

PHƯƠNG PHÁP CHIẾU DƯỚI ĐẠO HÀM VÀ KỸ THUẬT XẤP XỈ NHÓT GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HAI CẤP

Hồ Phi Tứ, Đỗ Thị Hoài
Khoa Toán và KHTN
Email: tuhp@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 13/1/2025

Ngày PB đánh giá: 20/1/2025

Ngày duyệt đăng: 24/01/2025

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một thuật toán khá đơn giản được thực hiện trong không gian Hilbert để giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, cụ thể là bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu trên tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân hỗn hợp. Phương pháp chúng tôi đề xuất là sự kết hợp giữa phương pháp chiếu và kỹ thuật xấp xỉ nhót. Đồng thời việc chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp cũng được chúng tôi thực hiện một cách chi tiết dưới các giả thiết thông thường. Thuật toán cũng có thể được áp dụng cho một số mô hình toán học với các ràng buộc bổ sung.

Từ khóa: Phương pháp chiếu dưới đạo hàm, kỹ thuật xấp xỉ nhót, bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp.

PROJECTED SUBGRADIENT METHOD AND TECHNIQUES APPROXIMATION VISCOSITY FOR SOLVING BI-LEVEL VARIATIONAL INEQUALITIES PROBLEM

Abstract: In this paper, we propose a fairly simple algorithm implemented in Hilbert spaces to solve some classical bi-level variational inequality problems especially the monotone variational inequality problem over the set of solutions of mixed variational inequalities. The proposed method combines two strategies: projected sub-gradient techniques and viscosity-type approximations. The involved step-sizes are controlled and a strong convergence theorem is established under very classical assumptions. The algorithm can be applied for instance to some mathematical programs with complementarity constraints.

Key words: Projected sub-gradient method, viscosity approximations techniques, mixed variational inequalities.

1. GIỚI THIỆU

Cho H là một không gian Hilbert thực, C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và F là một ánh xạ từ C vào H . Xét bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \quad (1)$$

Bài toán trên được gọi là bài toán bất đẳng thức biến phân, ký hiệu $VI(C, F)$, ánh xạ F được gọi là ánh xạ giá và tập C được gọi là tập ràng buộc. Bài toán này được giới thiệu lần đầu tiên bởi Stampacchia và cộng sự [3] vào năm 1966 cho tập ràng buộc C là một tập lồi (ở dạng tường minh). Tuy nhiên do yêu cầu của các ứng dụng thực tế như mô hình điều khiển công suất mạng CDMA, các bài toán về kinh tế, phân luồng mạng giao thông ... dẫn đến phải xét Bài toán (1) với tập ràng buộc C là một tập lồi, chẳng hạn là tập điểm bất động, tập nghiệm của bài toán tối ưu, thậm chí là tập nghiệm của một bài toán bất đẳng thức biến phân khác. Trong bài viết này chúng tôi xét tập C là tập nghiệm của một bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp. Cụ thể bài toán được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in S \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in S. \quad (2)$$

Ở đây, S là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp sau:

$$\text{Tìm } \bar{x} \in C \text{ sao cho } \langle T(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle + h(y) - h(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (3)$$

trong đó T là một ánh xạ từ H vào H và h là một hàm thực lấy giá trị trên $(-\infty, +\infty]$ có thể không cần khả vi. Thời gian gần đây, bài toán trên được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều tác giả ([3, 6, 7, 11, 13]) bởi tính ứng dụng sâu rộng của nó.

Sau đây, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và một số kết quả đã biết sẽ được sử dụng trong bài viết:

• *Phép chiếu metric*: Với $x \in H$. Khi đó $P_C(x) := \arg \min \{ \|y - x\|^2 : y \in C \}$ được gọi là phép chiếu metric của H lên C .

- *Dưới vi phân, dưới vi phân xấp xỉ*: với mỗi $x^0 \in C$, $\varepsilon \geq 0$ thì
- $\partial f(x^0) = \{ p \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq \langle p, y - x^0 \rangle + f(x^0), \forall y \in C \}$, được gọi là dưới vi phân của f tại x^0 .
 - $\partial_\varepsilon f(x^0) = \{ p \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq \langle p, y - x^0 \rangle + f(x^0) - \varepsilon, \forall y \in C \}$, được gọi là dưới vi phân xấp xỉ của f tại x^0 .

• *Nửa liên tục dưới*: Một hàm $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là nửa liên tục dưới trên C nếu với mọi $x_0 \in C$, ta có

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq g(x_0)$$

• *Para-đơn điệu*: Ánh xạ $T : H \rightarrow H$ được gọi là para-đơn điệu trên C nếu T đơn điệu trên C và

$$(\forall x, y \in C), \langle Tx - Ty, x - y \rangle = 0 \Rightarrow x = y$$

• *Đóng yếu*: T được gọi là đóng yếu trên C nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$,

$$x_n \rightharpoonup x_0 \text{ và } Tx_n \rightharpoonup w_0 \text{ kéo theo } w_0 = Tx_0.$$

Bổ đề 1.1 ([1]) Cho $x, y \in C, r \in H$ và $y = P_C(x - r)$. Khi đó

$$(i1) \|y - x\| \leq r,$$

$$(i2) 2\langle x - q, r \rangle \leq 5\|r\|^2 + \|x - q\|^2 - \|y - q\|^2, \forall q \in C.$$

Bổ đề 1.2 ([5]) Giả sử \bar{z} là một nghiệm của Bài toán (3) với ánh xạ $T : H \rightarrow H$ para-đơn điệu trên C , $h : C \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $C \subset \text{dom} h$ và $\bar{y} \in C$. Khi đó hai khẳng định sau là tương đương

(i1) \bar{y} là nghiệm của (2);

$$(i2) \langle T\bar{y}, \bar{z} - \bar{y} \rangle + h(\bar{z}) - h(\bar{y}) \geq 0.$$

Bổ đề 1.3 ([14]) Cho φ là một hàm được xác định bởi $\varphi(x) = \langle Tx, x - q \rangle$ trong đó $q \in H$ và $T : C \rightarrow H$ đơn điệu, đóng yếu trên C và liên tục Lipschitz trên tập con bị chặn của C . Thì φ nửa liên tục dưới yếu trên C .

Bổ đề 1.4 ([10]) Cho a_n là dãy các số thực không âm. Giả sử với mọi số tự nhiên m , tồn tại số tự nhiên p sao cho $p \geq m$ và $a_p \leq a_{p+1}$. Gọi n_0 là số tự nhiên sao cho $a_{n_0} \leq a_{n_0+1}$. Với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$, ta xác định

$$\gamma_n = \max \{k \in \mathbb{N} : n_0 \leq k \leq n, a_k \leq a_{k+1}\}. \quad (4)$$

Khi đó γ_n $_{n \geq n_0}$ là dãy không giảm thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \infty$ và các bất đẳng thức sau đây là đúng

$$a_{\gamma_n} \leq a_{\gamma_{n+1}}, a_n \leq a_{\gamma_{n+1}} \quad \forall n \geq n_0. \quad (5)$$

Bổ đề 1.5 ([10]) Cho $\{\lambda_n\}, \{\beta_n\}$ là các dãy số dương thỏa mãn

$$\sum_n \lambda_n = +\infty, \sum_n \lambda_n^2 < +\infty, \sum_n \lambda_n \beta_n < +\infty. \quad (6)$$

Khi đó,

(i1) Tồn tại dãy con $\{\beta_{n_k}\}$ của $\{\beta_n\}$ sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{n_k} = 0$.

(i2) Nếu với mọi θ , $\beta_{n+1} - \beta_n \leq \theta \lambda_n$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

2. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

Một trong những thuật toán đầu tiên để giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp phải kể đến là công trình của Yamada [15], tác giả đã sử dụng thuật toán lai ghép đường dốc và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp về nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động. Kế thừa các kết quả của Yamada, Ding [4] năm 2007 đã đề xuất thuật toán ba bước nói lỏng, và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp. Tiếp đó năm 2008, Lin [8] đã đề xuất và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh bởi thuật toán lai ghép độ dốc giảm dần, áp dụng cho bài toán này ...

Tuy nhiên, các thuật toán đã được đề xuất cho bài toán hai cấp nói chung và bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp thường phải sử dụng ít nhất hai phép chiếu tại mỗi bước lặp. Như chúng ta đã biết trong trường hợp tập ràng buộc C phức tạp thì chi phí cho việc tìm hình chiếu trên đó là rất đắt, cụ thể là mất nhiều thời gian tính toán và tốn nhiều bộ nhớ máy. Điều này gây ra các khó khăn cho chạy số trên máy tính khi bộ dữ liệu lớn. Thời gian gần đây nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu đề xuất thuật toán với những cải tiến đáng kể [2, 19, 12] bằng việc kết hợp giữa phép chiếu và một số kỹ thuật như quán tính, lai ghép, gắn kết, chiếu co, ... Kế thừa những phương pháp đã có trong bài viết này chúng tôi đề xuất thuật toán với một phép chiếu kết hợp với kỹ thuật xấp xỉ nhót (xấp xỉ gắn kết).

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Để giải Bài toán (2), trong mục này chúng tôi đề xuất thuật toán với một phép chiếu tại mỗi bước lặp.

3.1. Thuật toán

Khởi tạo: Lấy các dãy $\{\alpha_n\}, \{\lambda_n\}, \{\varepsilon_n\}$ trong $[0, +\infty)$, $\mu \in (0, +\infty)$. Chọn $x_0 \in C$ và gán $n := 0$.

Vòng lặp:

Bước 1. Tính $u_n \in \partial_{\varepsilon_n} h(x_n)$ (8)

Bước 2. Tính

$$\begin{cases} d_n = u_n + Tx_n + \alpha_n Ax_n; \\ \eta_n = \max \{ \mu, \|d_n\| \}. \end{cases} \quad (9)$$

Bước 3. Tính

$$x_{n+1} = P_C \left(x_n - \frac{\lambda_n}{\eta_n} d_n \right), \quad (10)$$

Bước 4. Gán $k := k + 1$ quay về *Bước 1*.

3.2. Phân tích sự hội tụ của thuật toán

Các giả thiết đặt lên hàm giá và tham số:

(H1) $h : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ lồi, nửa liên tục dưới trên H với $C \subset \text{dom} h$, sao cho

$\partial_\varepsilon h : H \rightarrow 2^H$ bị chặn trên tập con bị chặn của C với mọi $\varepsilon \geq 0$. (11)

(H2) $T : H \rightarrow H$ para-đơn điệu, đóng yếu trên C và liên tục Lipschitz trên tập con bị chặn trong C .

(H3) Tập $S \neq \emptyset$.

(H4) $A : C \rightarrow H$ ρ -đơn điệu mạnh và σ -liên tục Lipschitz.

(H5) $\mu \in (0, +\infty)$ và $\{\alpha_n\}, \{\lambda_n\}, \{\varepsilon_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn

$$\sum_n \lambda_n = \infty, \sum_n \lambda_n^2 < \infty, \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \sum_n \alpha_n = \infty, \sum_n \alpha_n \lambda_n = \infty. \quad (13)$$

$\{\varepsilon_n\}$ là dãy không tăng và thỏa mãn $\varepsilon_n \leq \mu \lambda_n$. (14)

Trước hết ta có các khẳng định sau:

Khẳng định 1. Giả sử $\{x_n\}$ tạo ra từ Thuật toán 3.1. Khi đó,

(i1) với mọi $n \geq 0$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda_n. \quad (15)$$

(i2) Nếu $\{\varepsilon_n\}, \{\lambda_n\}$ thỏa mãn $\varepsilon_n \leq \mu\lambda_n$ thì với mọi phần tử $q \in S$ và mọi $n \geq 0$ ta có

$$Q_{n+1} - Q_n + 2 \left(\beta_n \frac{\lambda_n}{\eta_n} \right) \leq 2 \left(\alpha_n \frac{\lambda_n}{\eta_n} \right) \langle x_n - q, Ax_n \rangle + 7\lambda_n^2, \quad (16)$$

Trong đó $Q_n = \|x_n - q\|^2$ và $\beta_n = \langle Tx_n, x_n - q \rangle + h(x_n) - h(q)$.

Chứng minh (i1). Từ (10) kết hợp với (i1) của Bổ đề 1.1 ta có

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda_n \frac{\|d_n\|}{\eta_n}.$$

Mặt khác $\eta_n = \max \{ \mu, \|d_n\| \} \Rightarrow \|d_n\| \leq \eta_n$ hay $\frac{\|d_n\|}{\eta_n} \leq 1$.

Từ đó suy ra $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda_n$.

Chứng minh (i2). Áp dụng (i2) của Bổ đề 1.1 cùng với (10) ta có

$$5 \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \|d_n\| \right)^2 + Q_n - Q_{n+1} \geq 2 \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \right) \langle x_n - q, d_n \rangle, \quad (17)$$

Sử dụng $\|d_n\| \leq \eta_n$ và $d_n = u_n + Tx_n + \alpha_n Ax_n$ ta thu được

$$5\lambda_n^2 + Q_n - Q_{n+1} \geq 2 \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \right) \left(\langle x_n - q, u_n + Tx_n \rangle + \alpha_n \langle x_n - q, Ax_n \rangle \right). \quad (18)$$

Từ $u_n \in \partial_{\varepsilon_n} h(x_n)$ suy ra $\langle u_n, x_n - q \rangle \geq h(x_n) - h(q) - \varepsilon_n$.

Bằng cách đặt $\beta_n = \langle Tx_n, x_n - q \rangle + h(x_n) - h(q)$. Khi đó ta thu được

$$\langle x_n - q, u_n + Tx_n \rangle \geq \langle x_n - q, Tx_n \rangle + h(x_n) - h(q) - \varepsilon,$$

Kết hợp điều này với (18) ta có

$$Q_{n+1} - Q_n + 2 \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \beta_n \right) \leq 2 \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \varepsilon_n \right) - 2 \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \alpha_n \right) \langle x_n - q, Ax_n \rangle + 5\lambda_n^2. \quad (19)$$

Lại có $\varepsilon_n \leq \mu\lambda_n$ và $\eta_n = \max\{\mu, \|d_n\|\}$ suy ra $\lambda_n \geq \frac{\varepsilon_n}{\eta_n}$. Do đó $\varepsilon_n \frac{\lambda_n}{\eta_n} \leq \lambda_n^2$, thay điều này vào (19) ta thu được (16).

Khẳng định 2. Nếu $S \neq \emptyset$, ánh xạ A đơn điệu mạnh và các tham số $\varepsilon_n, \lambda_n, \mu$ thỏa mãn $\varepsilon_n \leq \mu\lambda_n$ và $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$ thì dãy $\{x_n\}$ sinh ra từ Thuật toán 3.1 là bị chặn.

Thật vậy, Lấy $q \in S$ và đặt $Q_n = \|x_n - q\|^2$, $\beta_n = \langle Tx_n, x_n - q \rangle + h(x_n) - h(q)$. Khi đó từ (16) và $\beta_n \geq 0$ ta thu được

$$Q_{n+1} - Q_n + 2\left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \alpha_n\right) \langle x_n - q, Ax_n \rangle \leq 7\lambda_n^2, \quad (20)$$

Hay tương đương với

$$a_{n+1} - a_n + 2\left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \alpha_n\right) \langle x_n - q, Ax_n \rangle \leq 0, \quad (21)$$

trong đó $a_j = Q_j - 7\sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k^2$.

Trường hợp 1. Tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho dãy $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ không tăng. Nghĩa là với $n \geq n_0$, ta có $Q_n - 7\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^2 = a_n \leq a_{n_0}$. Do đó Q_n bị chặn suy ra $\{x_n\}$ cũng bị chặn.

Trường hợp 2. Tồn tại dãy con $\{a_{n_k}\}$ của $\{a_n\}$ sao cho $a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}}$ với mọi $k \geq 0$. Áp dụng Bổ đề 1.4 ta có

$$a_{\gamma(n)} \leq a_{\gamma(n)+1}, \quad a_n \leq a_{\gamma(n)+1}, \quad \forall n \geq n_0, \quad (22)$$

trong đó $\gamma(n) = \max\{j : n_0 \leq j \leq n, a_j \leq a_{j+1}\}$.

Từ (21) và (22) suy ra

$$\langle x_{\gamma(n)} - q, Ax_{\gamma(n)} \rangle \leq 0. \quad (23)$$

Kết hợp (23) với tính ρ -đơn điệu mạnh của A dẫn đến

$$\rho \|x_{\gamma(n)} - q\|^2 \leq \langle x_{\gamma(n)} - q, Ax_{\gamma(n)} - Aq \rangle \leq -\langle x_{\gamma(n)} - q, Aq \rangle.$$

Suy ra dãy $\{x_{\gamma(n)}\}$ bị chặn. Mà $a_{\gamma(n)+1} = Q_{\gamma(n)+1} - 7 \sum_{k=0}^{\gamma(n)} \lambda_k^2 \leq Q_{\gamma(n)+1} = \|x_{\gamma(n)+1} - q\|$, do đó $\{a_{\gamma(n)+1}\}$ cũng bị chặn, kết hợp điều này với (22) dẫn tới $\{a_n\}$ bị chặn trên. Đến đây lý luận tương tự trường hợp 1 suy ra $\{x_n\}$ cũng bị chặn.

Khẳng định 3. Cho $S \neq \emptyset$, ánh xạ T para-đơn điệu, đóng yếu trên C và liên tục Lipschitz trên một tập con bị chặn của C , hàm h lồi, liên tục trên C . Nếu \bar{x} là một điểm trong S và $\{z_n\}$ là một dãy bị chặn trong C thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \langle Tz_n, z_n - \bar{x} \rangle + h(z_n) - h(\bar{x}) \right| = 0, \quad (24)$$

Thì mọi điểm tụ của $\{z_n\}$ đều thuộc vào S .

Thật vậy, Với mỗi phần tử $y \in C$, ta đặt $\varphi(y) = \langle Ty, y - \bar{x} \rangle + h(y) - h(\bar{x})$. Từ tính đơn điệu của T và $\bar{x} \in S$, ta có $\varphi(y) \geq \langle T\bar{x}, y - \bar{x} \rangle + h(y) - h(\bar{x}) \geq 0$. Giả sử $\{z_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{z_n\}$ sao cho $z_{n_k} \rightarrow z \in H$ suy ra z cũng thuộc C . Do h nửa liên tục dưới yếu trên C kéo theo φ cũng nửa liên tục dưới yếu trên C , tức là $0 \leq \varphi(z) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi(z_{n_k})$. Mặt khác từ giả thiết (24) suy ra $\liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi(z_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = 0$ hay $\varphi(z) = 0$. Áp dụng Bổ đề 1.2 suy ra $z \in S$.

Khẳng định 4. Giả sử rằng $S \neq \emptyset$, $\{x_n\}$ là một dãy sinh ra bởi Thuật toán 3.1, ánh xạ T liên tục Lipschitz trên tập con bị chặn trong C , các tham số $\varepsilon_n, \lambda_n, \mu$ thỏa mãn $\varepsilon_n \leq \mu \lambda_n$ và $\{\varepsilon_n\}$ là dãy không tăng. Thì mọi phần tử $q \in S$, luôn tồn tại hằng số dương ν sao cho:

$$\beta_{n+1} - \beta_n \leq \nu \lambda_n, \quad (25)$$

$$\text{Trong đó } \beta_n = \langle Tx_n, x_n - q \rangle + h(x_n) - h(q).$$

Thật vậy, Theo định nghĩa của β_n suy ra

$$\beta_{n+1} - \beta_n \leq \left(\langle Tx_{n+1}, x_{n+1} - q \rangle - \langle Tx_n, x_n - q \rangle \right) + \left(h(x_{n+1}) - h(x_n) \right), \quad (26)$$

Mặt khác theo Bước 1 của Thuật toán thì $u_{n+1} \in \partial_{\varepsilon_{n+1}} h(x_{n+1})$ do đó

$$h(x_{n+1}) - h(x_n) \leq \langle u_{n+1}, x_{n+1} - x_n \rangle + \varepsilon_{n+1}, \quad (27)$$

Kết hợp (26), (27) và tính không tăng của $\{\varepsilon_n\}$ ta thu được

$$\beta_{n+1} - \beta_n \leq \langle Tx_{n+1} + u_n, x_{n+1} - x_n \rangle + \langle Tx_{n+1} - Tx_n, x_n - q \rangle + \varepsilon_n, \quad (28)$$

Từ tính bị chặn của $\{x_n\}$ và tính liên tục Lipschitz của ánh xạ T dẫn tới dãy $\{Tx_n\}$ cũng bị chặn và $\|Tx_{n+1} - Tx_n\| \leq L\|x_{n+1} - x_n\|$. Kết hợp điều kiện (11) suy ra $\{u_n\}$ bị chặn. Do đó bất đẳng thức (28) có thể viết lại như sau

$$\beta_{n+1} - \beta_n \leq \rho\|x_{n+1} - x_n\| + \varepsilon_n,$$

Trong đó ρ là một hằng số nào đó. Lại có $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda_n$ và $\varepsilon_n \leq \mu\lambda_n$ suy ra $\beta_{n+1} - \beta_n \leq (\mu + \rho)\lambda_n = \nu\lambda_n$, trong đó $\nu = \mu + \rho$. Vậy Khẳng định 4 hoàn toàn được chứng minh.

Kết quả hội tụ của thuật toán được phát biểu thông qua định lý sau

Định lý 3.1 Dãy $\{x_n\}$ sinh ra từ Thuật toán 3.1 hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bài toán (2) dưới các điều kiện từ (H1) đến (H5).

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ là các dãy được sinh ra từ Thuật toán 3.1 và x^* là một nghiệm của Bài toán 1. Ta đặt $Q_n = \|x_n - x^*\|^2$ và $\beta_n = \langle Tx_n, x_n - x^* \rangle + h(x_n) - h(x^*)$. Khi đó, theo Khẳng định 2 suy ra dãy $\{x_n\}$ bị chặn kéo theo các dãy $\{Tx_n\}$, $\{Ax_n\}$, $\{u_n\}$, $\{\beta_n\}$ cũng bị chặn. Lại có $\eta_n = \max\{\mu, \|d_n\|\}$ với $d_n = u_n + Tx_n + \alpha_n Ax_n$ suy ra $\{\eta_n\}$ cũng bị chặn. Do đó tồn tại số dương δ sao cho

$$\forall n \geq 0, \quad \mu \leq \eta_n \leq \delta. \quad (29)$$

Từ Khẳng định 1, ta có

$$Q_{n+1} - Q_n + 2\beta_n \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \right) + 2\alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \right) \langle x_n - x^*, Ax_n \rangle \leq 7\lambda_n^2, \quad (30)$$

Tương đương với

$$a_{n+1} - a_n + 2\beta_n \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \right) + 2\alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\eta_n} \right) \langle x_n - x^*, Ax_n \rangle \leq 7\lambda_n^2,$$

$$\text{Trong đó } a_j = Q_j + \sum_{k=0}^{j-1} (\lambda_k \beta_k / \eta_k) - \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k^2. \quad (31)$$

Dẫn tới

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 - \|x_n - x^*\|^2 + (\lambda_n \beta_n / \eta_n) \leq 7\lambda_n^2, \quad (32)$$

mà $\sum_n \lambda_n^2 < \infty$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ tồn tại và

$$\sum_n (\lambda_n \beta_n / \eta_n) < \infty. \quad (33)$$

Kết hợp với (29) suy ra

$$\sum_n \lambda_n \beta_n < \infty. \quad (34)$$

Mặt khác theo Khẳng định 4

$$\beta_{n+1} - \beta_n \leq \nu \lambda_n, \quad (35)$$

Trong đó ν là một hằng số dương. Khi đó theo (34), (35) cùng với các giả thiết $\sum_n \lambda_n^2 < \infty$, $\sum_n \lambda_n = \infty$ và Bổ đề 1.5, ta thu được $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. Theo Khẳng định 3 suy ra các điểm tụ của $\{x_n\}$ thuộc vào tập S .

Từ (31) suy ra

$$\sum_n \frac{\lambda_n \alpha_n}{\eta_n} \langle x_n - x^*, Ax_n \rangle < \infty. \quad (36)$$

Mặt khác, (29) và giả thiết $\sum_n \lambda_n \alpha_n = \infty$ suy ra $\sum_n \frac{\lambda_n \alpha_n}{\eta_n} = +\infty$. Điều này kết hợp

với (36) dẫn tới

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x^*, Ax_n \rangle \leq 0. \quad (37)$$

Từ tính ρ -đơn điệu mạnh của ánh xạ A suy ra

$$\rho \|x_n - x^*\|^2 \leq \langle x_n - x^*, Ax_n \rangle - \langle x_n - x^*, Ax^* \rangle, \quad (38)$$

Do đó

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho \|x_n - x^*\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x^*, Ax_n \rangle - \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x^*, Ax^* \rangle. \quad (39)$$

Thay (37) vào (39) ta được

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|^2 \leq -(1/\rho) \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x^*, Ax^* \rangle. \quad (40)$$

Lại có $\langle x_n - x^*, Ax^* \rangle$ bị chặn, nên tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ về $u \in H$ sao cho

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - x^*, Ax^* \rangle = \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle x_{n_k} - x^*, Ax^* \rangle = \langle u - x^*, Ax^* \rangle \geq 0.$$

Kết hợp điều này với (40) suy ra $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$. Mặt khác theo (33) giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ tồn tại. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$ hay $x_n \rightarrow x^*$ khi $n \rightarrow +\infty$. \square

4. KẾT LUẬN

Trong bài viết tác giả đã đề xuất một cách tiếp cận mới để giải bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc là bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp. Đó là kết hợp giữa phương pháp chiếu dưới đạo hàm và kỹ thuật nhót (hay còn gọi là kỹ thuật gắn kết). Với đề xuất mới này, tại mỗi bước lặp k của thuật toán chỉ sử dụng một phép chiếu duy nhất điều này giúp cải thiện đáng kể về mặt tính toán và bộ nhớ lưu trữ cho chạy số trên máy tính. Bên cạnh đó bài viết cũng trình bày chi tiết chứng minh được sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh ra bởi thuật toán đề xuất về nghiệm duy nhất của Bài toán (2).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. H.H. Bauschke, P.L. Combettes (2011), *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer, New York.
2. R.S. Burachik, J.O. Lopez (2003), ‘A convergence result for an outer approximation scheme’, *Computational and Applied Mathematics*, 22, 3, 397-409.
3. G. Cohen (1987), ‘Nash equilibria: gradient and decomposition algorithms’, *Large Scaled System*, 12, 173-184.
4. X.P. Ding, Y.C. Lin, J.C. Yao (2007), ‘Three-step relaxed hybrid steepest-descent methods for variational inequalities’, *Appl. Math. Mech.*, 28, 1029-1036.
5. A.N. Iusem (1998), ‘On some properties of paramonotone operators’, *Journal of Convex Analysis*, 5, 269-278.
6. I.V. Konnov (2002), ‘A combined relaxation method for a class of nonlinear variational inequalities’, *Optimization*, 51, 127-143.
7. I.V. Konnov, E.O. Volotskaya (2002), ‘Mixed variational inequalities and economics equilibrium problems’, *Journal of Applied Mathematics*, 2, 6, 289-314.

8. Y.C. Lin (2008), 'Finite-step relaxed hybrid steepest-descent methods for variational inequalities', *J. Inequal. Appl.*, 12, 598-632.
9. Z.Q. Luo, J.S. Pang, D. Ralph (1996), *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, Cambridge, UK,.
10. P.E. Maingé (2008), 'Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization', *Set-Valued Analysis*, 16 (8) 899-912.
11. M.A. Noor (2004), 'Auxiliary principle technique for equilibrium problems', *Journal of Optimization Theory and Applications*, 122, 2, 371-386.
12. J.V. Outrata, M. Kocvara, J. Zowe (1998), *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints: Theory, Applications and Numerical Results*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
13. P. Paniagotopoulos, G. Stravoulakis (1994), 'New types of variational principles based on the notion of quasi differentiability', *Acta Mechanica*, 94, 171-194.
14. G. Salmon, J.J. Stodiot, V.H. Nguyen (2004), 'A bundle method for solving variational inequalities', *SIAM Journal on Optimization*, 14, 869-893.
15. I. Yamada, N. Ogura (2004), 'Hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings', *Numerical Functional Analysis and Optimizations*, 25, 8, 619-655.