

PHƯƠNG PHÁP CHIẾU MỞ RỘNG GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HAI CẤP

Cao Thị Thu Trang

Khoa Toán và KHTN

Email: trangctt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 03/3/2025

Ngày PB đánh giá: 31/3/2025

Ngày duyệt đăng: 05/5/2025

Tóm tắt: Bài toán bất đẳng thức biến phân được giới thiệu lần đầu bởi Stampacchia và cộng sự [5] đã trở thành một đề tài nghiên cứu lý thú, thu hút nhiều nhà khoa học quan tâm bởi các ứng dụng thực tế của nó như mô hình cân bằng mạng giao thông, mô hình tối ưu mạng truyền thông, các mô hình của bài toán tối ưu, bài toán bù phi tuyến,... Thông thường, miền ràng buộc cho bài toán này là một tập con lồi, đóng và khác rỗng C của một không gian Hilbert thực H , tuy vậy, trong thực tế miền ràng buộc đôi khi là những tập ẩn, các phương pháp giải cổ điển không khả thi trong trường hợp này. Trong bài báo này, tôi đề xuất và chứng minh sự hội tụ cho một thuật toán mới với phương pháp chiếu được mở rộng trên nửa không gian đóng để giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, tức là miền ràng buộc cho bài toán thông thường được thay bởi tập nghiệm của một bài toán bất đẳng thức biến phân khác. Các chứng minh của tôi được tiến hành trên không gian Hilbert, kết hội tụ mạnh của thuật toán được trình bày chi tiết trong bài báo.

Từ khóa: Bất đẳng thức biến phân, hai cấp, nửa không gian đóng, tựa không giãn, giả đơn điệu, đơn điệu mạnh, liên tục Lipschitz.

EXTENDED PROJECTION METHOD TO SOLVE BILEVEL VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS

Abstract: The variational inequality problem which is first introduced by Stampacchia et al. [5] has become an interesting research topic and attracted the attention of many scientists because of its practical applications such as traffic network balance model, communication network optimization model, models of optimization problems, nonlinear compensation problems, etc. Normally, the constraint domain for this problem is a convex, closed and non-empty subset C of a real Hilbert space H , however, in reality the constraint domain is sometimes hidden sets, classical solution methods are not feasible in this case. In this paper, I propose and prove the convergence of a new algorithm with the extended projection method on closed half-spaces to solve the bilevel variational inequality problem, i.e. the constraint domain for the usual problem is replaced by the solution set of another variational inequality problem. My proofs are carried out on Hilbert spaces, the strong convergence of the algorithm is presented in detail in the paper.

Keywords: Variational inequality, bilevel, closed half-spaces, pseudomonotone, quasinonexpansive, Lipschitz continuous.

1. Giới thiệu

Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực H . Ánh xạ $G : C \rightarrow H$ được gọi là ánh xạ giá. Bài toán bất đẳng thức biến phân, ký hiệu là $VI(C, G)$, được định nghĩa như sau:

Tìm $x^* \in C$ sao cho $\langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \forall x \in C$, (1.1) tập nghiệm của bài toán ký hiệu là $Sol(C, G)$. Trong các nghiên cứu mở rộng cho bài toán $VI(C, G)$, một hướng nghiên cứu mới được giáo sư P.N. Anh và các cộng sự [1,2,3] phát triển rất mạnh, đó là mô hình bài toán hai cấp, ký hiệu $BVI(C, G, F)$, như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in Sol(C, F) \text{ sao cho } \langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \forall x \in Sol(C, F), (1.2)$$

với $F : C \rightarrow H$ là ánh xạ giá cho bài toán $VI(C, F)$.

Bài toán hai cấp $BVI(C, G, F)$ có nhiều ứng dụng rộng rãi của bài toán bất đẳng thức biến phân và các bài toán liên quan, việc mở rộng nghiên cứu trên tập ràng buộc ẩn $Sol(C, F)$ sẽ bao quát được nhiều hơn nữa các lớp bài toán quan trọng khác như: Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, bài toán điểm bất động, bài toán cực tiểu lồi, các mô hình xử lý ảnh,...

2. Tổng quan nghiên cứu

Bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, theo hiểu biết của tôi được nghiên cứu sớm nhất bởi Kalashnikov [6], V.V. và các cộng sự, tiếp sau đó được rất nhiều các nhóm nghiên cứu khác quan tâm khai thác như IV. Konnov và các cộng sự [4], hay M.H. Xu và các cộng sự [11,13],... Bất đẳng thức biến phân có thể tìm lời giải đơn giản nhất bằng phương pháp một phép chiếu [1,3]:

$$\begin{cases} x^0 \in C \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda G(x^k)). \end{cases}$$

Phương pháp này cho ta kết quả hội tụ mạnh của x^k về nghiệm x^* của bài toán bất đẳng thức biến phân, song yêu cầu giả thiết đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz của ánh xạ giá G . Sau đó, Korpelevick [7] đề xuất phương pháp đạo hàm tăng cường:

$$\begin{cases} x^0 \in C \\ y^k = P_C(x^k - \lambda G(x^k)) \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda G(y^k)). \end{cases}$$

Khi đó, chỉ cần điều kiện giả đơn điệu của hàm giá G và tính liên tục Lipschitz, các dãy lặp x^k, y^k hội tụ yếu về nghiệm x^* của bài toán bất đẳng thức biến phân. Với bài toán $BVI(C, G, F)$, T.V. Thang [10] và các cộng sự đã đề xuất phương pháp chiếu co, bằng cách kết hợp phép chiếu thông thường với nguyên lý bài toán phụ, các tác giả đã chỉ ra sự hội tụ mạnh của dãy lặp về nghiệm duy nhất của bài toán. Bằng cách mở rộng phép chiếu, trong bài báo này, tác giả kết hợp phép chiếu thông thường và phép chiếu lên nửa không gian đóng H_x để giải bài toán $BVI(C, G, F)$, với điều kiện đơn điệu mạnh của G và giả đơn điệu của F , bài toán sẽ có duy nhất nghiệm.

3. Nội dung nghiên cứu

Nội dung chính của bài báo là thuật toán giải bài toán $BVI(C, G, F)$. Trước hết ta giới thiệu về tính chất thông thường của ánh xạ giá F và G như sau:

Định nghĩa 3.1. Cho ánh xạ $F : C \rightarrow H$, F được gọi là

i, Giả đơn điệu trên C nếu $\langle F(y), x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle F(x), x - y \rangle \geq 0 \forall x, y \in C$;

ii, Liên tục yếu trên C nếu dãy $\{x^k\} \subset C$ hội tụ yếu về $\bar{x} \in C$ kéo theo $F(x^k)$ hội tụ yếu về $F(\bar{x}) \in H$.

Định nghĩa 3.2. Cho ánh xạ $G: C \rightarrow H$, G được gọi là

i, β -đơn điệu mạnh nếu $\langle G(x) - G(y), x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2, \forall x, y \in H$;

ii, L -liên tục Lipschitz nếu $\|G(x) - G(y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in H$.

3.1. Thuật toán 1:

Bước khởi tạo: Chọn $x^0 \in H$ bất kì và các tham số:

$$\begin{cases} \nu \in (0, \min\{1, \frac{1}{L_F}\}), a \in (0, 1 - \nu L_F), b > 0, \xi_k \in \left(b, \min\left\{\frac{1}{L_F}, \sqrt{\frac{\nu}{L_F}}\right\}\right), \\ \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k, \gamma_k \in \left(0, \min\left\{\frac{1 - \xi^2 L_F^2}{2}, \frac{1 - \nu L_F - a}{2}\right\}\right), \\ \tau \in (0, \frac{2\beta}{L_G^2}), \alpha_k \in (0, 1), \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty. \end{cases} \quad (3.1)$$

Bước 1: Tính: $y^k = \Pi_C[x^k - \xi_k F(x^k)]$,

Bước 2: Tính $w^k = x^k - \nu \xi_k F(y^k)$, và

$$z^k = \begin{cases} w^k - \frac{d_k}{\|x^k - \xi_k F(x^k) - y^k\|^2} (x^k - \xi_k F(x^k) - y^k) & \text{khi } d_k > 0, \\ w^k & \text{khi } d_k \leq 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

Với $d_k = \langle x^k - \xi_k F(x^k) - y^k, w^k - y^k \rangle - \gamma_k \|y^k - x^k\|^2$, (3.3)

Bước 3. Tính $x^{k+1} = z^k - \alpha_k \tau G(z^k)$. Đặt $k = k + 1$, quay lại Bước 1. (3.4)

Sau đây là các bổ đề sử dụng để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp,

Bổ đề 3.1. [12, lemma 3.1] Cho $F: H \rightarrow H$ là ζ -đơn điệu mạnh và L -Liên tục Lipschitz. Khi đó, ánh xạ $S = Id - \xi F$ là δ -co với $\xi \in (0, \frac{2\zeta}{L^2})$, Id là ánh xạ đồng nhất và $\delta = \sqrt{1 - \xi(2\zeta - \xi L^2)}$.

Hơn nữa, $\|[x - \alpha \eta F(x)] - [y - \alpha \eta F(y)]\| \leq (1 - \alpha \beta) \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{H}$,

ở đây $\alpha \in (0, 1), \eta \in (0, \frac{2\zeta}{L^2}), \beta = 1 - \sqrt{1 - \eta(2\zeta - \eta L^2)} \in (0, 1)$.

Bổ đề 3.2. [8, remark 4.4] Cho $\{a_k\}$ là một dãy số thực dương. Giả sử rằng với mọi số tự nhiên m tồn tại một số tự nhiên p sao cho $p \geq m$ và $a^p \leq a^{p+1}$. Cho k_0 là một số tự nhiên thỏa mãn $a^{k_0} \leq a^{k_0+1}$ và với mọi $k \geq k_0$ đặt: $\tau(k) = \max\{i \in \mathbb{N} : k_0 \leq i \leq k, a^i \leq a^{i+1}\}$, khi đó $0 \leq a^{\tau(k)} \leq a^{\tau(k)+1}$ với mọi $k \geq k_0$. Hơn nữa dãy $\{\tau(k)\}_{k \geq k_0}$ là không giảm và tiến đến $+\infty$ khi $k \rightarrow \infty$.

Bổ đề 3.3. [9, Lemma 2.6] Cho $\{s_k\}$ là một dãy số thực không âm và $\{p_k\}$ là một dãy số thực. Cho $\{\alpha_k\}$ là một dãy số dương trong khoảng $(0,1)$ sao cho $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$. Giả sử rằng $s_{k+1} \leq (1-\alpha_k)s_k + \alpha_k p_k$, $k \in \mathbb{N}$. Nếu dãy $\{p_k\}$ thỏa mãn $\limsup_{i \rightarrow \infty} p_k \leq 0$ thì $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$.

3.2. Sự hội tụ. Định lý sau chỉ ra sự hội tụ của dãy lặp trong Thuật toán 1.

Định lý 3.1. Cho các ánh xạ giá F và G thỏa mãn các giả thiết:

- (A₁) Tập $Sol(C, F) \neq \emptyset$,
- (A₂) Ánh xạ F là giả đơn điệu, liên tục yếu và L_F -Liên tục Lipschitz trên C ,
- (A₃) Ánh xạ G là β -đơn điệu mạnh và L_G -Liên tục Lipschitz trên C ,

khi đó, hai dãy số $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ trong Thuật toán 1 hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất u của bài toán $BVI(C, G, F)$.

Chứng minh: Ta đặt: $S : H \rightarrow C$, được định nghĩa như sau: $Sx = \Pi_C[x - \xi F(x)]$. Cho $\gamma > 0$, ta gọi nửa không gian đóng H_x như sau:

$$H_x = \left\{ w \in \mathbb{H} : \langle x - \xi F(x) - Sx, w - Sx \rangle \leq \gamma \|x - Sx\|^2 \right\}.$$

Để thấy $C \subset H_x$. Khi đó ta có công thức tìm hình chiếu lên nửa không gian đóng H_x :

$$\Pi_{H_x}(z) = \begin{cases} z - \frac{\langle x - \xi F(x) - Sx, z - Sx \rangle - \gamma \|x - Sx\|^2}{\|x - \xi F(x) - Sx\|^2} (x - \xi F(x) - Sx) & \text{khi } z \notin H_x, \\ z & \text{khi } z \in H_x. \end{cases}$$

Ta gọi ánh xạ: $T : H \rightarrow H$ như sau: $Tx = \Pi_{H_x}[x - \nu \xi F(Sx)]$, (3.5)

với tham số $\nu > 0$. Ta có bổ đề sau chỉ ra tính chất tựa không giãn của ánh xạ T :

Bổ đề 3.4. Giả sử tập $Sol(C, F)$ khác rỗng, ánh xạ giá F là giả đơn điệu trên C và L -liên tục Lipschitz, các tham số $\xi \in (0, \frac{1}{L})$, $\gamma \in (0, \frac{1 - \xi^2 L^2}{2})$ và $\nu \in \left(\xi^2 L, \min \left\{ \frac{1 - 2\gamma}{L}, 1 \right\} \right)$

khi đó, với mọi $x \in H$, $x^* \in Sol(C, F)$:

$$\begin{aligned} \|Tx - x^*\|^2 \leq & \|x - x^*\|^2 - \nu(1 - \nu L - 2\gamma) \|x - Sx\|^2 \\ & - (\nu - \xi^2 L) \|Tx - Sx\|^2 - (1 - \nu) \|Tx - x\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Chứng minh: Giả sử $x^* \in Sol(C, F)$ và F là tựa đơn điệu. Từ $\langle F(x^*), Sx - x^* \rangle \geq 0$ và giả thiết giả đơn điệu của F , suy ra $\langle F(Sx), Sx - x^* \rangle \geq 0$. Sử dụng tính chất của phép chiếu và (3.5), ta có $x^* \in H_x$ và

$$\begin{aligned}
\|Tx - x^*\|^2 &= \|\Pi_{H_x}[x - \nu\xi F(Sx)] - \Pi_{H_x}(x^*)\|^2 \\
&\leq \|x - \nu\xi F(Sx) - x^*\|^2 - \|x - \nu\xi F(Sx) - Tx\|^2 \\
&= \|x - x^*\|^2 - 2\nu\xi\langle F(Sx), Tx - x^*\rangle - \|x - Tx\|^2 \\
&= \|x - x^*\|^2 - 2\nu\xi\langle F(Sx), Sx - x^*\rangle - 2\nu\xi\langle F(Sx), Tx - Sx\rangle \\
&\quad - \|x - Tx\|^2 \tag{3.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x - x^*\|^2 - 2\nu\xi\langle F(Sx), Tx - Sx\rangle - \|x - Tx\|^2 \\
&= \|x - x^*\|^2 + 2\nu\langle x - Sx - \xi F(Sx), Tx - Sx\rangle \\
&\quad + 2\nu\langle Sx - x, Tx - Sx\rangle - \|x - Tx\|^2 \\
&= \|x - x^*\|^2 + 2\nu\langle x - \xi F(x) - Sx, Tx - Sx\rangle - (1-\nu)\|x - Tx\|^2 \\
&\quad + 2\nu\xi\langle F(x) - F(Sx), Tx - Sx\rangle - \nu\|x - Sx\|^2 - \nu\|Sx - Tx\|^2, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Từ (3.5) và $\nu > 0$, thỏa mãn $Tx \in H_x$ và từ $\nu\langle x - \xi F(x) - Sx, Tx - Sx\rangle \leq \nu\gamma\|x - Sx\|^2$. (3.9)

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và điều kiện liên tục Lipschitz của F ta suy ra

$$\begin{aligned}
2\nu\xi\langle F(x) - F(Sx), Tx - Sx\rangle &\leq 2\nu\xi\|F(x) - F(Sx)\|\|Tx - Sx\| \\
&\leq 2L\nu\xi\|x - Sx\|\|Tx - Sx\| \tag{3.10} \\
&\leq L(\nu^2\|x - Sx\|^2 + \xi^2\|Tx - Sx\|^2).
\end{aligned}$$

Kết hợp (3.8), (3.9) và (3.10), ta có

$$\begin{aligned}
\|Tx - x^*\|^2 &\leq \|x - x^*\|^2 + 2\nu\langle x - \xi F(x) - Sx, Tx - Sx\rangle - (1-\nu)\|Tx - x\|^2 \\
&\quad + 2\nu\xi\langle F(x) - F(Sx), Tx - Sx\rangle - \nu\|x - Sx\|^2 - \nu\|Sx - Tx\|^2 \\
&\leq \|x - x^*\|^2 + 2\nu\gamma\|x - Sx\|^2 - (1-\nu)\|Tx - x\|^2 + \nu^2L\|x - Sx\|^2 \\
&\quad + \xi^2L\|Tx - Sx\|^2 - \nu\|x - Sx\|^2 - \nu\|Sx - Tx\|^2 \\
&= \|x - x^*\|^2 - \nu(1-\nu L - 2\gamma)\|x - Sx\|^2 - (\nu - \xi^2L)\|Tx - Sx\|^2 \\
&\quad - (1-\nu)\|Tx - x\|^2.
\end{aligned}$$

Khi đó dưới giả thuyết $\xi \in (0, \frac{1}{L})$, $\gamma \in (0, \frac{1-\xi^2L^2}{2})$ và $\nu \in (\xi^2L, \frac{1-2\gamma}{L})$, ta có:

$$\begin{aligned}
\|Tx - x^*\|^2 &\leq \|x - x^*\|^2 - \nu(1-\nu L - 2\gamma)\|x - Sx\|^2 - (\nu - \xi^2L)\|Tx - Sx\|^2 \\
&\quad - (1-\nu)\|Tx - x\|^2.
\end{aligned}$$

Bổ đề 3.5. Cho $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ là hai dãy số sinh ra bởi Thuật toán 1 và gọi $x^* \in Sol(C, F)$. Khi đó, với các giả thiết $(A_1), (A_2), (A_3)$ ta có khẳng định sau:

$$\begin{aligned}
\|z^k - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \nu(1-\nu L_F - 2\gamma_k)\|x^k - y^k\|^2 \\
&\quad - (\nu - \xi_k^2 L_F)\|z^k - y^k\|^2 - (1-\nu)\|z^k - x^k\|^2. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Chứng minh: Ta áp dụng Bổ đề 3.4. với $y^k = Sx^k$, $z^k = Tx^k$, khi đó:

$$\begin{aligned}
\|z^k - x^*\|^2 &= \|Tx^k - x^*\|^2 \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 - \nu(1-\nu L_F - 2\gamma_k)\|x^k - Sx^k\|^2 \\
&\quad - (\nu - \xi_k^2 L_F)\|Tx^k - Sx^k\|^2 - (1-\nu)\|Tx^k - x^k\|^2,
\end{aligned}$$

điều phải chứng minh.

Bổ đề 3.6. Giả sử dãy $\{x^k\}$ được sinh bởi Thuật toán 1 là bị chặn và $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ sao cho $x^{k_j} \rightarrow \bar{x}$, nếu $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x^{k_j} - y^{k_j}\| = 0$ với $\{y^{k_j}\}$ là dãy con tương ứng sinh bởi Thuật toán 1, thì $\bar{x} \in \text{Sol}(C, F)$.

Chứng minh: Từ định nghĩa của dãy $y^k = \Pi_C[x^k - \xi_k F(x^k)]$ và $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$, ta có $\langle x^{k_j} - \xi_{k_j} F(x^{k_j}) - y^{k_j}, x - y^{k_j} \rangle \leq 0, \forall x \in C$.

Do đó, $\xi_{k_j} \langle F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle + \xi_{k_j} \langle F(x^{k_j}), x^{k_j} - y^{k_j} \rangle \geq \langle x^{k_j} - y^{k_j}, x - y^{k_j} \rangle$.

Từ F là L_F -liên tục Lipschitz và dãy $\{x^k\}$ bị chặn, suy ra dãy $\{F(x^k)\}$ cũng bị chặn.

Sử dụng $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi > 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x^{k_j} - y^{k_j}\| = 0$, $x^{k_j} \rightarrow \bar{x}$, và lấy giới hạn khi $j \rightarrow \infty$, ta có

$y^{k_j} \rightarrow \bar{x}$, $0 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle$. Nghĩa là:

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle F(y^{k_j}), x - y^{k_j} \rangle &= \liminf_{j \rightarrow \infty} [\langle F(y^{k_j}), x^{k_j} - y^{k_j} \rangle + \langle F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle + \langle F(y^{k_j}) - F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle] \\ &\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} [-\|F(y^{k_j})\| \|x^{k_j} - y^{k_j}\| + \langle F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle - L_F \|y^{k_j} - x^{k_j}\| \|x - x^{k_j}\|] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Mặt khác, từ tính chất nửa liên tục dưới của chuẩn và tính liên tục yếu của F , ta có $\liminf_{j \rightarrow \infty} \|F(y^{k_j})\| \geq \|F(\bar{x})\| \geq 0$.

Nếu $F(\bar{x}) = 0$ thì \bar{x} là một nghiệm của bài toán $VI(C, F)$. Trong trường hợp $\|F(\bar{x})\| > 0$, khi đó, tồn tại một dãy con dương $\{r_j\}$ và $n_j \rightarrow +\infty$ thỏa mãn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = 0, \|F(y^{n_j})\| > 0, \langle F(y^{n_j}), x - y^{n_j} \rangle + r_j \geq 0, \forall j \geq n_j. \quad (3.12)$$

Đặt $q^{n_j} = \frac{1}{\|F(y^{n_j})\|} F(y^{n_j})$. Khi đó, $\langle F(y^{n_j}), q^{n_j} \rangle = 1$. Từ (3.12) suy ra

$$0 \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \|r_j q^{n_j}\| \leq \frac{\limsup_{j \rightarrow \infty} r_j}{\liminf_{j \rightarrow \infty} \|F(y^{n_j})\|} \leq \frac{\lim_{j \rightarrow \infty} r_j}{\|F(\bar{x})\|} = 0 \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \|r_j q^{n_j}\| = 0, \quad (3.13)$$

và $\langle F(y^{n_j}), x - y^{n_j} \rangle + r_j \langle F(y^{n_j}), q^{n_j} \rangle \geq 0, \forall x \in C$. Sử dụng giả thiết giả đơn điệu

(A_2) của F , ta được $\langle F(x + r_j q^{n_j}), x + r_j q^{n_j} - y^{n_j} \rangle \geq 0$. Kết hợp với điều kiện liên tục Lipschitz của F , ta có

$$\begin{aligned} \langle F(x), x - y^{n_j} \rangle &= \langle F(x) - F(x + r_j q^{n_j}), x - y^{n_j} \rangle + \\ &\quad \langle F(x + r_j q^{n_j}), x + r_j q^{n_j} - y^{n_j} \rangle - \langle F(x + r_j q^{n_j}), r_j q^{n_j} \rangle \\ &\geq \langle F(x) - F(x + r_j q^{n_j}), x - y^{n_j} \rangle - \langle F(x + r_j q^{n_j}), r_j q^{n_j} \rangle \\ &\geq -L_F \|r_j q^{n_j}\| \|x - y^{n_j}\| - \|F(x + r_j q^{n_j})\| \|r_j q^{n_j}\|. \end{aligned}$$

Lấy giới hạn bất đẳng thức cuối cùng khi $j \rightarrow \infty$ và sử dụng (3.13), ta suy ra

$\langle F(x), x - \bar{x} \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle F(x), x - y^{n_j} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C$. Vì vậy, \bar{x} là một nghiệm của bài toán $VI(C, F)$.

Bây giờ ta chỉ ra tính bị chặn của dãy $\{x^k\}$ trong Thuật toán 1.

Giả sử u là nghiệm duy nhất của Bài toán $BVI(C, G, F)$, từ Bước 3 và Bổ đề 3.1, ta có:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - u\| &= \|z^k - \alpha_k \tau G(z^k) - u\| = \|[z^k - \alpha_k \tau G(z^k)] - [u - \alpha_k \tau G(u)] - \alpha_k \tau G(u)\| \\ &\leq \|[z^k - \alpha_k \tau G(z^k)] - [u - \alpha_k \tau G(u)]\| + \alpha_k \tau \|G(u)\| \\ &\leq (1 - \alpha_k \delta) \|z^k - u\| + \alpha_k \tau \|G(u)\|, \\ &\leq (1 - \alpha_k \delta) \|x^k - u\| + \alpha_k \delta \frac{\tau \|G(u)\|}{\delta} \leq \max \left\{ \|x^k - u\|, \frac{\tau \|G(u)\|}{\delta} \right\} \\ &\leq \dots \leq \max \left\{ \|x^0 - u\|, \frac{\tau \|G(u)\|}{\delta} \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Với $\delta = 1 - \sqrt{1 - \tau(2\beta - \tau L_G^2)} \in (0, 1)$ và $\tau \in (0, \frac{2\beta}{L_G^2})$. Khi đó dãy $\{x^k\}$ bị chặn, kéo theo

các dãy $\{y^k\}$, $\{z^k\}$ cũng bị chặn.

Bây giờ ta áp dụng Bổ đề 3.1 và Bổ đề 3.5, đánh giá

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - u\|^2 &= \|[z^k - \alpha_k \tau G(z^k)] - [u - \alpha_k \tau G(u)] - \alpha_k \tau G(u)\|^2 \\ &\leq \|[z^k - \alpha_k \tau G(z^k)] - [u - \alpha_k \tau G(u)]\|^2 - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_k \delta)^2 \|z^k - u\|^2 - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 - \alpha_k \delta) [\|x^k - u\|^2 - \nu(1 - \nu L_F - 2\gamma_k) \|x^k - y^k\|^2] \\ &\leq -(\nu - \xi_k^2 L_F) \|z^k - y^k\|^2 - (1 - \nu) \|z^k - x^k\|^2 \\ &\quad - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ta đặt $a_k := \|x^k - u\|^2$ với mọi $k \geq 0$, vận dụng cách làm của Maingé, ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Tồn tại một số tự nhiên $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_{k+1} \leq a_k$ với mọi $k \geq k_0$. Khi đó, ta lấy giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A \in [0, \infty)$. Chuyển qua giới hạn của (3.16), dưới giả thiết của các

$$\text{hệ số trong bước khởi tạo, ta được } \lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - x^k\| = 0. \quad (3.17)$$

Sử dụng $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ và $\{G(z^k)\}$ là dãy bị chặn, suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - z^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \tau \|G(z^k)\| = 0. \quad (3.18)$$

Từ tính chất bị chặn của dãy $\{x^k\}$, khi đó tồn tại một dãy con $\{x^{k_j}\}$ của $\{x^k\}$ hội tụ yếu về $\bar{x} \in H$ và $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^k \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{k_j} \rangle = \langle G(u), u - \bar{x} \rangle$. Sử dụng Bổ đề

(3.6) với hệ thức $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = 0$, ta có $\bar{x} \in \text{Sol}(C, F)$ (tức là một nghiệm của bài toán $VI(C, F)$).

Từ (3.18) ta có $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \|x^{k+1} - z^k\| + \|z^k - x^k\| \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. Do đó:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{k+1} \rangle &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^k \rangle + \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), x^k - x^{k+1} \rangle \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^k \rangle + \limsup_{k \rightarrow \infty} \|G(u)\| \|x^k - x^{k+1}\| \\ &= \langle G(u), u - \bar{x} \rangle \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 3.3 ta suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, Do đó, tất cả các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ và $\{z^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất u của bài toán $BVI(C, G, F)$.

Trường hợp 2. Giả sử rằng không tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ là đơn điệu giảm. Vậy, tồn tại một số tự nhiên $k_1 > k_0$ sao cho $a_{k_1} < a_{k_1+1}$. Sử dụng Bổ đề 3.2, ta chỉ ra một dãy con $\{a_{\zeta(k)}\}$ của $\{a_k\}$ như sau: $\zeta(k) = \max\{i : k_1 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\}$.

$$\text{Khi đó, } \zeta(k) \rightarrow \infty, 0 \leq a_k \leq a_{\zeta(k)+1}, a_{\zeta(k)} \leq a_{\zeta(k)+1}, \quad \forall k \geq k_1. \quad (3.19)$$

$$\text{Từ (3.14) ta có } \|x^{\zeta(k)+1} - u\| \leq (1 - \alpha_{\zeta(k)} \delta) \|z^{\zeta(k)} - u\| + \alpha_{\zeta(k)} \tau \|G(u)\|.$$

Sau đó, sử dụng tính bị chặn của $\{z^k\}$ và Bổ đề 3.5 ta được

$$\begin{aligned} \|x^{\zeta(k)} - u\| - \|z^{\zeta(k)} - u\| &\leq \|x^{\zeta(k)} - u\| - \|x^{\zeta(k)+1} - u\| - \alpha_{\zeta(k)} \delta \|z^{\zeta(k)} - u\| \\ &\quad + \alpha_{\zeta(k)} \tau \|G(u)\| \\ &\leq -\alpha_{\zeta(k)} \delta \|z^{\zeta(k)} - u\| + \alpha_{\zeta(k)} \tau \|G(u)\|. \end{aligned}$$

Kết hợp điều này với Bổ đề 3.5 và các giả thiết của hệ số, suy ra

$$\begin{aligned} &v(1 - vL_F - 2\gamma_{\zeta(k)}) \|x^{\zeta(k)} - y^{\zeta(k)}\|^2 \\ &\leq \|x^{\zeta(k)} - u\|^2 - \|z^{\zeta(k)} - u\|^2 \\ &= (\|x^{\zeta(k)} - u\| - \|z^{\zeta(k)} - u\|)(\|x^{\zeta(k)} - u\| + \|z^{\zeta(k)} - u\|) \\ &\leq \left[-\alpha_{\zeta(k)} \delta \|z^{\zeta(k)} - u\| + \alpha_{\zeta(k)} \tau \|G(u)\| \right] (\|x^{\zeta(k)} - u\| + \|z^{\zeta(k)} - u\|) \\ &\rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do đó $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\zeta(k)} - y^{\zeta(k)}\| = 0$. Tương tự, ta có $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\zeta(k)} - z^{\zeta(k)}\| = 0$. Từ $\{x^{\zeta(k)}\}$ bị chặn, khi đó có một dãy con hội tụ yếu. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x^{\zeta(k)} \rightharpoonup \bar{x}$ và $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{\zeta(k)} \rangle = \langle G(u), u - \bar{x} \rangle$. Từ Bổ đề 3.6, suy ra $\bar{x} \in \text{Sol}(C, F)$. Khi đó,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{\zeta(k)} \rangle = \langle G(u), u - \bar{x} \rangle \leq 0. \quad (3.20)$$

Với cách làm tương tự như Trường hợp 1, ta có $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{\zeta(k)+1} \rangle \leq 0$. Từ kết quả (3.18) ta rút ra:

$$\begin{aligned}
a_{\zeta(k)+1} &= \|x^{\zeta(k)+1} - u\|^2 \\
&\leq (1 - \alpha_{\zeta(k)} \delta) \|x^{\zeta(k)} - u\|^2 - 2\alpha_{\zeta(k)} \tau \langle G(u), x^{\zeta(k)+1} - u \rangle \\
&\leq (1 - \alpha_{\zeta(k)} \delta) a_{\zeta(k)} + 2\alpha_{\zeta(k)} \tau \langle G(u), u - x^{\zeta(k)+1} \rangle \\
&\leq (1 - \alpha_{\zeta(k)} \delta) a_{\zeta(k)+1} + 2\alpha_{\zeta(k)} \tau \langle G(u), u - x^{\zeta(k)+1} \rangle.
\end{aligned}$$

Tức là $\delta a_{\zeta(k)+1} \leq 2\tau \langle G(u), u - x^{\zeta(k)+1} \rangle$, kết hợp với (3.20) ta có $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\zeta(k)+1} = 0$. Từ $0 \leq a_k \leq a_{\zeta(k)+1}$ của (3.19), ta có $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Điều phải chứng minh.

4. Kết luận

Trong bài báo này, tác giả đã mở rộng phép chiếu lên nửa không gian đóng H_x để xây dựng thuật toán giải cho bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp $BVI(C, G, F)$. Khó khăn trong các nghiên cứu về lớp bài toán này là miền ràng buộc không cho dưới dạng tường minh, nên các thuật toán chiếu thông thường không thể tìm được lời giải. Tác giả đã chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh bởi Thuật toán 1 về nghiệm duy nhất của bài toán $BVI(C, G, F)$, kết quả này bao quát được rất nhiều lớp bài toán quan trọng, mang tính ứng dụng cao như: Bài toán bất đẳng thức biến phân thông thường, bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, bài toán tối ưu lồi, ...

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Ngọc Anh (2015), *Các phương pháp tối ưu và ứng dụng*, NXB Thông tin và Truyền thông, Hà Nội.
2. Nguyễn Văn Hiền, Lê Dũng Muu và Nguyễn Hữu Điền (2018), *Giải tích lồi ứng dụng*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
3. P.N. Anh, L.T.H. An. (2019), New subgradient extragradient methods for solving monotone bilevel equilibrium problems, *Optimization* 68(11), 2097-2122.
4. M. Bianchi, I.V. Konnov, R. Pini, (2007), Lexicographic variational inequalities with applications, *Optimization* 56(3), 355-367.
5. Ph. Hartman, G. Stampacchia (1966), On some non linear elliptic differential functional equations, *Acta Math.*, 115, p. 271-310.
6. V.V. Kalashnikov, N.I. Klashnikova (1996), Solving two-level variational inequality, *Journal Global Optimization* 8, 289-294.
7. G.M. Korpelevich, (1976), The extragradient method for finding saddle points and other problems, *Ekonomika i Matematicheskie Metody* 12, 747 - 756.
8. P.E. Maing'e (2008), A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems, *SIAM J. Control Optim.*, 47, 1499-1515.
9. S. Saejung, P. Yotkaew, (2012), Approximation of zeros of inverse strongly monotone operators in Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, 75, 724-750.
10. T.V. Thang, P.N. Anh, N.D. Truong (2023), Convergence of the projection and contraction methods for solving bilevel variational inequality problems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 46(9), 10867 - 10885.
11. M.H. Xu, T.H. Kim, (2003), Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalities, *Journal Global Optimization* 119, 185-201.
12. I. Yamada, (2001), The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings, *Stud. Comput. Math.* 8, 473-504.
13. M.H. Xu, M. Li, C.C. Yang (2009), Neural networks for a class of bi-level variational inequalities, *Journal Global Optimization* 44(4), 535-552.