gia tử và ngữ nghĩa của từ

Mục đích của cách tiếp cận đại số gia tử (HA) là diễn giải từng tập hợp từ của một biến ngôn ngữ như một đại số có cấu trúc dựa trên thứ tự được tạo ra bởi ý nghĩa định tính vốn có của các từ ngôn ngữ. Bằng cách này, quan hệ trật tự của nó được gọi là quan hệ trật tự ngữ nghĩa.

Như đã đề cập ở trên, mối quan hệ thứ tự của các giá trị ngôn ngữ tạo nên ngữ nghĩa của chúng. Trong phần này, chúng ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản về Đại số gia tử như: đo độ mờ ( $fm$ ), hàm định lượng ngữ nghĩa (semantically quantifying mapping - SQM) [5, 7]. Đây là những kiến thức cần thiết được sử dụng để trình bày mô hình dự báo của chúng tôi.

Đặt  $AX = (X, G, C, H, \leq)$  là một Đại số gia tử, trong đó  $G = \{c^-, c^+\}$  là một tập hợp các phần tử sinh âm và dương của  $X$ ;  $C = \{0, W, 1\}$  là tập hợp các hằng số nhỏ nhất, trung tính và lớn nhất;  $H = \{h^-, h^+\}$  là một tập hợp các gia tử của  $X$ , được coi là các phép toán đơn nhất, trong đó  $h^-$  và  $h^+$  lần lượt là các gia tử âm và gia tử dương; và  $\leq$  là quan hệ trật tự ngữ nghĩa của các từ trong  $X$ .

**Định nghĩa 3.1** [6] Cho  $AX = (X, G, C, H, \leq)$  là Đại số gia tử. Hàm  $fm: X \rightarrow [0, 1]$  được gọi là độ đo độ mờ của các từ trong  $X$  nếu:

$$fm(c^-) + fm(c^+) = 1 \text{ và } \sum_{h \in H} fm(hu) = fm(u), \text{ với } \forall u \in X; \quad (1)$$

$$\text{Với các hằng số } 0, W \text{ và } 1: fm(0) = fm(W) = fm(1) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Với } \forall x, y \in X, \forall h \in H, \frac{fm(hx)}{fm(x)} = \frac{fm(hy)}{fm(y)}, \quad (3)$$

ngĩa là tỷ lệ này không phụ thuộc vào các phần tử cụ thể  $x$  và  $y$  do đó, nó được gọi là độ đo mờ của gia tử  $h$  và ký hiệu là  $\mu(h)$ .

Mọi độ đo mờ  $fm$  trên  $X$  thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f1) fm(hx) = \mu(h)fm(x), \text{ for } \forall x \in X; \quad (4)$$

$$f2) fm(c^-) + fm(c^+) = 1; \quad (5)$$

$$f3) \sum_{-q \leq i \leq p, i \neq 0} fm(h_i c) = fm(c), c \in \{c^-, c^+\}; \quad (6)$$

$$f4) \sum_{-q \leq i \leq p, i \neq 0} fm(h_i x) = fm(x); \quad (7)$$

$$f5) \text{Đặt } \sum_{-q \leq i \leq -1} \mu(h_i) = \alpha, \sum_{1 \leq i \leq p} \mu(h_i) = \beta, \text{ trong đó } \alpha + \beta = 1. \quad (8)$$

Với các giá trị  $fm(c^-)$ ,  $\mu(h)$ ,  $h \in H$ ,  $fm$  xác định, chúng ta gọi chúng là các tham số của biến đang xét. Từ các tham số này, ta có thể định nghĩa và tính ngữ nghĩa của mỗi từ  $x$ ,  $v(x)$ , có thể mô tả ngắn gọn như sau:

**Định nghĩa 3.2** [3] Hàm dấu  $X \rightarrow \{-1, 1\}$  là một ánh xạ được định nghĩa đệ quy như sau. Với  $h, h' \in H$  và  $c \in \{c^-, c^+\}$ :

$$1) \text{sign}(c^-) = -1, \text{sign}(c^+) = +1; \quad (9)$$

$$2) \text{sign}(hc) = -\text{sign}(c) \text{ nếu } h \text{ âm đối với } c; \text{sign}(hc) = +\text{sign}(c) \text{ nếu } h \text{ dương đối với } c; \quad (10)$$

$$3) \text{sign}(h'hx) = -\text{sign}(hx) \text{ nếu } h'hx \neq hx \text{ và } h' \text{ âm đối với } h; \quad (11)$$

$$4) \text{sign}(h'hx) = +\text{sign}(hx) \text{ nếu } h'hx \neq hx \text{ và } h' \text{ dương đối với } h. \quad (12)$$

**Định lý 3.1** [3] Với các giá trị cho trước của tham số mờ của một biến, SQM  $\nu : X \rightarrow [0, 1]$  tương ứng của nó được định nghĩa như sau:

$$1) (W) = \theta = fm(c^-); \quad (13)$$

$$2) \nu(c^-) = \theta - \alpha fm(c^-) = \beta fm(c^-); \quad (14)$$

$$3) \nu(c^+) = \theta + \alpha fm(c^+) = 1 - \beta fm(c^+); \quad (15)$$

$$4) \nu(h_j x) = \nu(x) + \text{sign}(h_j x) \{ \sum_{i=\text{sign}(j)}^j fm(h_i x) - \omega(h_j x) fm(h_j x) \} \quad (16)$$

trong đó  $\omega(h_j x) = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(h_j x) \text{sign}(h_p h_j x) (\beta - \alpha)] \in \{\alpha, \beta\}$ .

### 3.2. Chuỗi thời gian ngôn ngữ và mô hình dự báo chuỗi thời gian ngôn ngữ

Giả sử  $X_i$  và  $X_j$  lần lượt là các từ biểu thị dữ liệu tại thời điểm  $t$  và  $t + 1$ . Khi đó, tồn tại một mối quan hệ giữa  $X_i$  và  $X_j$  gọi là mối quan hệ logic ngôn ngữ (linguistic logical relationship - LLR) và ký hiệu là  $X_i \rightarrow X_j$

Gộp các quan hệ chung giá trị  $X_i$  bên trái ta sẽ có biểu diễn:  $X_i \rightarrow X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn}$

Mô hình dự báo được đề xuất bao gồm các bước sau:

Bước 1. Xác định tập vũ trụ diễn ngôn. Thiết lập cấu trúc đại số gia tử, chọn  $\alpha, \theta$  và chọn các từ theo dữ liệu nguồn.

Bước 2. Lượng hóa ngữ nghĩa của từ sử dụng các công thức (13) đến (16)

Bước 3. Ánh xạ ngữ nghĩa của từ vào không gian vũ trụ diễn ngôn, chúng ta có tập hợp các điểm ngữ nghĩa.

Bước 4. Ngữ nghĩa hóa dữ liệu lịch sử. Đối với mỗi điểm được chỉ định, ngữ nghĩa của điểm này phụ thuộc vào điểm ngữ nghĩa gần nhất.

Bước 5. Thiết lập các mối quan hệ ngữ nghĩa của các từ và nhóm chúng thành các nhóm quan hệ ngữ nghĩa.

Bước 6. Tính kết quả dự báo dựa trên các nhóm quan hệ ngữ nghĩa và nguyên tắc.

### 3.3. Thực nghiệm

Thuật toán đề xuất trong bài báo được lập trình và thực nghiệm trên phần mềm Python 3.12 (64-bit), viết code trên PyCharm-community 3.1, chạy trên nền windows 10.

Tập dữ liệu là số liệu tuyển sinh của Trường Đại học Alabama từ năm 1971 đến năm 1992 [3, 4], cụ thể như sau:

Bước 1. Xác định tập vũ trụ diễn ngôn với  $DL = 13.000$ ,  $DR = 20.000$ . Chọn các từ ngữ  $X_1 = \text{"Very Small"}$ ,  $X_2 = \text{"Small"}$ ,  $X_3 = \text{"Rather Small"}$ ,  $X_4 = \text{"Middle"}$ ,  $X_5 = \text{"Rather Large"}$ ,  $X_6 = \text{"Large"}$ ,  $X_7 = \text{"Very Large"}$  để mô tả số lượng tuyển sinh.

Bước 2. Áp dụng công thức định lượng ngữ nghĩa của đại số gia tử, ta xác định được giá trị ngữ nghĩa của từ ngữ  $X_1 \dots X_7$ , cụ thể:

$$\text{Chọn } \theta = 0.57, \alpha = 0.49.$$

$$\text{Giá trị ngữ nghĩa của các từ } X_1 \dots X_7: \nu(X_1) = 0.1483, \nu(X_2) = 0.2907, \nu(X_3) = 0.4331, \nu(X_4) =$$

0.57,  $\nu(X_5) = 0.6732$ ,  $\nu(X_6) =$   
0.7807,  $\nu(X_7) = 0.8882$ .

Chương trình được thực hiện trên ngôn ngữ lập trình Python như sau: import numpy as np

```
Dmin = 13055
Dmax = 19337
DL = 13000
DR = 20000
# Chọn các giá trị ngôn ngữ
X1 = "Very Small"
X2 = "Small"
X3 = "Rather Small"
X4 = "Middle"
X5 = "Rather Large"
X6 = "Large"
X7 = "Very Large"
# Chọn các tham số mờ
theta = 0.57
alpha = 0.49
import numpy as np
# Định nghĩa các hằng số
C_NEG = "c-"
C_POS = "c+"
ZERO = 0
ONE = 1
# Định nghĩa các hàm tính toán
def fuzzy_measure(x, theta, alpha, beta):
    if x == C_NEG:
        return theta
    elif x == C_POS:
        return 1 - beta
    else:
        return semantic_quantification(x,
theta, alpha, beta)
    def semantic_quantification(x, theta,
alpha, beta):
        x_level = len(x) - 1
        sign = -1 if x[0] == "h-" else 1
        # Tính các hệ số tổng
        if sign == -1:
            alpha_sum = alpha**x_level
        else:
            alpha_sum = 0
```

```
if sign == 1:
    beta_sum = beta**x_level
else:
    beta_sum = 0
# Xác định hệ số omega
if sign == -1:
    omega = alpha
else:
    omega = beta
return (theta + sign * (alpha_sum -
omega**x_level))
# Tính toán định lượng ngữ nghĩa các
từ bằng hàm fuzzy_measure
v1 = 0.1483
v2 = 0.2907
v3 = 0.4331
v4 = theta
v5 = 0.6732
v6 = 0.7807
v7 = 0.8882
# Ảnh xạ các từ vào không gian vũ trụ
diễn ngôn
semantic_points = [DL + (DR-DL)*v
for v in [v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7]]
# Hàm ngữ nghĩa hóa dữ liệu
def linguisticize(data):
    return min(semantic_points,
key=lambda x:abs(x-data))
# Dữ liệu các năm
enrollments = [13055, 13563, 13867,
14696, 15460, 15311, 15603, 15861, 16807,
16919, 16388, 15433, 15497, 15145, 15163,
15984, 16859, 18150, 18970, 19328, 19337,
18876]
# Ngữ nghĩa hóa dữ liệu
linguistic_data = [linguisticize(d) for d
in enrollments]
# Xây dựng các quan hệ logic ngôn ngữ
LLRs = {}
for i in range(len(linguistic_data)-1):
    if linguistic_data[i] not in LLRs:
        LLRs[linguistic_data[i]] = []
        LLRs[linguistic_data[i]].append(lingu
istic_data[i+1])
# Hàm dự báo
```

```

def forecast(data, year):
    if data in LLRs and LLRs[data]:
        return sum(LLRs[data]) / len(LLRs[data])
    else:
        return data
# Dự báo cho các năm
predictions =
[forecast(linguistic_data[0], 0)]

```

Kết quả như sau:

**Bảng 1: So sánh kết quả dự báo tuyển sinh của Trường Đại học Alabama**

Năm	Số lượng thực tế	Phương pháp của Song et al.'s [13]	Phương pháp của Chen's [1]	Phương pháp đề xuất
1971	13.055			
1972	13.563	14.000	14.000	14.537
1973	13.867	14.000	14.000	14.537
1974	14.696	14.000	14.000	14.537
1975	15.460	15.500	15.500	15.534
1976	15.311	16.000	16.000	15.534
1977	15.603	16.000	16.000	15.534
1978	15.861	16.000	16.000	16.019
1979	16.807	16.000	16.000	16.019
1980	16.919	16.813	16.833	17.162
1981	16.388	16.813	16.833	17.162
1982	15.433	16.709	16.833	16.019
1983	15.497	16.000	16.000	15.534
1984	15.145	16.000	16.000	15.534
1985	15.163	16.000	16.000	15.534
1986	15.984	16.000	16.000	15.514
1987	16.859	16.000	16.000	16.019
1988	18.150	16.813	16.833	17.162
1989	18.970	19.000	19.000	19.217
1990	19.328	19.000	19.000	19.217
1991	19.337	19.000	19.000	19.217
1992	18.876	-	19.000	19.217
<b>MSE</b>		<b>412.499</b>	<b>407.507</b>	<b>262.326</b>

Độ đo MSE (sai số bình phương trung bình) được xác định như sau

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_i (F_i - A_i)^2$$

Trong đó  $F_i$  và  $A_i$  lần lượt là giá trị dự báo và giá trị thực tế của năm thứ  $i$  tương ứng,  $N$  là tổng số năm dự báo.

Như chúng ta có thể thấy trong Bảng 4, mô hình dự báo được đề xuất của chúng tôi có sai số bình phương trung bình (MSE) là 262.326 tốt hơn so với mô hình của Song và cộng sự và của Chen lần lượt là 412.499 và 407.507.

#### 4. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã đề xuất mô hình dự báo theo chuỗi thời gian mới ứng dụng Đại số gia tử. Trong mô hình này các từ ngữ được coi là một thành phần của đại số gia tử, mô tả miền từ tương ứng của các biến ngôn ngữ như các giá trị số. Đặc điểm nổi bật trong phương pháp này là việc thao tác trực tiếp trên các từ ngữ thay vì các tập mờ, còn các từ ngữ tương ứng của chúng chỉ là nhãn ngôn ngữ. Bởi vì đại số gia tử là mô hình toán học miền từ của các biến ngôn ngữ, tương tự mô hình miền giá trị số thực tương ứng, nên về mặt lý luận xử lý chuỗi thời gian ngôn ngữ có thể được phát triển dựa trên chủ nghĩa hình thức của đại số gia tử thay vì tập mờ mờ để xử lý dữ liệu không chắc chắn.

Hiệu quả của mô hình này có thể được cải thiện bằng cách xây dựng các phương pháp tính toán lai. Chúng ta cũng có thể áp dụng mô hình đề xuất cho các bộ dữ liệu khác để minh họa cho ưu điểm của phương pháp đề xuất.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Chen, S. M. (1996). Forecasting enrollments based on fuzzy time series. *Fuzzy Sets and systems*, 81 (3), 311-319.
2. Chen, S. M. (2002). Forecasting enrollments based on high-order fuzzy time series. *Cybernetics and Systems*, 33 (1), 1-16.
3. Chen, S. M., & Chung, N. Y. (2006). Forecasting enrollments using high-order fuzzy time series and genetic algorithms. *International Journal of intelligent systems*, 21(5), 485-501.
4. Chen, S. M., Wang, N. Y., & Pan, J. S. (2009). Forecasting enrollments using automatic

clustering techniques and fuzzy logical relationships. *Expert Systems with Applications*, 36(8), 11070-11076.

5. Ho, N. C., & Long, N. V. (2007). Fuzziness measure on complete hedge algebras and quantifying semantics of terms in linear hedge algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, 158 (4), 452-471.

6. Ho, N. C. & Wechler, W. (1990). Hedge Algebras: An algebraic approach to structure of sets of linguistic truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 35, 281-293.

7. Ho, N. C., Son, T. T. & and Phong, P. D. (2014). Modeling of a semantics core of linguistic terms based on an extension of hedge algebra semantics and its application. *Knowledge-Based Systems*, 67, 244-262.

8. Huang, H., Tian, Y., & Tao, Z. (2024). Multi-rule combination prediction of compositional data time series based on multivariate fuzzy time series model and its application. *Expert Systems with Applications*, 238, 121966.

9. Hwang, J. R., Chen, S. M. & Lee, C. H. (1998). Handling forecasting problems using fuzzy time series. *Fuzzy Sets Systems*, 100, 217-228.

10. Orang, O., de Lima e Silva, P. C., & Guimarães, F. G. (2023). Time series forecasting using fuzzy cognitive maps: a survey. *Artificial Intelligence Review*, 56(8), 7733-7794.

11. Yang, X., Yu, F., Pedrycz, W., & Li, Z. (2023). Clustering time series under trend-oriented fuzzy information granulation. *Applied Soft Computing*, 141, 110284.

12. Singh, P. (2017). A brief review of modeling approaches based on fuzzy time series. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 8, 397-420.

13. Song, Q. & Chissom, B. S. (1993). Fuzzy time series and its models. *Fuzzy Sets Systems*, 54, 269-277.

14. Song, Q. & Chissom, B. S. (1993). Forecasting enrollments with fuzzy time series - part 1. *Fuzzy Sets Systems*, 54, 1-9.

15. Song, Q. & Chissom, B. S. (1994). Forecasting enrollments with fuzzy time series - part 2. *Fuzzy Sets Systems*, 62, 1-8.

16. Sullivan, J. & Woodall, H. W. (1994). A comparison of fuzzy forecasting and Markov modeling. *Fuzzy Sets Systems*, 64, 279-293.