

ĐA TẬP CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRUNG TÍNH VỚI ĐIỀU KIỆN HILLE-YOSIDA

Phạm Văn Bằng¹, Đinh Xuân Khánh^{2,*}, Ngô Quý Đăng³

¹Trường Đại học Kinh tế Kỹ thuật - Công nghiệp

²Trường Đại học Hải Phòng

³Trường Cao đẳng Sư phạm Thái Bình

*Email: khanhdx@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 08/4/2025

Ngày nhận bài sửa: 22/4/2025

Ngày duyệt đăng: 04/9/2025

Tóm tắt: Xét phương trình vi phân trung tính nửa tuyến tính có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial t}Fu_t = (A+B(t))Fu_t + \Omega(t, u_t).$$

Trong đó A là toán tử tuyến tính có miền xác định không trù mật $D(A)$ trong không gian Banach X thỏa mãn điều kiện Hille - Yosida, họ toán tử tuyến tính bị chặn $(B(t))_{t \geq 0}$ trong không gian $L(\overline{D(A)}, X)$, $F : C([-r, 0], X) \rightarrow X$ là toán tử sai phân, $F = \delta_0 - \gamma$ với $\gamma \in L(C([-r, 0], X), X)$, toán tử $A + B(t)$ sinh ra họ tiến hóa có nhị phân mũ và toán tử phi tuyến $\Omega(t, u_t)$ thỏa mãn điều kiện φ - Lipschitz. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại đa tập bất biến ổn định của phương trình vi phân trung tính nửa tuyến tính bằng cách sử dụng một số điều kiện tồn tại nghiệm đủ tốt, công thức biểu diễn nghiệm Lyapunov - Perron, nguyên lý ánh xạ co, điều kiện Lipschitz, bất đẳng thức nón, chuỗi Neumann.

Từ khóa: Đa tập, phương trình tiến hóa, nhị phân mũ, không gian chấp nhận được.

MANIFOLD OF NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS UNDER THE HILLE - YOSIDA CONDITION

Abstract: Consider the semilinear neutral differential equations of the form

$$\frac{\partial}{\partial t}Fu_t = (A+B(t))Fu_t + \Omega(t, u_t).$$

Where A is the linear operator with a non-dense domain $D(A)$ in a Banach space X satisfying the Hille - Yosida condition, a family of bounded linear operators $(B(t))_{t \geq 0}$ in the space $L(\overline{D(A)}, X)$, $F : C([-r, 0], X) \rightarrow X$ is a difference operator, $F = \delta_0 - \gamma$

with $\gamma \in L(C([-r, 0], X), X)$, the $A+B(t)$ operator generates an evolution family having an exponential dichotomy and the $\Omega(t, u_t)$ nonlinear operator satisfies the φ -Lipschitz condition. In this paper, we investigate the existence of the stable invariant manifolds of semi-linear neutral differential equations by using some sufficient conditions for solution existence, the Lyapunov - Perron solution formula, the contraction mapping principle, the Lipschitz condition, cone inequalities, and the Neumann series.

Keywords: Manifold, evolution equations, exponential dichotomy, admissible spaces.

1. Giới thiệu vấn đề

Các phương trình vi phân phát sinh từ các hệ thống tự nhiên, kỹ thuật, như là hệ khuếch tán, hệ xử lý tín hiệu, hệ sinh thái quần thể,... Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân hàm có trễ thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trên thế giới. Đã có nhiều công trình chỉ ra sự tồn tại nghiệm, đáng điều tiếm cận của nghiệm cho phương trình có trễ. Năm 1997 H. Petzeltova và O.J. Staffans đã nghiên cứu về tồn tại nghiệm từ đó chỉ ra đa tạp bất biến đối với phương trình vi phân hàm có trễ. Các tác giả chỉ mới đề cập với trường hợp nhiều phi tuyến không phụ thuộc vào thời gian (liên tục Lipschitz đều). Đối với trường hợp phương trình không ô tô nôm và nhiều phi tuyến phụ thuộc thời gian đến nay vẫn là hướng nghiên cứu mới. Bằng cách chọn không gian và toán tử thích hợp, các phương trình đó có thể viết dưới dạng phương trình vi phân trừu tượng trong không gian Banach thường gọi là phương trình tiến hóa. Năm 2006 N.T.Huy đã tổng quát hóa không gian chấp nhận được và nghiên cứu tính nhị phân mũ của nghiệm [2]. Với việc sử dụng không gian chấp nhận được gần đây N.T.Huy và các cộng sự đã công bố nhiều công trình về sự tồn tại nghiệm, đáng điều tiếm cận của nghiệm cho phương trình vi phân có trễ.

Tuy nhiên đối với phương trình tiến hóa trung tính trở nên phức tạp hơn do trạng thái của phương trình phụ thuộc vào quá khứ và tương lai. Năm 2015 N.T. Huy và P.V. Bằng đã chỉ ra sự tồn tại đa tạp cho phương trình vi phân hàm trung tính với phần tuyến tính là họ toán tử $(B(t))_{t \geq 0}$ sinh ra họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ và trễ phi tuyến thỏa mãn điều kiện φ -Lipschitz. Đối với phương trình vi phân hàm có trễ với phần tuyến tính có dạng $A+B(t)$ trong đó, A là toán tử tuyến tính với thỏa mãn điều kiện Hille – Yosida, $B(t)$ là họ toán tử tuyến tính bị chặn. Jendoubi đã xây dựng công thức nghiệm và đã chứng minh sự tồn tại đa tạp cho phương trình này [4]. Vấn đề đặt ra là đối với phương trình vi phân hàm trung tính có trễ với phần tuyến tính có dạng $A+B(t)$ chúng tôi sẽ nghiên cứu và chỉ ra sự tồn tại đa tạp ổn định cho đó.

2. Tổng quan nghiên cứu, cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

Xét phương trình tiến hóa trung tính:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} Fu_t = (A + B(t))Fu_t + \Omega(t, u_t), t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in \mathcal{C} = C([-r, 0], X) \end{cases} \quad (1)$$

với miền xác định $D(A)$ của toán tử tuyến tính A là không trù mật trong không gian Banach X và toán tử A thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida; họ toán tử tuyến tính bị chặn $(B(t))_{t \geq 0}$ trong không gian $L(\overline{D(A)}, X)$. Ta xét không gian pha của phương trình (1) là $\mathcal{C} = C([-r, 0], X)$ - không gian các hàm liên tục xác định trên $[-r, 0]$ và lấy giá trị trong không gian Banach X . Gọi $F: \mathcal{C} \rightarrow X$ là toán tử sai phân, $F = \delta_0 - \gamma$ với $\gamma \in L(\mathcal{C}, X)$, và $\|\gamma\| < 1$, hàm Dirac δ_0 tập trung tại 0, toán tử trễ $\Omega: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \rightarrow X$ liên tục và $u_t \in \mathcal{C}$ là hàm lịch được xác định $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ với $\theta \in [-r, 0]$.

Phương trình vi phân (1), trong các trường hợp $A, A(t)$, sinh ra nửa nhóm hoặc sinh ra họ tiến hóa liên tục mạnh, một số kết quả về sự tồn tại, ổn định của nghiệm, đa tạp đã được nghiên cứu bởi N.T. Huy và một số cộng sự ([2,3]). Trong trường hợp toán tử A thỏa mãn điều kiện Hille - Yosida và toán tử $A+B(t)$ sinh ra họ tiến hóa được Jendoubi chứng minh tồn tại nghiệm cho phương trình tiến hóa nửa tuyến tính [4,5], đối với phương trình trung tính trong không gian hàm chấp nhận được N.Q. Đăng và P.V.Bằng ([1]) mới chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự tồn tại đa tạp cho phương trình (1), trong trường hợp toán tử tuyến tính A và $A + B(t)$ sinh ra họ tiến hóa có nhị phân mũ, bằng việc sử dụng một số điều kiện tồn tại của không gian ngoại suy [4], nguyên lý ánh xạ co, điều kiện Lipschitz, bất đẳng thức nón, chuỗi Neumann để xem xét sự tồn tại đa tạp nghiệm đối với phương trình (1).

Trong bài báo này chúng tôi sử dụng một số giả thiết và kí hiệu sau:

(A₁) Toán tử A thỏa mãn điều kiện $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$, $(w, +\infty) \subset \rho(A)$ và $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda > w$, tập giải $\rho(A)$ của A và $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

(A₂) Ánh xạ $t \mapsto B(t)x$ là đo được mạnh với mọi $x \in X_0 := \overline{D(A)}$ và tồn tại hàm $l \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ sao cho $\|B(\cdot)\| \leq l(\cdot)$.

(A₃) Ω là φ -Lipschitz.

(A₄) $(U_B(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ là họ tiến hóa có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P_B(t), t \geq 0$ và hằng số $M, \nu > 0$.

Chú ý: Điều kiện của giả thiết (A_1) gọi là điều kiện Hille-Yosida.

3. Kết quả nghiên cứu

Bổ đề 1. [1] $(U_B(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ là họ toán tử tiến hóa sinh bởi toán tử tuyến tính bị chặn tác động trên X_0 có các tính chất sau:

1. $U_B(t,r)U_B(r,s) = U_B(t,s)$ và $U_B(t,t) = Id$ với mọi $t \geq r \geq s \geq 0$.
2. $(t,s) \mapsto U_B(t,s)x$ là ánh xạ liên tục với mọi $x \in X_0$.
3. Tồn tại các hằng số $M, w \geq 0$

sao cho $\|U_B(t,s)x\| \leq Me^{w(t-s)}\|x\|, \forall t \geq s \geq 0, x \in X_0$.

Bổ đề 2. [1] Cho E là không gian hàm Banach chấp nhận được. Ta có các khẳng định sau: (i) Cho $\varphi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$ sao cho $\varphi \geq 0$ và $\Lambda_1\varphi \in E$. Với mọi $\sigma > 0$ ta xác định $\Lambda'_\sigma\varphi$ và $\Lambda''_\sigma\varphi$ như sau:

$$\begin{aligned}\Lambda'_\sigma\varphi(t) &= \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\varphi(s)ds, \\ \Lambda''_\sigma\varphi(t) &= \int_t^\infty e^{-\sigma(s-t)}\varphi(s)ds.\end{aligned}$$

Khi đó, $\Lambda'_\sigma\varphi$ và $\Lambda''_\sigma\varphi$ thuộc E . Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\|\Lambda'_\sigma\varphi\|_\infty &\leq \frac{N_1}{1-e^{-\sigma}}\|\Lambda_1T_1^+\varphi\|_\infty, \\ \|\Lambda''_\sigma\varphi\|_\infty &\leq \frac{N_2}{1-e^{-\sigma}}\|\Lambda_1\varphi\|_\infty.\end{aligned}\tag{2}$$

Định nghĩa 1. [1] Cho E là không gian hàm Banach chấp nhận được và $\varphi \in E$. Toán tử $\Omega: [0, \infty) \times \mathcal{C} \rightarrow X$ được gọi là φ -Lipschitz nếu:

- (i) $\|\Omega(t,0)\| \leq \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}_+$.
- (ii) $\|\Omega(t,\phi_1) - \Omega(t,\phi_2)\| \leq \varphi(t)\|\phi_1 - \phi_2\|_{\mathcal{C}}$, với mọi $t \in \mathbb{R}_+$ và $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}$.

Chú ý: Nếu $\Omega(t,\phi)$ là φ -Lipschitz thì

$$\|\Omega(t,\phi)\| \leq \varphi(t)(1 + \|\phi\|_{\mathcal{C}}), \forall \phi \in \mathcal{C}, t \geq 0.$$

Ta nhắc lại một số kết quả về sự tồn tại nghiệm đủ tốt và công thức biểu diễn nghiệm của phương trình [1]:

Xét phương trình tích phân

$$\begin{cases} Fu_t = U_B(t,s)F\phi + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_s^t U_B(t,\xi)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\xi, u_\xi)d\xi, t \geq s \geq 0 \\ u_s = \phi \in \mathcal{C}. \end{cases}\tag{3}$$

hàm $u : [s - r, \infty) \rightarrow X$, thỏa mãn (3) được gọi là nghiệm đủ tốt của phương trình

(1). Với toán tử $P_B(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ được xác định như sau:

$$P_B(t)(\phi)(\theta) = U_B(t - \theta, t)P_B(t)\phi(0), \forall \theta \in [-r, 0] \quad (4)$$

Hơn nữa, $\forall \theta \in [-r, 0], v_0 \in \text{Im}P(t)$ ta có:

$$\text{Im}P_B(t) = \{\phi \in \mathcal{C} : \phi(\theta) = U_B(t - \theta, t)v_0\} \quad (5)$$

Ta định nghĩa hàm Green như sau:

$$\Gamma_B(t, \tau) = \begin{cases} P_B(t)U_B(t, \tau), t > \tau \geq 0 \\ -U_B(t, \tau)(I - P_B(\tau)), 0 \leq t < \tau \end{cases} \quad (6)$$

Khi đó, ta có đánh giá:

$$\|\Gamma_B(t, \tau)\| \leq M(1 + K)e^{-\nu|t - \tau|}$$

với mọi $t \neq \tau$ và $t, \tau \in \mathbb{R}$, trong đó $K = \sup_{t \geq 0} \|P_B(t)\| < \infty$. Khi đó, với $t \geq s$, $u(t)$

$$\text{thỏa mãn: } \begin{cases} Fu_t = U_B(t, s)v_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_s^\infty \Gamma_B(t, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau \\ u_s = \phi \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (7)$$

trong đó $v_0 \in X_0(s) = P_B(s)X$.

Định lí 1. [1] Giả sử điều kiện (A_1, A_2, A_3, A_4) được thỏa mãn và $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

Với $k := \frac{(N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \phi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \phi\|_\infty) e^{\nu r} (1 + K) M}{1 - e^{-\nu}}$. Khi đó, nếu $\frac{k}{1 - \|\gamma\|} < 1$, thì với mỗi

hàm $\phi \in \text{Im}P_B(s)$ có duy nhất nghiệm $u(t)$ của phương trình (3) trên $[s - r, \infty)$ thỏa mãn $P_B(s)u_s = \phi$ và $\sup_{t \geq s} \|u_t\|_{\mathcal{C}} < \infty$, hàm u_s được xác định bởi $u_s(\theta) = Fu_{s-\theta}$ với mọi $-r \leq \theta \leq 0$.

Định nghĩa 2. Tập $S \subset \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}$ được gọi là đa tạp ổn định bất biến đối với các nghiệm của phương trình (3) nếu với mỗi $t \in \mathbb{R}_+$ không gian pha \mathcal{C} được phân tích thành tổng trực tiếp $\mathcal{C} = X_0(t) \oplus X_1(t)$ với các toán tử chiếu $P_B(t)$ (tức là, $X_0(t) = \text{Im}P_B(t)$ và $X_1(t) = \text{Ker}P_B(t)$) sao cho $\sup_{t \geq 0} \|P_B(t)\| < \infty$, và tồn tại họ ánh xạ liên tục Lipschitz $g_t : X_0(t) \rightarrow X_1(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ với hằng số Lipschitz độc lập với t sao cho:

$$i) S = \{(t, \psi + g_t(\psi)) \in \mathbb{R}_+ \times (X_0(t) \oplus X_1(t)) \text{ với } t \in \mathbb{R}_+, \psi \in X_0(t)\}.$$

Ta ký hiệu $S_t := \{\psi + g_t(\psi) : (t, \psi + g_t(\psi)) \in S\}$,

ii) S_t đồng phôi $X_0(t)$ với mọi $t \geq 0$,

iii) mỗi $\phi \in S_s$ có tương ứng một và chỉ một nghiệm $u(t)$ của phương trình (3) trên $[s-r, \infty)$ thỏa mãn các điều kiện $\tilde{u}_s = \phi$ và $\sup_{t \geq s} \|u_t\|_C < \infty$, ở đây hàm \tilde{u}_s được xác định như trong Định lý 1. Hơn nữa, hai nghiệm bất kỳ $u(t)$ và $v(t)$ của phương trình (3) tương ứng với $\phi_1, \phi_2 \in S_s$ hút nhau cấp mũ, tức là tồn tại các hằng số dương δ và C_δ độc lập với $s \geq 0$ sao cho $\|u_t - v_t\|_C \leq C_\delta e^{-\delta(t-s)} \|P_B(s)\phi_1 - P_B(s)\phi_2\|_C, t \geq s$.

iv) S là F -bất biến đối với phương trình (3) tức là nếu $u(t), t \geq s-r$, là một nghiệm của phương trình (3).

Chú ý: Nếu đồng nhất $X_0(t) \oplus X_1(t)$ với $X_0(t) \times X_1(t)$ thì ta có $S_t = \text{graph}(g_t)$.

Sau đây kết quả về sự tồn tại của đa tạp ổn định cho phương trình (3).

Định lý 2. Giả sử điều kiện (A_1, A_2, A_3, A_4) được thỏa mãn và $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Toán tử sai phân có dạng $F = \delta_0 - \gamma$ với $\gamma \in L(C, X), \|\gamma\| < 1$, và δ_0 là hàm Dirac tập trung tại 0. Giả sử rằng φ là một hàm không âm, thuộc không gian hàm Banach chấp nhận được thỏa mãn $k < \frac{1 - \|\gamma\|}{1 + Ne^{\nu t} (1 + \|\gamma\|)}$ trong đó k được xác định như trong Định lý 1. Khi đó, tồn tại đa tạp ổn định bất biến S đối với các nghiệm của phương trình (3).

Chứng minh

Vì $\{U_B(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ, nên với mỗi $t \geq 0$ không gian pha C được phân tích thành tổng trực tiếp $C = \text{Im}P_B(t) \oplus \text{Ker}P_B(t)$ trong đó các toán tử chiếu $P_B(t), t \geq 0$, được xác định bởi (4). Khi đó, $\sup_{t \geq 0} \|P_B(t)\| < \infty$. Ta xây dựng đa tạp ổn định $S = \{(t, S_t)\}_{t \geq 0}$ đối với các nghiệm của phương trình (3), bằng cách xác định mặt S_t với $t \geq 0$ bởi công thức $S_t := \{\phi + f_t(\phi) : \phi \in \text{Im}P_B(t)\} \subset C$, trong đó mỗi $t_0 \geq 0$, toán tử g_{t_0} được xác định như sau:

$$f_{t_0}(\phi)(\theta) = \int_{t_0}^{\infty} \Gamma_B(t_0 - \theta, \tau) \lambda R(\lambda, A) \Omega(\tau, u_\tau) d\tau \text{ với mọi } \theta \in [-r, 0],$$

ở đây $u(\cdot)$ là nghiệm của phương trình (3) trên $[-r+t_0, \infty)$ thỏa mãn $P_B(t_0)u_{t_0} = \phi$ ($u(\cdot)$ là tồn tại và duy nhất trong Định lý 1). Mặt khác, bởi định nghĩa của hàm Green Γ_B ta có $f_{t_0}(\phi) \in \text{Ker}P_B(t_0)$. Ta chứng minh đa tạp ổn định S thỏa mãn các điều kiện của Định nghĩa 2.

Trước hết ta chứng minh f_{t_0} là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz không phụ thuộc $\{t_0\}$. Thật vậy, với ϕ_1 và ϕ_2 thuộc $\text{Im}P_B(t_0)$ ta có:

$$\begin{aligned} \|f_{t_0}(\phi_1)(\theta) - f_{t_0}(\phi_2)(\theta)\| &\leq M(1+K) \int_{t_0}^{\infty} e^{-v|t_0-\theta-\tau|} \varphi(\tau) \|u_\tau - v_\tau\|_C d\tau \\ &\leq M(1+K)e^{v\tau} \int_{t_0}^{\infty} e^{-v|t_0-\tau|} \varphi(\tau) \|u_\tau - v_\tau\|_C d\tau \\ &\leq M(1+K)e^{v\tau} \sup_{\tau \geq t_0} \|u_\tau - v_\tau\|_C \int_{t_0}^{\infty} e^{-v|t_0-\tau|} \varphi(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{M(1+K)e^{v\tau}}{1-e^{-v}} \left(N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_{\infty} + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_{\infty} \right) \times \sup_{\tau \geq t_0} \|u_\tau - v_\tau\|_C. \end{aligned} \quad (8)$$

Hơn nữa, từ phương trình Lyapunov-Perron đối với $u(\cdot)$ và $v(\cdot)$ ta có

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \geq t_0} \|u_\tau - v_\tau\|_C &\leq \frac{1}{1-\|\gamma\|} \left[(1+\|\gamma\|) M e^{v\tau} \|\phi_1 - \phi_2\|_C \right. \\ &\quad \left. + \frac{M(1+K)e^{v\tau}}{1-e^{-v}} \left(N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_{\infty} + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_{\infty} \right) \times \sup_{\tau \geq t_0} \|u_\tau - v_\tau\|_C \right]. \end{aligned}$$

Do đó, $\sup_{\tau \geq t_0} \|u_\tau - v_\tau\|_C \leq \frac{M e^{v\tau} (1+\|\gamma\|)}{1-k-\|\gamma\|} \|\phi_1 - \phi_2\|_C$. Thay vào bất đẳng thức (8) ta nhận

$$\text{được } \|f_{t_0}(\phi_1) - f_{t_0}(\phi_2)\|_C = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|f_{t_0}(\phi_1)(\theta) - f_{t_0}(\phi_2)(\theta)\| \leq \frac{M k e^{v\tau} (1+\|\gamma\|)}{1-k-\|\gamma\|} \|\phi_1 - \phi_2\|_C.$$

Vậy f_{t_0} là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz $\frac{M k e^{v\tau} (1+\|\gamma\|)}{1-k-\|\gamma\|}$ không phụ thuộc

$\{t_0\}$. Tiếp theo, để chỉ ra rằng S_{t_0} đồng phôi với $\text{Im}P(t_0)$. Ta định nghĩa toán tử

$\mathbf{D}: \text{Im}P_B(t_0) \rightarrow S_{t_0}$ xác định bởi $\mathbf{D}\phi := \phi + f_{t_0}(\phi)$ với mọi $\phi \in \text{Im}P_B(t_0)$. Khi đó, áp dụng

định lý hàm ẩn cho ánh xạ liên tục Lipschitz, ta có hằng số Lipschitz $\frac{M k e^{v\tau} (1+\|\gamma\|)}{1-k-\|\gamma\|} < 1$

hay $k < \frac{1-\|\gamma\|}{1+M e^{v\tau} (1+\|\gamma\|)}$ thì ánh xạ \mathbf{D} là đồng phôi. Do đó, điều kiện (ii) trong Định

nghĩa 2 được thoả mãn.

Điều kiện (iii) nhận được từ Định lí 1, khi đó phương trình (3) có nghiệm duy nhất. Ta sẽ chứng minh hai nghiệm $u(t)$, $v(t)$ hút nhau cấp mũ, tương ứng với hai hàm ban đầu $\phi_1, \phi_2 \in \text{Im}P(s)$. Ta có

$$u(t) - v(t) = (Tu)(t) - (Tv)(t) = [(I - \gamma)^{-1} F_\phi u](t) - [(I - \gamma)^{-1} F_\phi v](t),$$

với $[\gamma u](t) = \begin{cases} \gamma(u_t), & s \leq t \\ \gamma(u_s), & -r \leq t \leq s. \end{cases}$ và F_ϕ được xác định như trong [1]. Sử dụng

chuỗi Neumann

$$u(t) - v(t) = [(F_\phi u)(t) - (F_\phi v)(t)] + [(\gamma F_\phi u)(t) - (\gamma F_\phi v)(t)] + [(\gamma^2 F_\phi u)(t) - (\gamma^2 F_\phi v)(t)] + \dots \quad (9)$$

Theo định nghĩa của F_ϕ , chuẩn của số hạng đầu tiên trong (9) được ước lượng

bởi: $\|(F_\phi u)(t) - (F_\phi v)(t)\| \leq M e^{-v(t-s)} (1 + \|\gamma\|) \|\phi_1(0) - \phi_2(0)\|$

$$+ M(1+K) \int_s^\infty e^{-v(t-\tau)} \varphi(\tau) \|u_\tau - v_\tau\|_C d\tau, t \geq s.$$

Bằng quy nạp, chuẩn của các số hạng thứ n trong (9) được ước lượng:

$$\begin{aligned} \|(\gamma^n F_\phi u)(t) - (\gamma^n F_\phi v)(t)\| &\leq \|\gamma\|^n [M e^{-v(t-s)} (1 + \|\gamma\|) \|\phi_1(0) - \phi_2(0)\| \\ &+ M(1+K) \int_s^\infty e^{-v|t-\tau|} \varphi(\tau) \|u_\tau - v_\tau\|_C d\tau] \quad t \geq s, \end{aligned}$$

và $\|(\gamma^n F_\phi u)(t) - (\gamma^n F_\phi v)(t)\| \leq \|\gamma\|^n [M e^{-v(s-t)} (1 + \|\gamma\|) \|\phi_1(0) - \phi_2(0)\|$

$$M(1+K) \int_s^\infty e^{-v|2s-t-\tau|} \varphi(\tau) \|u_\tau - v_\tau\|_C d\tau],$$

với $s-r \leq t \leq s$. Do $t + \theta \in [-r + t, t]$ với mỗi $\theta \in [-r, 0]$, theo (9) ta có

$$\begin{aligned} \|u_t - v_t\|_C &\leq \frac{1}{1 - \|\gamma\|} [M e^{vr} e^{-v(t-s)} (1 + \|\gamma\|) \|\phi_1(0) - \phi_2(0)\| \\ &+ M(1+K) e^{vr} \int_s^\infty e^{-v|t-\tau|} \varphi(\tau) \|u_\tau - v_\tau\|_C d\tau] \quad \text{với } t \geq s. \end{aligned} \quad (10)$$

Đặt $g(t) = \|u_t - v_t\|_C$. Khi đó, $\sup_{t \geq s} g(t) < \infty$ và

$$g(t) \leq \frac{1}{1 - \|\gamma\|} [M e^{vr} e^{-v(t-s)} (1 + \|\gamma\|) \|\phi_1(0) - \phi_2(0)\| + M(1+K) e^{vr} \int_s^\infty e^{-v|t-\tau|} \varphi(\tau) g(\tau) d\tau], t \geq s. \quad (11)$$

Sử dụng bất đẳng thức nón trên không gian Banach $L_\infty([s, \infty))$ (không gian các hàm bị chặn cốt yếu trên $[s, \infty)$, nhận giá trị thực được trang bị chuẩn $esssup: \|\cdot\|_\infty$) nón \mathcal{K} là tập các hàm không âm. Với $g \in L_\infty([s, \infty))$ ta xét toán tử A được xác định

như sau: $(Af)(t) = \frac{M(1+K)e^{vr}}{1 - \|\gamma\|} \int_s^\infty e^{-v|t-\tau|} \varphi(\tau) f(\tau) d\tau, t \geq s.$

Theo Mệnh đề của nửa nhóm toán tử, ta có

$$\sup_{t \geq s} (Af)(t) = \sup_{t \geq s} \frac{M(1+K)e^{\nu t}}{1-\|\gamma\|} \int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) f(\tau) d\tau \leq \frac{k}{1-\|\gamma\|} \|f\|_\infty.$$

Do đó, $A \in \mathcal{L}(L_\infty([s, \infty)))$ và $\|A\| \leq \frac{k}{1-\|\gamma\|} < 1$. Rõ ràng, nó là bất biến với

toán tử A . Bất đẳng thức (11) có dạng $g \leq Ag + z$ với

$$z(t) = \frac{1}{1-\|\gamma\|} \left[Me^{\nu t} e^{-\nu(t-s)} (1+\|\gamma\|) \|\phi_1(0) - \phi_2(0)\| \right].$$

Theo bất đẳng thức nó, ta có $g \leq f$ trong đó f là nghiệm trong $L_\infty([s, \infty))$ của phương trình $f \leq Af + z$. Phương trình này có dạng:

$$f(t) = \frac{1}{1-\|\gamma\|} \left[Me^{\nu t} e^{-\nu(t-s)} (1+\|\gamma\|) \|\phi_1(0) - \phi_2(0)\| + M(1+K)e^{\nu t} \int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (12)$$

với $t \geq s \geq 0$.

Để ước lượng f , ta đặt $w(t) = e^{\delta(t-s)} f(t)$ với $t \geq s \geq 0$. Khi đó, với $t \geq s$ ta có

$$\begin{aligned} w(t) = & \frac{1}{1-\|\gamma\|} \left[Me^{\nu t} e^{-(\nu-\delta)(t-s)} (1+\|\gamma\|) \|\phi_1(0) - \phi_2(0)\| \right. \\ & \left. + M(1+K)e^{\nu t} \int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|+\delta(t-\tau)} \varphi(\tau) w(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Ta xét toán tử D xác định trên $L_\infty([s, \infty))$ như sau:

$$(D\phi)(t) = \frac{M(1+K)e^{\nu t}}{1-\|\gamma\|} \int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|+\delta(t-\tau)} \varphi(\tau) \phi(\tau) d\tau, \quad \text{với } t \geq s.$$

Ta thấy rằng $D \in \mathcal{L}(L_\infty([s, \infty)))$ và

$$\|D\| \leq \frac{M(1+K)e^{\nu t}}{(1-\|\gamma\|)(1-e^{-(\nu-\delta)})} \left(N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \phi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \phi\|_\infty \right)$$

Phương trình (13) có dạng $Dw + \tilde{z}$ với

$$\tilde{z}(t) = \frac{1}{1-\|\gamma\|} Ne^{\nu t} e^{-(\nu-\delta)(t-s)} (1+\|\gamma\|) \times \|\phi_1(0) - \phi_2(0)\|.$$

Ta có $\|D\| < 1$ nếu $0 < \delta < \nu + \ln \left[1 - \frac{M(1+K)e^{\nu t}}{1-\|\gamma\|} \times (N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \phi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \phi\|_\infty) \right]$ thì

phương trình $w = Dw + \tilde{z}$ có duy nhất nghiệm $w \in L_\infty([s, \infty))$ và $w = (I - D)^{-1} \tilde{z}$. Do đó, ta có ước lượng sau:

$$\begin{aligned}\|w\|_\infty &= \|(I-D)^{-1}\tilde{z}\|_\infty \leq \frac{Me^{vr}(1+\|\gamma\|)}{(1-\|D\|)(1-\|\gamma\|)}\|\phi_1(0)-\phi_2(0)\| \\ &\leq \frac{Me^{vr}(1+\|\gamma\|)\|\phi_1(0)-\phi_2(0)\|}{1-\|\gamma\|-\frac{M(1+K)e^{vr}}{1-e^{-(v-\delta)}}(N_1\|\Lambda_1T_1^+\varphi\|_\infty+N_2\|\Lambda_1\varphi\|_\infty)} = C_\delta\|\phi_1(0)-\phi_2(0)\|.\end{aligned}$$

Suy ra $w(t) \leq C_\delta\|\phi_1-\phi_2\|_C$ với $t \geq s$. Nên,

$$g(t) = \|u_t - v_t\|_C \leq f(t) = e^{-\delta(t-s)}w(t) \leq C_\delta e^{-\delta(t-s)}\|\phi_1(0)-\phi_2(0)\|.$$

Ta kiểm tra điều kiện (iv) trong Định nghĩa 2. Thật vậy, gọi $u(\cdot)$ là nghiệm của phương trình (3) sao cho hàm $\tilde{u}_s \in S_s$. Khi đó, nghiệm $u(t)$ thỏa mãn phương trình:

$$Fu_t = U_B(t,s)v_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_s^\infty \Gamma_B(t,\tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau \quad \text{với } t \geq s, v_0 \in \text{Im}P_B(s).$$

Do đó, với $t \geq s$ và $\theta \in [-r, 0]$, ta có:

$$\begin{aligned}Fu_{t-\theta} &= U_B(t-\theta, s)v_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_s^\infty \Gamma_B(t-\theta, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau \\ &= U_B(t-\theta, s)v_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_s^t \Gamma_B(t-\theta, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_t^\infty \Gamma_B(t-\theta, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau \\ &= U_B(t-\theta, s)v_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_s^t U_B(t-\theta, \tau)P(\tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_t^\infty \Gamma_B(t-\theta, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau \\ &= U_B(t-\theta, t)[U_B(t, s)v_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_s^t U_B(t, \tau)P(\tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau] \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_t^\infty \Gamma_B(t-\theta, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau \\ &= U_B(t-\theta, t)[U_B(t, s)v_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_s^t U_B(t, \tau)P(\tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau] \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_t^\infty \Gamma_B(t-\theta, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau\end{aligned}$$

với mọi $-r \leq \theta \leq 0$.

Đặt $\mu_0 = U_B(t, s)v_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_s^t U_B(t, \tau)P(\tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau$. Khi đó, ta có $P_B(t)\mu_0 = \mu_0$, nên $\mu_0 \in \text{Im}P_B(t)$. Do đó, hàm $\phi(\theta) := U_B(t-\theta, t)\mu_0, -r \leq \theta \leq 0$ thuộc $\text{Im}P_B(t)$ và với mọi $-r \leq \theta \leq 0$, ta có:

$$Fu_{t-\theta} = U_B(t-\theta, t)\mu_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_t^\infty \Gamma_B(t-\theta, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_\tau) d\tau$$

Do $u(\cdot)$ là nghiệm duy nhất trên $[s-r, \infty)$ (Định lí 1), nên $u(\cdot)$ cũng là nghiệm của phương trình (3) trên $[-r+t, \infty)$ thỏa mãn $P_B(t)u_t = \phi$ và

$$Fu_{\xi} = U_B(2t - \xi, t)\mu_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} \Gamma_B(2t - \xi, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_{\tau})d\tau \text{ với } \xi \in [-r+t, t].$$

Do đó, với $t \geq s$ hàm \tilde{u}_t thỏa mãn:

$$\tilde{u}_t(\theta) = Fu_{t-\theta} = U_B(t - \theta, t)\mu_0 + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} \Gamma_B(t - \theta, \tau)\lambda R(\lambda, A)\Omega(\tau, u_{\tau})d\tau = \phi(\theta) + g_t(\phi)(\theta)$$

với mọi $-r \leq \theta \leq 0$. Vậy, $\tilde{u}_t \in S_t$ với $t \geq s$. Do đó, Định lí 2 được chứng minh.

4. Kết luận

Bài báo đã chứng minh sự tồn tại đa tạp cho phương trình trung tính (1) với phần tuyến tính thỏa mãn điều kiện Hille - Yosida. Hơn nữa hai nghiệm bất kỳ trên đa tạp hút nhau theo cấp mũ. Đây là kết quả về dáng điệu tiệm cận của phương trình vi phân hàm trung tính (1).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ngô Quý Đăng, Phạm Văn Bằng (2024), Nghiệm của phương trình vi phân trung tính với phần tuyến tính thỏa mãn điều kiện Hille - Yosida, *Tạp chí Khoa học & Công nghệ*, Số 43, 47-53.
2. N.T. Huy (2006), Exponential dichotomy of evolution equations and admissibility of function spaces on a half-line, *J. Funct. Anal*, 235, 330-354.
3. N.T. Huy and P.V. Bang (2015), Invariant stable manifolds for partial neutral functional differential equations in admissible spaces on a half-line, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, Volume 20, Number 9, 2993 - 3011.
4. Jendoubi C (2017), Integral manifolds of a class of delayed partial differential equations with nondense domain, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38:1024-1044.
5. Jendoubi C (2019), On the theory of periodic solution for some nondensely nonautonomous delayed partial differential equations, *Math. Methods Appl. Sci.* 42, no. 18, 6588-6606.