BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA TẤM DỊ HƯỚNG

Vũ Tiến Đức
Khoa Toán và KHTN
Email: ducvt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 08/11/2024
Ngày PB đánh giá: 04/12/2024
Ngày duyệt đăng: 13/01/2025

Tóm tắt: Dựa trên việc nghiên cứu sự phụ thuộc giữa ứng suất và biến dạng cũng như mối liên hệ giữa các moment và ứng suất của vật liệu dị hướng, ta đi xây dựng phương trình vi phân của một tấm trực hướng bị uốn dưới tác động của các ứng lực phức tạp bao gồm cả các ứng suất phân phối dọc theo các cạnh cũng như tải trọng tập trung lên mặt phẳng của tấm. Bài báo cũng nghiên cứu các điều kiện biên đối với các cạnh của tấm trong các điều kiện chịu liên kết khác nhau, từ đó đề xuất các giải pháp liên quan đến bài toán ổn định của các tấm trực hướng. Nghiên cứu này cũng đưa ra lời giải chi tiết đối với trường hợp tấm chịu liên kết bản lề dưới tác động của ứng lực nén dọc theo hai cạnh. Đồng thời, ta cũng đi xác định giá trị tới hạn của ứng lực tác dụng lên tấm trực hình chữ nhật, và nó phù hợp với các kết quả đã được công bố đối với vật liệu đẳng hướng.

Từ khóa: Vật liệu dị hướng, vật liệu trực hướng, tải trọng tới hạn, chu tuyến, phương trình vi phân, liên kết bản lề.

THE PROBLEM OF STABILITY ANALYSIS FOR ANISOTROPIC PLATES

Abstract: Based on the study of the dependence between stress and deformation as well as the relationship between moments and stresses of anisotropic materials, the differential equation of an orthotropic plate bending under the influence of complex stresses is considered. In the paper, the author also studies the boundary conditions for the edges of the plate under different connection conditions, since then, the solutions related to the stability problem of orthotropic plates are proposed. This study also gives a detailed solution for the case of a plate subjected to hinge connections under the impact of compressive stress along two edges. The critical value of the stress acting on a rectangular orthotropic plate is determined, which is consistent with published results for isotropic materials.

Key words: Anisotropic materials, orthotropic materials, critical load, circumferential, differential equations, hinge connections.

1. GIỚI THIỆU

Trong kỹ thuật cơ khí hiện đại như đóng tàu, sản xuất máy bay, công nghệ vũ trụ…, vật liệu dị hướng ở dạng tấm được sử dụng rộng rãi, đặc biệt là các tấm composit trực hướng, có ba mặt phẳng đối xứng. Trong những điều kiện nhất định, hoạt động của các kết cấu cơ khí đi kèm với sự xuất hiện ứng suất nén ở bề mặt giữa của các tấm có trong kết cấu, có thể dẫn đến sự mất ổn định và khả năng chịu tải của chúng. Vì vậy, mục tiêu của nghiên cứu này là xây dựng công thức để xác định giá trị của tải trọng tới hạn tác động lên các tấm làm bằng vật liệu nói trên.

2. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

Cho đến nay, việc nghiên cứu sự ổn định trên các tấm đẳng hướng có dạng hình chữ nhật đã được thực hiện tương đối đầy đủ bởi các nhà khoa học lớn trên thế giới với nhiều phương pháp khác nhau. Những nghiên cứu sâu rộng nhất có thể kể đến các tác phẩm của Timoshenko S.P [6] và Alfutov N.A [1].

Việc xác định ứng suất tới hạn đối với các tấm làm từ vật liệu dị hướng gặp nhiều khó khăn do số lượng các tham số của mỗi vật liệu dạng này là khá lớn (đối với vật liệu trực hướng và đối với vật liệu dị hướng tổng quát). Do đó, những nghiên cứu đối với loại vật liệu này nhìn chung chưa được quan tâm đúng mức. Việc đưa ra biểu thức toán học để tính toán gần như chưa đạt được. Một số nghiên cứu được thực hiện của tác giả Nguyễn Sỹ Toàn [4] chỉ đưa ra kết quả dạng bảng cho vật liệu sợi Carbon và thuỷ tinh hữu cơ.

Phân tích tài liệu [3, 6] cho thấy Định luật Hooke cho tấm trực hướng được viết dưới dạng**:**

$$\begin{cases} \sigma_x = E_x^{'}\varepsilon_x + E^{''}\varepsilon_y \\ \sigma_y = E^{''}\varepsilon_x + E_y^{'}\varepsilon_y \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $E_x^{'}$ – môđun đàn hồi theo phương x, $E_y^{'}$ – môđun đàn hồi theo phương y, $E^{''}$ – hằng số đàn hồi liên kết hai phương x và y trong mặt phẳng tọa độ, G –môđun cắt của vật liệu trực hướng.

Các moment uốn và moment xoắn được xác định bởi:

$$\begin{cases} M_x = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x.zdz \\ M_y = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y.zdz \\ M_{xy} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}.zdz \end{cases} \quad (2)$$

Đối với một tấm làm bằng vật liệu như vậy, ta giả sử rằng các phần tử tuyến tính vuông góc với bề mặt giữa của tấm vẫn vuông góc với bề mặt này sau khi bị uốn. Trên cơ sở đó, chúng ta có thể biểu diễn các thành phần của tensor biến dạng như sau :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = -z\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = 2z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

trong đó w – hàm thể hiện độ võng của tấm. Thay vào (1) ta xác định được các thành phần ứng suất tương ứng [5, 6] :

$$\begin{cases} \sigma_x = -z\left(E_x^{'}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E^{"}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -z\left(E^{"}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_x^{'}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \tau_{xy} = 2zG\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (3)$$

Thay thế các thành phần ứng suất trong (3) vào các biểu thức moment tương ứng trong (2) ta được :

$$\begin{cases} M_x = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -z^2\left(E_x^{'}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E^{"}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)dz \\ \qquad = -\left(D_x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -z^2\left(E^{"}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_x^{'}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)dz \\ \qquad = -\left(D\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2z^2 G\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}dz \\ \qquad = 2D_{xy}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (4)$$

trong đó: $D_x = \dfrac{E_x^{'}h^3}{12}$; $D_y = \dfrac{E_y^{'}h^3}{12}$;

$D = \dfrac{E^{"}h^3}{12}$; $D_{xy} = \dfrac{Gh^3}{12}$; $D_x = \dfrac{E_x^{'}h^3}{12}$;

h – chiều dầy của tấm.

Phương trình vi phân cho sự uốn phức tạp của một tấm trực hướng dưới tác động của các ứng lực lên bề mặt giữa và lực tác động theo phương nằm ngang sẽ được viết dưới dạng sau:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} =$$

$$p + N_x\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

trong đó: N_x, N_y, N_{xy} – các ứng lực tác dụng lên bề mặt trung bình theo các phương tương ứng; p – tải nằm ngang.

Kết hợp (4) và (5) ta được:

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} =$$

$$p + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

trong đó $H = D + 2D_{xy}$

Bài toán ổn định của tấm được quy về việc tính toán tải trọng tới hạn trong từng trường hợp cụ thể, phụ thuộc vào nhiều yếu tố như các hằng số đặc trưng cho vật liệu của tấm, các điều kiện biên khác nhau khi tấm ở các trạng thái liên kết khác nhau.

3. CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Xét một tấm ở dạng hình chữ nhật, các cạnh của nó có thể chịu các liên kết khác nhau, theo đó điều kiện biên đối với hàm thể hiện độ võng cũng khác nhau. Cụ thể:

3.1. Cạnh chịu liên kết bản lề

Nếu một cạnh của tấm chịu liên kết bản lề thì độ võng dọc theo cạnh đó phải bằng không. Đồng thời, cạnh này có thể xoay tự do, tức là sẽ không có moment uốn dọc theo cạnh này. Nếu cho rằng cạnh đó trùng với trục Ox thì ta có điều kiện:

$$\begin{cases} \left(w\right)_{y=0} = 0 \\ \left(\nu_{12}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

3.2. Cạnh chịu liên kết ngàm

Nếu một cạnh nào đó của tấm bị ngàm chặt thì độ võng dọc theo nó bằng không và mặt phẳng tiếp tuyến với bề mặt võng dọc theo cạnh này trùng với vị trí ban đầu của mặt phẳng giữa của tấm. Nếu ta lấy các trục tọa độ theo hai cạnh của tấm, trong đó cạnh bị ngàm trùng với trục Ox thì:

$$\begin{cases} \left(w\right)_{y=0} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

3.3. Cạnh tự do

Nếu một cạnh của tấm hoàn toàn tự do, thì có thể khẳng định rằng sẽ không có moment uốn hoặc xoắn dọc theo nó, và cũng không có lực cắt dọc theo cạnh đó. Tức là nếu ta đặt tấm vào hệ trục tọa độ Oxy sao cho cạnh tự do này trùng với trục Ox thì ta có thể biểu diễn điều kiện biên tương ứng như sau:

$$\begin{cases} \left(M_x\right)_{y=0} = 0 \\ \left(M_{xy}\right)_{y=o} = 0 \\ \left(N_x\right)_{y=0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(M_x\right)_{y=0} = 0 \\ \left(P_x - \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{yx}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0 \\ \left(D_x\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(D + 4D_{xy}\right)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

trong đó ν_{yx} là hệ số Poisson, đặc trưng cho sự co lại theo hướng của trục x và kéo dài theo hướng của trục y.

Việc xác định các điều kiện biên cho các cạnh còn lại của tấm được thực hiện theo cách hoàn toàn tương tự.

4. Tính toán tải trọng tới hạn đối với tấm chịu liên kết bản lề

Để giải phương trình vi phân (6) trong trường hợp tấm chịu liên kết bản lề dọc theo chu tuyến, ta sử dụng chuỗi lượng giác kép. Theo đó, ta giả sử tải nằm ngang có dạng:

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

Hàm thể hiện độ võng của tấm được xác định tương tự:

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (11)$$

Trong các công thức (10) và (11), a và b lần lượt là chiều dài các cạnh của tấm hình chữ nhật tương ứng với các cạnh được gắn vào trục Ox và Oy của mặt phẳng toạ độ.

Có thể dễ dàng kiểm tra hàm thể hiện độ võng (11) thỏa mãn các điều kiện biên (7) của tấm chịu liên kết bản lề theo cả bốn cạnh. Tức là:

$$\begin{cases} (w)_{y=0}=(w)_{y=b} \\ =(w)_{x=0}=(w)_{x=a}=0 \\ \left(\nu_{xy}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} \\ =\left(\nu_{xy}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b}=0 \\ \left(\nu_{xy}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} \\ =\left(\nu_{xy}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a}=0 \end{cases}$$

trong đó ν_{xy} là hệ số Poisson, đặc trưng cho sự co lại theo hướng của trục y và kéo dài theo hướng của trục x.

Sau khi thay các chuỗi (10) và (11) vào phương trình vi phân (6) với giả thiết rằng $N_{xy}=0$ ta có:

$$b_{mn}\left[\begin{array}{l} D_x\dfrac{m^4\pi^4}{a^4}+2H\dfrac{m^2\pi^2}{a^2}\dfrac{n^2\pi^2}{b^2}+ \\ D_y\dfrac{n^4\pi^4}{b^4}+N_x\dfrac{m^2\pi^2}{a^2}+N_y\dfrac{n^2\pi^2}{b^2} \end{array}\right] = a_{mn} \quad (12)$$

Trong trường hợp không có tải nằm ngang, tức là $p(x,y)=0$ hay hệ số $a_{mn}=0$. Sự mất ổn định của tấm sẽ tương ứng với vế phải của biểu thức (12) bằng không. Tức là:

$$D_x\frac{m^4\pi^4}{a^4}+2H\frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{n^2\pi^2}{b^2} +D_y\frac{n^4\pi^4}{b^4}+N_x\frac{m^2\pi^2}{a^2}+N_y\frac{n^2\pi^2}{b^2}=0 \quad (13)$$

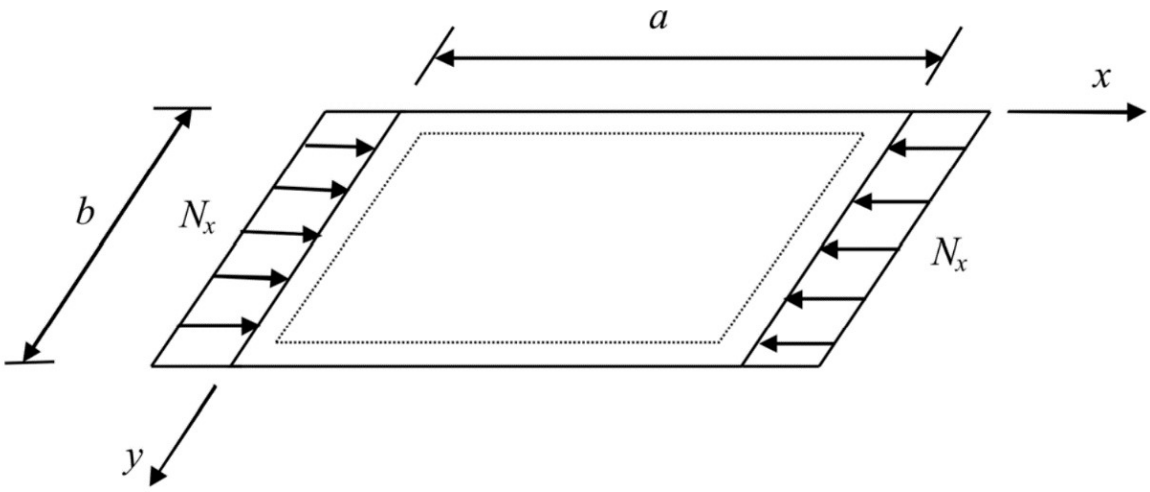
Phương trình (13) có thể được sử dụng để xác định tải trọng tới hạn trong nhiều trường hợp tải khác nhau như:

1) Chỉ nén (hoặc kéo) tấm bởi ứng lực N_x;

2) Tấm bị nén (hoặc kéo) bởi cặp ứng lực N_x và N_y;

3) Tấm bị nén với ứng lực N_x đồng thời bị kéo bởi ứng lực N_y hoặc ngược lại.

Trường hợp chịu tải đầu tiên là một ví dụ phổ biến thường gặp trong thực tế, theo đó một tấm trực hướng chịu liên kết bản lề dọc theo cả bốn cạnh của nó, bị nén bởi ứng lực theo hai cạnh đối diện. Tức là chỉ có ứng lực nén N_x tác dụng lên bề mặt trung bình của tấm như trong hình 1.



Hình 1. Sơ đồ tải của tấm bị nén theo hai cạnh đối diện

Trong trường hợp này, biểu thức (13) có dạng:

$$D_x \frac{m^4\pi^4}{a^4} + 2H \frac{m^2\pi^2}{a^2}\frac{n^2\pi^2}{b^2} + D_y \frac{n^4\pi^4}{b^4} - N_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} = 0 \quad (14)$$

Trong biểu thức (14), số hạng cuối cùng ở vế phải mang dấu âm vì đây là ứng lực nén, trong trường hợp ngược lại, nếu N_x là ứng lực kéo thì số hạng này sẽ mang dấu dương. Từ biểu thức này giá trị tới hạn của ứng lực N_x được xác định bởi công thức:

$$\left(N_x\right)_{th} = D_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} + 2H \frac{n^2\pi^2}{b^2} + D_y \frac{n^2\pi^4 a^2}{b^4 m^2} \quad (15)$$

Trong phương trình (15), m và n tương ứng với số nửa bụng sóng của sóng hình sin trong quá trình tấm mất ổn định theo hướng x và y tương ứng.

Điều cần quan tâm giá trị tối thiểu của tải trọng tới hạn, từ hệ thức (15) có thể thấy rằng ứng lực N_x đạt giá trị nhỏ nhất khi tấm bị biến dạng dọc theo một nửa sóng duy nhất theo hướng của trục Oy, tức là $n = 1$. Trong trường hợp này, phương trình (15) có thể viết ở dạng đơn giản hơn.

$$\left(N_x\right)_{th} = D_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} + 2H \frac{\pi^2}{b^2} + D_y \frac{\pi^2 a^2}{b^4 m^2} \quad (16)$$

Giá trị nhỏ nhất của lực tới hạn được xác định từ điều kiện bằng không của đạo hàm riêng theo m [2], tức là:

$$\frac{\partial\left(N_x\right)_{th}}{\partial m} = 0 \quad (17)$$

Theo đó, ta hãy lấy đạo theo m từ biểu thức (16):

$$\frac{\partial\left(N_x\right)_{th}}{\partial m} = 2\pi^2 \frac{D_y a^4 - D_x b^4 m^4}{a^2 b^2 m^3} \quad (18)$$

So sánh các biểu thức (17) và (18) ta được phương trình:

$$2\pi^2 \frac{D_y a^4 - D_x b^4 m^4}{a^2 b^2 m^3} = 0 \quad (19)$$

Sau khi biến đổi phương trình (19), ta xác định được giá trị của m tương ứng với giá trị nhỏ nhất của tải trọng tới hạn:

$$m = \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} . \frac{a}{b} \quad (20)$$

Sau khi thế giá trị biểu thức của m (20) vào hệ thức (16), ta thu được giá trị của tải trọng tới hạn tối thiểu:

$$\left(N_x\right)_{th} = 2\pi^2 \frac{H + \sqrt{D_x D_y}}{b^2} \quad (21)$$

Vật liệu đẳng hướng là trường hợp đặc biệt của vật liệu dị hướng, mà tại đó $D_x = D_y = H = D'$. Có thể thấy rằng kết quả thu được phù hợp với tải trọng tới hạn đối với tấm đẳng hướng khi bị nén theo một hướng [5, 6]:

$$\left(N_x\right)_{th} = 4\pi^2 \frac{D'}{b^2} \quad (22)$$

5. Kết luận

Từ kết quả nghiên cứu cho phép chúng ta rút ra được những kết luận sau:

- Xây dựng phương trình vi phân đối với các tấm trực hướng bị uốn bởi các ứng lực phức tạp bao gồm cả các ứng suất phân phối dọc theo các cạnh cũng như tải trọng tập trung lên mặt phẳng của tấm từ việc phát triển các mô hình.

- Nghiên cứu các điều kiện biên đối với các cạnh của tấm chịu các liên kết khác nhau.

- Thu được phương trình cơ bản giải quyết bài toán ổn định của tấm trực hướng trong các điều kiện chịu tải khác nhau.

- Đưa ra được công thức toán về giá trị tới hạn của ứng lực nén tác động lên một tấm trực hướng chịu liên kết bản lề dọc theo chu tuyến và nó phù hợp với các nghiên cứu trước đó đối với vật liệu đẳng hướng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Alfutov N.A. (1978), *Cơ sở tính toán ổn định cho hệ đàn hồi*, M.: Kỹ thuật cơ khí.

2. Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. (1986), *Sổ tay toán học dành cho kỹ sư và sinh viên đại học*, St.Petersburg: Nauka.

3. Lekhnitsky S.G. (1977), *Lý thuyết đàn hồi của vật dị hướng*, M.: Nauka.

4. Nguyễn Sỹ Toàn (2024), *Xác định ứng suất tới hạn của tấm trực hướng*, Khoa học tự nhiên và ứng dụng trong thời đại số, trang 72 - 79.

5. Sargsyan A.E. (2008), *Cơ học kết cấu, Cơ học kết cấu công trình*, Sách giáo trình cho các trường đại học, cao đẳng.

6. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. (1966), *Tấm và vỏ*, M.: Nauka.