ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI TRONG GIẢM RUNG ĐỘNG CƠ HỌC

Vũ Thị Mai[1], Phạm Tuấn Huy[2], Nguyễn Trang Nhung[3], Phạm Ngọc Khoa[4], Vũ Thị Hà[5]

[1,2,3]Khoa Toán và KHTN

[4]Trường THPT Lê Hồng Phong, Hải Phòng

[5]Trường THCS Bát Trang, An Lão, Hải Phòng

[1]Email: maivt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 30/10/2024

Ngày PB đánh giá: 29/11/2024

Ngày duyệt đăng: 13/01/2025

Tóm tắt: Phương trình vi phân cấp 2 đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, bao gồm cơ học, điện tử và y tế. Chúng được sử dụng để mô hình hóa các hệ thống dao động như con lắc, hệ thống lò xo-khối lượng, và mạch điện. Bài báo tập trung vào việc nghiên cứu ứng dụng cụ thể của phương trình vi phân cấp 2 trong việc kiểm soát và giảm thiểu rung động. Mục tiêu của nghiên cứu là không chỉ tìm hiểu lý thuyết mà còn ứng dụng vào các bài toán thực tiễn trong kỹ thuật.

Từ khóa: Phương trình vi phân cấp 2, ứng dụng của phương trình vi phân.

APPLICATIONS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN REDUCING MECHANICAL VIBRATION

Abstract: Second-order differential equations play an important role in many fields of science and engineering, including mechanics, electronics, and medicine. They are used to model oscillating systems such as pendulums, spring-mass systems, and electrical circuits. The article focuses on researching specific applications of second-order differential equations in controlling and minimizing vibration. The goal of the research is not only to learn about the theory but also to apply it into practical engineering problems.

Key words: Second-order differential equations, applications of differential equations.

1. GIỚI THIỆU

Với sự ra đời của ngành Giải tích toán học, đặc biệt là giải tích hàm thì những bài toán trong thực tế cuộc sống, vật lý, khoa học, kĩ thuật được giải quyết nhanh gọn và chính xác. Ngành Giải tích toán học nghiên cứu nhiều lĩnh vực như các lớp hàm liên tục, khả vi, khả tích, phương trình vi phân. Mỗi lĩnh vực đều có tầm quan trọng riêng trong việc nghiên cứu và ứng dụng. Trong đó phương trình vi phân là một phần cơ bản của giải tích. Phương trình vi phân xuất hiện trên cơ sở phát triển của khoa học, kỹ thuật và những yêu cầu đòi hỏi của thực tế, nó là một bộ môn toán học cơ bản vừa mang tính lý thuyết cao vừa mang tính ứng dụng rộng. Nhiều bài toán cơ học, vật lý dẫn đến sự nghiên cứu các phương trình vi phân tương ứng. Ngành toán học này đã góp phần xây dựng lý thuyết chung cho các ngành toán học và khoa học khác, chính vì vậy việc nghiên cứu phương trình vi phân đóng một vai trò quan trọng trong toán học. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu, phát triển mô hình toán học: Nghiên cứu phương pháp điều khiển và giảm thiểu rung động.

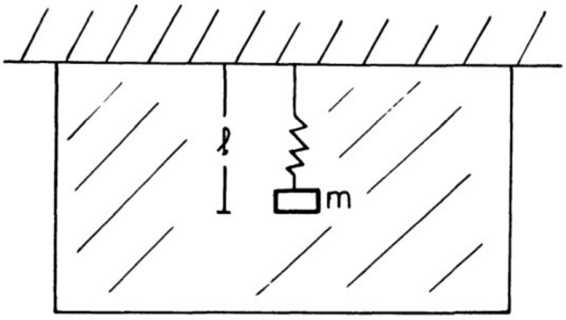
2. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

Sự phát triển nhanh chóng của lý thuyết phương trình vi phân và những ứng dụng của chúng trong nhiều ngành khoa học đã và đang thu hút sự quan tâm nghiên cứu của các chuyên gia và người học trong các lĩnh vực đa ngành. Điều này đã đặt lý thuyết phương trình vi phân ở vị trí đặc biệt trong toán học và khoa học ứng dụng. Ngày nay, lý thuyết này được dạy ở nhiều cấp độ khác nhau trong hầu hết các trường đại học và viện nghiên cứu trên thế giới [2], [3], [4]. Tại Việt Nam, việc nghiên cứu phương trình vi phân cấp 2 đã được nhiều nhà toán học và kỹ sư quan tâm, đặc biệt trong các lĩnh vực kỹ thuật cơ khí và xây dựng. Theo các nghiên cứu trong nước, phương trình vi phân cấp 2 đã được sử dụng để giải quyết các vấn đề về kết cấu công trình và dao động trong các hệ thống kỹ thuật.

3. RUNG ĐỘNG CƠ HỌC

Để phân tích các hiện tượng rung động, cần phải biểu diễn các chuyển động sao cho các đặc điểm của rung động có thể được xác định là ngẫu nhiên. Biểu diễn đơn giản nhất được thực hiện bằng cách lý tưởng hóa các chuyển động rung động của nó như một khối lượng chuyển động được hỗ trợ bởi một lò xo và một bộ giảm xóc.

Xét trường hợp một vật nhỏ có khối lượng m được gắn vào một lò xo đàn hồi có chiều dài l, được treo trên một giá đỡ nằm ngang cứng (xem Hình 1). (Lò xo đàn hồi có đặc tính là nếu nó bị kéo căng hoặc nén một khoảng cách Δl nhỏ so với chiều dài tự nhiên l của nó, thì nó sẽ tác dụng một lực phục hồi có độ lớn $k\Delta l$. Hằng số k được gọi là hằng số lò xo và là thước đo độ cứng của lò xo.) Ngoài ra, khối lượng và lò xo có thể được nhúng trong một môi trường, chẳng hạn như dầu, cản trở chuyển động của một vật qua nó. Các kỹ sư thường gọi các hệ thống như vậy là hệ thống lò xo-khối lượng-bộ giảm xóc hoặc là dụng cụ đo địa chấn, vì về nguyên tắc, chúng tương tự như máy đo địa chấn được sử dụng để phát hiện chuyển động của bề mặt trái đất.



Hình 1

Hệ thống lò xo-khối lượng-bộ giảm xóc có nhiều ứng dụng đa dạng. Ví dụ, bộ giảm xóc trong ô tô của chúng ta là hệ thống lò xo-khối lượng-tấm đệm đơn giản. Ngoài ra, hầu hết các vị trí đặt súng hạng nặng đều được gắn vào các hệ thống như vậy để giảm thiểu hiệu ứng "giật lùi" của súng. Tính hữu ích của các thiết bị này sẽ trở nên rõ ràng sau khi chúng ta thiết lập và giải phương trình chuyển động vi phân của khối lượng m.

Khi tính toán chuyển động của khối lượng m, sẽ thuận tiện hơn cho chúng ta khi đo khoảng cách từ vị trí cân bằng của khối lượng, thay vì điểm tựa nằm ngang. Vị trí cân bằng của khối lượng là điểm mà khối lượng sẽ treo ở trạng thái nghỉ nếu không có lực bên ngoài tác dụng vào nó. Ở trạng thái cân bằng, trọng lượng mg của khối lượng được cân bằng chính xác bởi lực phục hồi của lò xo. Do đó, ở vị trí cân bằng của nó, lò xo đã bị kéo giãn một khoảng cách Δl, trong đó $k\Delta l = mg$. Chúng ta để $y = 0$ biểu thị vị trí cân bằng này và chúng ta coi hướng xuống là dương. Giả sử $y(t)$ biểu thị vị trí của khối lượng tại thời điểm t. Để tìm $y(t)$, chúng ta phải tính tổng lực tác dụng lên khối lượng m. Lực này là tổng của bốn lực riêng biệt W, R, D và F.

(i) Lực $W = mg$ là trọng lượng của khối lượng kéo nó xuống dưới. Lực này là lực dương, vì hướng xuống dưới là hướng y dương.

(ii) Lực R là lực phục hồi của lò xo, và nó tỷ lệ với độ giãn dài, hoặc độ nén, $\Delta l + y$ của lò xo. Nó luôn hoạt động để phục hồi lò xo về chiều dài tự nhiên của nó. Nếu $\Delta l + y > 0$, thì R âm, do đó $R = -k(\Delta l + y)$, và nếu $\Delta l + y < 0$, thì R dương, do đó $R = -k(\Delta l + y)$. Trong cả hai trường hợp,

$$R = -k(\Delta l + y)$$

(iii) Lực D là lực cản, hay lực cản trở, mà môi trường tác dụng lên khối lượng m. (Hầu hết các môi trường như dầu và không khí có xu hướng cản trở chuyển động của một vật thể đi qua nó). Lực này luôn tác dụng theo hướng ngược với hướng chuyển động và thường tỷ lệ thuận với độ lớn của vận tốc $\frac{dy}{dt}$. Nếu vận tốc dương; tức là khối lượng đang chuyển động theo hướng xuống dưới, thì $D = -c\frac{dy}{dt}$, và nếu vận tốc âm, thì $D = -c\frac{dy}{dt}$. Trong cả hai trường hợp,

$$D = -c\frac{dy}{dt}$$

(iv) Lực F là lực bên ngoài tác dụng vào khối lượng. Lực này hướng lên trên hoặc xuống dưới, tùy thuộc vào việc F

dương hay âm. Nhìn chung, lực bên ngoài này sẽ phụ thuộc rõ ràng vào thời gian.

Theo định luật chuyển động thứ hai của Newton

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = W + R + D + F$$

$$= mg - k(\Delta l + y) - c\frac{dy}{dt} + F(t)$$

$$= -ky - c\frac{dy}{dt} + F(t)$$

Vì $mg = k\Delta l$. Do đó, nghiệm $y(t)$ của khối lượng thỏa mãn phương trình vi phân tuyến tính bậc hai

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F \quad (1)$$

trong đó m, c và k là các hằng số không âm. Ở đây chúng ta áp dụng hệ thống mks của các đơn vị để F được đo bằng Newton, y được đo bằng mét và t được đo bằng giây. Trong trường hợp này, đơn vị của k là N/m, đơn vị của c là $N.s/m$, và đơn vị của m là kilôgam $\left(N.\frac{s}{m}\right)$.

Sau khi đưa về phương trình vi phân bậc hai, giải phương trình thuần nhất và tìm nghiệm riêng. Giải phương trình thuần nhất biểu diễn chuyển động dao động tự do và tìm nghiệm riêng tương ứng với dao động cưỡng bức của khối lượng.

(a) *Dao động tự do*

Đầu tiên chúng ta xem xét trường hợp đơn giản nhất của chuyển động tự do không bị cản trở. Trong trường hợp này, phương trình (1) được rút gọn thành

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

hoặc $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$ (2)

trong đó $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Giải phương trình (2) ta được nghiệm là

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t \quad (3)$$

Để phân tích nghiệm (3), ta dễ dàng viết lại nó thành một hàm cosin đơn giản. Điều này được thực hiện bằng cách sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề 1. *Bất kỳ hàm* $y(t)$ *nào có dạng (3) đều có thể được viết ở dạng đơn giản hơn*

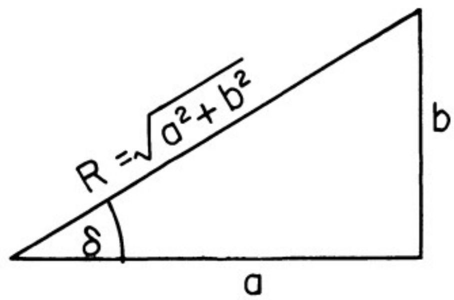
$y(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$ (4) trong đó $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ và $\delta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng hai biểu thức (3) và (4) bằng nhau. Để thực hiện làm được điều này, tính

$$R\cos(\omega_0 t - \delta) = R\cos\omega_0 t\cos\delta + R\sin\omega_0 t\sin\delta$$

Và quan sát từ Hình 2, thấy rằng $R\cos\delta = a$ và $R\sin\delta = b$. Do đó,

$$R\cos(\omega_0 t - \delta) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$$



Hình 2

Trong Hình 3, chúng ta đã vẽ đồ thị hàm số $y = R\cos(\omega_0 t - \delta)$. Lưu ý rằng $y(t)$ luôn nằm giữa $-R$ và $+R$, và chuyển động của khối lượng là tuần hoàn, nó lặp lại trong mọi khoảng thời gian có độ dài $2\pi/\omega_0$. Loại chuyển động này được gọi là chuyển động điều hòa đơn giản; R được gọi là biên độ chuyển động, δ là góc pha của chuyển động, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ là chu kỳ tự nhiên của chuyển động, và $\omega_0 = \sqrt{k}/m$ là tần số tự nhiên của hệ thống.

(b) *Dao động tự do bị tắt dần:*

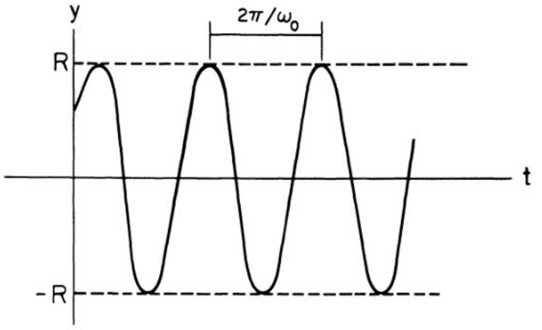
Nếu bây giờ chúng ta bao gồm hiệu ứng tắt dần, thì phương trình vi phân chi phối chuyển động của khối lượng là

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (5)$$

Xét phương trình đặc trưng của phương trình (5): $mr^2 + cr + k = 0$, phương trình này có nghiệm là

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

và $r_2 = \dfrac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$



Hình 3

Vì vậy, có ba trường hợp cần xem xét, tùy thuộc vào việc $c^2 - 4km$ là dương, âm và bằng không

Định lý 1.

i, Nếu $c^2 - 4km > 0$ thì mọi nghiệm $y(t)$ của (5) đều có dạng

$$y(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}$$

ii, Nếu $c^2 - 4km = 0$ thì mọi nghiệm $y(t)$ của (5) đều có dạng

$$y(t) = (a + bt)e^{-ct/2m}$$

iii, Nếu $c^2 - 4km < 0$ thì mọi nghiệm $y(t)$ của (5) đều có dạng

$$y(t) = e^{-\frac{ct}{2m}}[\text{a}\cos\mu t + b\sin\mu t], \mu = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}$$

Hai trường hợp đầu tiên được gọi tương ứng là quá giảm chấn và giảm chấn tới hạn. Chúng biểu diễn các chuyển động trong đó khối lượng ban đầu bị dịch chuyển dần trở lại vị trí cân bằng của nó. Tùy thuộc vào các điều kiện ban đầu, có thể vượt quá vị trí cân bằng một lần, nhưng không quá một lần. Trường hợp thứ ba, được gọi là chuyển động giảm chấn dưới mức, xảy ra khá thường xuyên trong các hệ thống cơ học và biểu diễn một dao động giảm chấn. Để thấy điều này, chúng ta sử dụng Bổ đề 1 để viết lại hàm

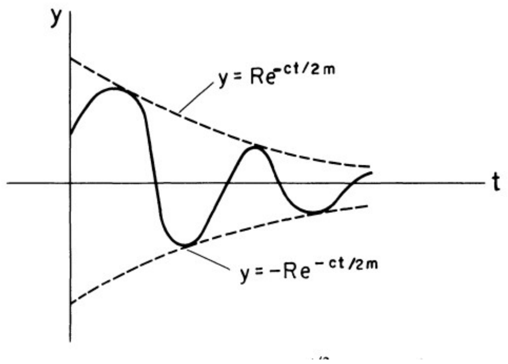
$$y(t) = e^{-ct/2m}[\text{a}\cos\mu t + b\sin\mu t]$$

thành dạng

$$y(t) = Re^{-ct/2m}\cos(\mu t - \delta)$$

Độ dịch chuyển y dao động giữa các đường cong $y = \pm Re^{-ct/2m}$, và do đó biểu diễn đường cong $cosin$ có biên độ giảm dần, như thể hiện trong Hình 4.

Bây giờ, hãy quan sát rằng chuyển động của khối lượng cuối cùng luôn luôn tắt hẳn nếu có sự giảm chấn trong hệ thống. Nói cách khác, bất kỳ sự nhiễu loạn ban đầu nào của hệ thống bị tiêu tán bởi lực giảm chấn có trong hệ thống. Đây là một lý do tại sao hệ thống lò xo-khối lượng-bộ giảm xóc lại hữu ích trong các hệ thống cơ học: chúng có thể được sử dụng để làm giảm bất kỳ nhiễu loạn không mong muốn nào. Ví dụ, lực sốc truyền đến ô tô do va chạm trên đường được bộ giảm xóc trong xe tiêu tán, và động lượng từ lực giật của nòng súng được hệ thống lò xo-khối lượng-bộ giảm xóc gắn vào súng tiêu tán.



Hình 4. Đồ thị của $Re^{-ct/2m}\cos(\mu t - \delta)$

(c) *Dao động cưỡng bức tắt dần*

Nếu bây giờ chúng ta đưa vào một lực bên ngoài $F(t) = F_0 \cos \omega r$, thì phương trình vi phân chi phối chuyển động của khối lượng là

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t \quad (6)$$

Ta tìm nghiệm riêng của (6) có dạng: $\psi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

Từ đó

$$\psi'(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t;\ \psi''(t)$$
$$= -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

Thay $\psi(t); \psi'(t); \psi''(t)$ vào phương trình (6), sử dụng phương pháp đồng nhất hệ số ta được

$$A = \frac{(k-m\omega^2)F_0}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2};\ B = \frac{c\omega F_0}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình (6) là

$$\psi(t) = \frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}[(k-m\omega^2)\cos\omega t + c\omega\sin\omega t]$$
$$= \frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}[(k-m\omega^2) + c^2\omega^2]^{1/2}\cos(\omega t - \delta)$$
$$= \frac{F_0\cos(\omega t - \delta)}{[(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}}$$

(7)

Trong đó $\tan\delta = c\omega/(k - m\omega^2)$. Do đó, mọi nghiệm $y(t)$ của (6) phải có dạng

$$y(t) = \phi(t) + \psi(t) = \phi(t) + \frac{F_0\cos(\omega t - \delta)}{[(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}}$$

(8)

Trong đó $\phi(t)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (9)$$

Tuy nhiên, chúng ta đã thấy rằng mọi nghiệm $y = \phi(t)$ của (9) đều tiến tới 0 khi t tiến tới vô cực. Do đó, đối với t lớn, phương trình $y(t) = \psi(t)$ mô tả rất chính xác vị trí của khối lượng m, bất kể vị trí và vận tốc ban đầu của nó. Vì lý do này, $\psi(t)$ được gọi là phần trạng thái ổn định của nghiệm (8), trong khi $\phi(t)$ được gọi là phần chuyển tiếp của nghiệm.

(d) Dao động cưỡng bức tự do

Bây giờ chúng ta loại bỏ sự giảm chấn khỏi hệ thống của chúng ta và xem xét trường hợp các dao động tự do cưỡng bức trong đó thuật ngữ cưỡng bức là tuần hoàn và có dạng $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Trong trường hợp này, phương trình vi phân chi phối chuyển động của khối lượng *m* là

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0{}^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

$$\omega_0{}^2 = k / m \quad (10)$$

Trường hợp $\omega \neq \omega_0$; mọi nghiệm $y(t)$ của (10) đều có dạng

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0{}^2 - \omega^2)} \cos \omega t,$$ và do đó là tổng của hai hàm tuần hoàn của các chu kỳ khác nhau. Trường hợp thú vị là khi $\omega = \omega_0$, nghĩa là khi tần số ω của lực bên ngoài bằng tần số riêng của hệ thống. Trường hợp này được gọi là trường hợp *cộng hưởng*, và phương trình vi phân chuyển động cho khối lượng *m* là

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0{}^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t \quad (11)$$

Ta sẽ tìm một nghiệm riêng $\psi(t)$ của (11) là phần thực của nghiệm có giá trị phức $\phi(t)$ của phương trình

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0{}^2 y = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_0 t} \quad (12)$$

Vì $e^{i\omega_0 t}$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất $y'' + \omega_0{}^2 y = 0$, ta biết rằng (12) có một nghiệm riêng của $\phi(t) = Ate^{i\omega_0 t}$, đối với một hằng số *A*. Tính toán

$$\phi'' + \omega_0{}^2 \phi = 2i\omega_0 A e^{i\omega_0 t}$$

Chúng ta thấy rằng

$$A = \frac{1}{2i\omega_0} \frac{F_0}{2m\omega_0}$$

Từ đây,

$$\phi(t) = \frac{-iF_0 t}{2m\omega_0} (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t)$$

$$= \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t - i \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \cos \omega_0 t$$

Là nghiệm riêng của (12), và

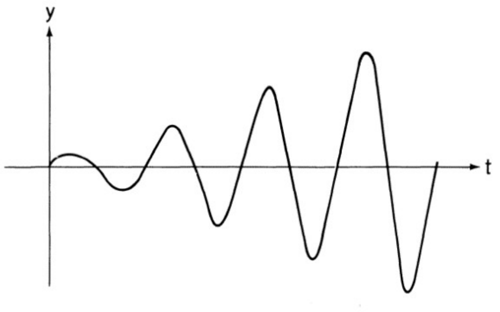
$$\psi(t) = \operatorname{Re} \phi(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Là nghiệm riêng của (11). Do đó, mọi nghiệm *y(t)* của (11) có dạng

$$y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$$

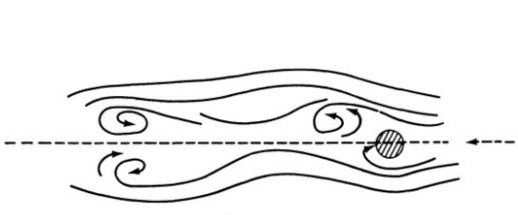
(13) đối với mỗi hằng số c_1, c_2 được lựa chọn.

Bây giờ, tổng của hai số hạng đầu tiên trong (13) là một hàm tuần hoàn theo thời gian. Tuy nhiên, số hạng thứ ba biểu diễn một dao động với biên độ tăng dần, như thể hiện trong Hình 5. Do đó, số hạng cưỡng bức $F_0 \cos \omega t$, nếu nó tương ứng với tần số tự nhiên của hệ thống, sẽ luôn gây ra dao động không giới hạn. Một hiện tượng như vậy là nguyên nhân gây ra sự sụp đổ của cầu treo Tacoma và nhiều thảm họa cơ học khác.



Hình 5. Đồ thị của $f(t) = At\sin\omega_0 t$

Nếu có vật cản trong luồng không khí hoặc chất lỏng, thì một "con đường xoáy" được hình thành phía sau chướng ngại vật, với các xoáy nước chảy tắt theo một chu kỳ nhất định, phụ thuộc vào hình dạng và kích thước của cấu trúc cũng như vận tốc của dòng chảy (Hình 6). Như một kết quả của các dòng xoáy tách ra luân phiên từ hai bên của chướng ngại vật, nó bị tác động bởi một lực tuần hoàn vuông góc với hướng của dòng, và có độ lớn $F_0 \cos\omega t$. Hệ số F_0 phụ thuộc vào hình dạng của cấu trúc. Sự sắp xếp hợp lý của cấu trúc càng kém; hệ số F_0 càng lớn, và do đó biên độ của lực càng lớn.



Hình 6

Cấu trúc cầu treo kém hợp lý là một vấn đề khác và thật tự nhiên khi mong đợi một lực có biên độ liên sẽ được thiết lập. Do đó, một cấu trúc treo trong luồng không khí chịu tác động của lực này và do đó chuyển sang trạng thái rung động cưỡng bức. Mức độ nguy hiểm từ loại chuyển động này phụ thuộc vào mức độ gần giữa tần số tự nhiên của cấu trúc (hãy nhớ rằng cầu được làm bằng thép, một vật liệu có tính đàn hồi cao) với tần số của lực truyền động. Nếu hai tần số giống nhau, cộng hưởng sẽ xảy ra và dao động sẽ có tính phá hủy nếu hệ thống không có đủ lực giảm chấn. Hiện nay, người ta đã xác định rằng dao động loại này là nguyên nhân gây ra sự sụp đổ của cầu treo Tacoma.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã áp dụng phương trình vi phân cấp hai vào giải quyết các bài toán vật lý. Các kết đó đã được ứng dụng cho việc cải thiện hiệu suất và độ bền của các hệ thống cơ khí bằng các công nghệ mới nhằm giảm rung động không mong muốn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu (2000), Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định, NXB Giáo dục.

2. James C. Robinson (2004), An introduction to Ordinary Differential Equations*, CUP, Cambrige.*

3. Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan (2008), An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Springer, NY.*

4. Walter G. Kelley, Allan C. Peterson (2010), The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative, *2nd, Springer, NY.*