

GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN GIẢ ĐƠN ĐIỆU BẰNG MỘT PHÉP CHIẾU XẤP XỈ

Hồ Phi Tứ^{1,*}, Phạm Văn Lực², Nguyễn Thị Mai Anh³,
Nguyễn Tiến Sơn⁴, Trương Yến Nhi⁵
^{1,3,4,5}*Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Phòng*
²*Trường THPT Marie Curie, Hải Phòng*
**Email: tuhp@dhhp.edu.vn*

Ngày nhận bài: 04/8/2025

Ngày nhận bài sửa: 20/8/2025

Ngày duyệt đăng: 04/9/2025

Tóm tắt: Trong nghiên cứu này, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu. Thuật toán chỉ sử dụng một phép chiếu xấp xỉ tại mỗi bước lặp, điều này giúp giảm đáng kể chi phí tính toán cho thuật toán của chúng tôi. Bên cạnh đó chúng tôi kết hợp với các kỹ thuật rất phổ biến hiện nay là kỹ thuật quán tính và kỹ thuật bước nhảy tự thích nghi. Trong đó, kỹ thuật quán tính giúp tăng tốc thuật toán và kỹ thuật bước nhảy tự thích nghi để tránh điều kiện phải biết trước hệ số Lipschitz của ánh xạ giá, điều này khó thực hiện trong các ứng dụng thực tế. Thuật toán được đề xuất khá đơn giản, hơn nữa, nó giảm nhẹ các giả thiết cần thiết để thu được sự hội tụ về nghiệm của bài toán ban đầu. Trong phương pháp chúng tôi đề xuất chỉ yêu cầu tính giả đơn điệu của ánh xạ giá và không cần biết trước hệ số Lipschitz của ánh xạ giá. Bên cạnh đó, định lý hội tụ của thuật toán cũng được thiết lập và chứng minh một cách chi tiết trong bài báo.

Từ khóa: Bài toán bất đẳng thức biến phân, tính giả đơn điệu, kỹ thuật quán tính, tự cập nhật bước nhảy.

SOLVING PSEUDO-MONOTONE VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS VIA AN APPROXIMATE PROJECTION METHOD

Abstract: In this study, the authors propose a new algorithm for solving pseudo-monotone variational inequality problems. The algorithm only requires a single projection at each iteration, which significantly reduces the computational cost. In addition, we incorporate two widely used techniques: the inertial technique and the adaptive stepsize strategy. In this context, the inertial technique serves to accelerate the convergence of the algorithm while the adaptive stepsize rule eliminates the need to know the Lipschitz constant of the price mapping in advance, which is often impractical in real-world applications. The proposed method is simple to implement and relaxes

the required assumptions to obtain the convergence to a solution of the original problem. In the method proposed, the algorithm only requires the pseudo-monotonicity of the operator but does not rely on its Lipschitz continuity. Moreover, a rigorous convergence theorem is established and proven in detail within this paper.

Key words: Variational inequality problem, pseudo-monotonicity, inertial technique, adaptive stepsize.

1. Giới thiệu

Lý thuyết bất đẳng thức biến phân ra đời vào những năm 60, là một công cụ mạnh và thống nhất để nghiên cứu các bài toán cân bằng. Theo Harker và Pang (xem [7]), bài toán bất đẳng thức biến phân được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1966 bởi Hartman và Stampacchia. Những nghiên cứu đầu tiên về bất đẳng thức biến phân liên quan tới việc giải các bài toán biến phân, bài toán điều khiển tối ưu và các bài toán biên cho phương trình đạo hàm riêng. Bài toán biến phân trong không gian vô hạn chiều và các ứng dụng của nó được giới thiệu trong cuốn sách “An introduction to variational inequalities and their application” của Kinderlehrer và Stampacchia (xem[11]) xuất bản năm 1980 và trong cuốn sách “Variational and quasivariational inequalities: Application to free boundry problems” của Baiocchi và Capelo xuất bản năm 1984.

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert H , xét ánh xạ $F : H \rightarrow H$. Bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) được phát biểu như sau:

Tìm một điểm x^* thuộc tập C sao cho $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \quad (1)$

Điểm x^* được gọi là nghiệm của bài toán (VIP), tập hợp tất cả các nghiệm của (VIP) thường được ký hiệu $Sol(C, F)$. Ánh xạ F được gọi là ánh xạ giá.

Bài toán bất đẳng thức biến phân là một công cụ khá hữu ích trong việc nghiên cứu và giải nhiều bài toán kiểu cân bằng trong kinh tế, cơ khí, nghiên cứu toán tử và vật lý toán (xem [3, 4, 7, 12]). Bài toán bất đẳng thức biến phân có quan hệ mật thiết với các bài toán tối ưu khác. Bài toán bù phi tuyến, xuất hiện vào năm 1964 trong luận án tiến sĩ của Cottle, là một trường hợp đặc biệt của bài toán bất đẳng thức biến phân. Gần đây, bài toán bất đẳng thức biến phân cũng là một đề tài được nhiều người quan tâm nghiên cứu vì vai trò của nó được sử dụng như một công cụ lập trình toán học trong mô hình một lớp rộng các vấn đề phát sinh trong một số ngành khoa học thuần túy và ứng dụng.

Như chúng ta đã biết với mỗi điểm $x \in H$, tồn tại duy nhất một điểm gần nhất trong C , được ký hiệu là $P_C(x)$, sao cho $\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in C$. P_C được gọi là phép chiếu metric của H vào C và phép chiếu này được sử dụng khá phổ biến trong

các thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán (VIP). Trong bài báo này chúng tôi sử dụng phép chiếu xấp xỉ mà việc xác định nó đơn giản hơn phép chiếu chính xác, đặc biệt là trong trường hợp tập ràng buộc C không đơn giản. Cụ thể phép chiếu xấp xỉ được định nghĩa như sau: với u là một phần tử bất kỳ trong C và ε là một số thực không âm, phép chiếu xấp xỉ của $x \in C$ gần với phần tử u với sai số tính toán ε là một tập được ký hiệu $P_C^{\varepsilon,u}(x)$ và được xác định như sau:

$$P_C^{\varepsilon,u}(x) = \left\{ w \in C : \langle x - w, v - w \rangle \leq \varepsilon \|w - u\|^2, \forall v \in C \right\}.$$

Để $P_C(x)$ là một phần tử trong $P_C^{\varepsilon,u}(x)$ với mọi $\varepsilon \geq 0$ và $u \in C$. Hơn nữa, khi $\varepsilon = 0$ thì $P_C^{\varepsilon,u}(x)$ chính là $P_C(x)$ nói cách khác $P_C^{\varepsilon,u}(x)$ là một mở rộng của $P_C(x)$.

2. Tổng quan nghiên cứu

Trong những năm gần đây bài toán (VIP) nhận được rất nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học trong nước cũng như trên thế giới, bởi bài toán không những có ý nghĩa sâu sắc về mặt lý thuyết mà còn đóng một vai trò rất quan trọng trong các ứng dụng thực tiễn trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Các hướng nghiên cứu chính của bài toán (VIP) bao gồm: Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, cấu trúc và tính ổn định của tập nghiệm. Các kết quả nổi bật về hướng nghiên cứu này phải được nhắc đến với các nhóm nghiên cứu trong, ngoài nước của ND. Yen và cộng sự (xem [10, 21]), của PQ. Khanh và cộng sự (xem [8, 9]), của BS. Mordukhovich và cộng sự (xem [15, 16]), ngoài ra còn có một số tác giả khác (xem [14, 17]); hướng thứ hai là nghiên cứu các thuật giải và sự hội tụ của các thuật giải (xem [19, 20]); cuối cùng là ứng dụng của bài toán vào các vấn đề thực tế đặc biệt là các mô hình kinh tế (xem [1]). Trong các hướng nghiên cứu trên thì các phương pháp giải đóng một vai trò rất quan trọng. Trong những năm gần đây nhiều phương pháp giải số cho bài toán được đề xuất. Đầu tiên phải kể đến là phương pháp chiếu một lần. Tuy nhiên phương pháp này chỉ áp dụng cho lớp bài toán với song hàm giá đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz. Để khắc phục hạn chế này Korpelevich (xem [13]) đề xuất phương pháp đạo hàm tăng cường (phương pháp chiếu hai lần), phương pháp này có thể áp dụng cho lớp hàm đơn điệu thậm chí là giả đơn điệu. Hạn chế của phương pháp này là tại mỗi bước lặp phải thực hiện hai lần phép chiếu lên tập ràng buộc C . Điều này ảnh hưởng đáng kể đến tốc độ của thuật toán khi tập C phức tạp. Vào năm 2011 Censor và các cộng sự (xem [5]) giới thiệu phương pháp chiếu dưới đạo hàm tăng cường đã phần nào khắc phục được những hạn chế của phương pháp mà Korpelevich đưa ra.

Ngày nay nhiều kỹ thuật được đề xuất kết hợp với các phương pháp trên đã được nhiều tác giả đưa ra nhằm tăng tốc thuật toán đồng thời giảm nhẹ các điều kiện áp lên

ánh xạ giá. Thứ nhất phải kể đến là kỹ thuật lặp quán tính giúp cải thiện tốc độ của thuật toán, tiếp theo là kỹ thuật tự cập nhật stepsize giúp bỏ qua điều kiện biết trước hệ số Lipschitz của song hàm giá (việc xác định hệ số này rất khó khăn trong các bài toán thực tế). Ngoài ra còn có một số kỹ thuật khác như, chiếu co rút, chiếu hỗn hợp, lặp Amijo, ... Trong nghiên cứu này chúng tôi kết hợp kỹ thuật lặp quán tính và stepsize tự cập nhật đề xuất một thuật toán mới với chỉ một phép chiếu xấp xỉ tại mỗi bước lặp để giải bài toán (VIP) giả đơn điệu.

Sau đây là một số bổ đề kỹ thuật mà chúng tôi sử dụng trong chứng minh sự hội tụ của thuật toán.

Bổ đề 2.1 (xem [2]) Cho $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ và $\{c_k\}$ là 3 dãy số thực không âm thỏa mãn bất đẳng thức $a_{k+1} \leq a_k + b_k(a_k - a_{k-1}) + c_k$ $k \geq 1$, trong đó $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$ và tồn tại số thực b sao cho $0 \leq b_k \leq b < 1 \forall k \in \mathbb{N}$.

Khi đó

$$(1) \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k - a_{k-1}]_+ < +\infty, \text{ trong đó } [t]_+ = \max\{t, 0\};$$

$$(2) \text{ Tồn tại } a^* \geq 0 \text{ sao cho } \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = a^*.$$

Bổ đề 2.2 (xem [6]) Cho C là một tập con khác rỗng trong H và $\{x_n\}$ là một dãy trong H sao cho hai điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$(1) \text{ Với mỗi } x \in C, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \text{ tồn tại};$$

$$(2) \text{ Mọi điểm tụ yếu của } \{x_n\} \text{ đều thuộc } C.$$

Khi đó $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến một điểm trong C .

Bổ đề 2.3 (xem [18]) Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong H , ánh xạ F từ C vào H giả đơn điệu và liên tục. Khi đó ta có $x^* \in \text{Sol}(C, F) \Leftrightarrow \langle Fx, x - x^* \rangle \geq 0 \forall x \in C$.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Thuật toán đề xuất

Bước 0. Chọn $z_0, z_1 \in C$, $0 < \mu, \delta < 1$, $0 \leq \varepsilon, \lambda < 1$, $\tau_0 > 0$ và gán $n := 1$.

Bước 1. Tính

$$\begin{cases} u_n = z_n + \lambda(z_n - z_{n-1}), \\ y_{n+1} \in P_C^{\varepsilon, \mu_n}(u_n - \tau_n F u_n). \end{cases}$$

Nếu $y_{n+1} = u_n$ dừng thuật toán. Ngược lại, chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Tính $z_{n+1} = y_{n+1} - \tau_n (Fy_n - Fu_n)$,

Trong đó stepsize τ_n được cập nhật bằng công thức sau

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \tau_n & \text{khi } \tau_n \|Fy_{n+1} - Fu_n\| \leq \mu \|y_{n+1} - u_n\| \\ \sigma \tau_n & \text{khi } \tau_n \|Fy_{n+1} - Fu_n\| > \mu \|y_{n+1} - u_n\| \end{cases} \quad (2)$$

Bước 3. Gán $k := k + 1$ chuyển về Bước 1.

3.2. Chứng minh sự hội tụ của thuật toán

Để thiết lập và chứng minh định lý hội tụ của thuật toán trên, ta cần các điều kiện sau: *Điều kiện 3.1.* Tập nghiệm $Sol(C, F)$ không rỗng. *Điều kiện 3.2.* Ánh xạ $F : H \rightarrow H$ là giả đơn điệu trên H .

Điều kiện 3.3. Ánh xạ $F : H \rightarrow H$ là liên tục Lipschitz với hằng số $L > 0$.

Các tham số được chọn thỏa mãn

$$\begin{cases} \mu, \varepsilon, \lambda \in [0, 1) \\ 1 - 2\varepsilon - \mu^2 > 0 \\ 0 \leq \lambda < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ 2\varepsilon + \mu^2 < 1 - \lambda - \lambda^2 \end{cases}$$

Trước hết ta có các bổ đề sau

Bổ đề 3.1 *Tồn tại số tự nhiên N để với mọi $n \geq N$ ta có*

$$\|z_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|u_n - x^*\|^2 - (1 - 2\varepsilon - \mu^2) \|y_{n+1} - u_n\|^2 \quad \forall x^* \in Sol(C, F). \quad (3)$$

Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - x^*\|^2 &= \|y_{n+1} - \tau_n (Fy_{n+1} - Fu_n) - x^*\|^2 \\ &= \|y_{n+1} - x^*\|^2 + \tau_n^2 \|Fy_{n+1} - Fu_n\|^2 - 2\tau_n \langle y_{n+1} - x^*, Fy_{n+1} - Fu_n \rangle \\ &= \|u_n - x^*\|^2 + \|u_n - y_{n+1}\|^2 - 2 \langle y_{n+1} - u_n, u_n - x^* \rangle + \tau_n^2 \|Fy_{n+1} - Fu_n\|^2 \\ &\quad - 2\tau_n \langle y_{n+1} - x^*, Fy_{n+1} - Fu_n \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|u_n - x^*\|^2 + \|u_n - y_{n+1}\|^2 - 2\langle y_{n+1} - u_n, y_{n+1} - u_n \rangle + 2\langle y_{n+1} - u_n, y_{n+1} - x^* \rangle \\
&\quad + \tau_n^2 \|Fy_{n+1} - Fu_n\|^2 - 2\tau_n \langle y_{n+1} - x^*, Fy_{n+1} - Fu_n \rangle \\
&= \|u_n - x^*\|^2 - \|u_n - y_{n+1}\|^2 + 2\langle y_{n+1} - u_n, y_{n+1} - x^* \rangle + \tau_n^2 \|Fy_{n+1} - Fu_n\|^2 \\
&\quad - 2\tau_n \langle y_{n+1} - x^*, Fy_{n+1} - Fu_n \rangle. \tag{4}
\end{aligned}$$

Từ $y_{n+1} \in P_C^{\varepsilon, u_n}(u_n - \tau_n Fu_n)$, ta có

$$\langle y_{n+1} - u_n + \tau_n Fu_n, y_{n+1} - x^* \rangle \leq \varepsilon \|y_{n+1} - u_n\|^2,$$

tương đương với

$$\langle y_{n+1} - u_n, y_{n+1} - x^* \rangle \leq -\tau_n \langle Fu_n, y_{n+1} - x^* \rangle + \varepsilon \|y_{n+1} - u_n\|^2. \tag{5}$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$\begin{aligned}
\|z_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \|u_n - x^*\|^2 - (1 - 2\varepsilon) \|u_n - y_{n+1}\|^2 - 2\tau_n \langle Fu_n, y_{n+1} - x^* \rangle + \tau_n^2 \|Fy_{n+1} - Fu_n\|^2 \\
&\quad - 2\tau_n \langle y_{n+1} - x^*, Fy_{n+1} - Fu_n \rangle \\
&= \|u_n - x^*\|^2 - (1 - 2\varepsilon) \|u_n - y_{n+1}\|^2 + \tau_n^2 \|Fy_{n+1} - Fu_n\|^2 - 2\tau_n \langle y_{n+1} - x^*, Fy_{n+1} \rangle. \tag{6}
\end{aligned}$$

Từ $x^* \in \text{Sol}(C, F)$, ta có $\langle Fx^*, y_{n+1} - x^* \rangle \geq 0$ kết hợp với tính giả đơn điệu của toán tử F suy ra $\langle Fy_{n+1}, y_{n+1} - x^* \rangle \geq 0$.

Điều này, cùng với (6), ta có

$$\|z_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|u_n - x^*\|^2 - (1 - 2\varepsilon) \|u_n - y_{n+1}\|^2 + \tau_n^2 \|Fy_{n+1} - Fu_n\|^2. \tag{7}$$

Theo (2), nên tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\tau_n \|Fu_n - Fy_{n+1}\| \leq \mu \|u_n - y_{n+1}\| \quad \forall n \geq N. \tag{8}$$

Kết hợp (8) với (7), ta thu được

$$\|z_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|u_n - x^*\|^2 - (1 - 2\varepsilon - \mu^2) \|y_{n+1} - u_n\|^2.$$

Bổ đề 3.1 được chứng minh xong.

Bổ đề 3.2 *Tồn tại giới hạn* $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x^*\|$.

Chứng minh.

Theo định nghĩa của z_{n+1} , ta có

$$\|z_{n+1} - y_{n+1}\| = \|y_{n+1} - \tau_n (Fy_{n+1} - Fu_n) - y_{n+1}\| \leq \tau_n \|Fy_{n+1} - Fu_n\| \leq \mu \|y_{n+1} - u_n\|.$$

Vì vậy ta có

$$\|z_{n+1} - u_n\| \leq \|z_{n+1} - y_{n+1}\| + \|y_{n+1} - u_n\| \leq (1 + \mu)\|y_{n+1} - u_n\|.$$

Hay

$$\|y_{n+1} - u_n\| \geq \frac{1}{(1 + \mu)} \|z_{n+1} - u_n\|. \quad (9)$$

Với $x^* \in \text{Sol}(C, F)$, theo Bổ đề 3.1, ta có

$$\|z_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|u_n - x^*\|^2 - (1 - 2\varepsilon - \mu^2)\|y_{n+1} - u_n\|^2. \quad (10)$$

Từ (9) và (10) suy ra

$$\|z_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|u_n - x^*\|^2 - \frac{(1 - 2\varepsilon - \mu^2)}{(1 + \mu)^2} \|z_{n+1} - u_n\|^2. \quad (11)$$

Mặt khác theo định nghĩa của u_n , ta có

$$\begin{aligned} \|u_n - x^*\|^2 &= \|z_n + \lambda(z_n - z_{n-1}) - x^*\|^2 \\ &= \|(1 + \lambda)(z_n - x^*) - \lambda(z_{n-1} - x^*)\|^2 \\ &= (1 + \lambda)\|z_n - x^*\|^2 - \lambda\|z_{n-1} - x^*\|^2 + \lambda(1 + \lambda)\|z_n - z_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Bây giờ từ (11) và (12) suy ra

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - x^*\|^2 &\leq (1 + \lambda)\|z_n - x^*\|^2 - \lambda\|z_{n-1} - x^*\|^2 + \lambda(1 + \lambda)\|z_n - z_{n-1}\|^2 \\ &\quad - \frac{(1 - 2\varepsilon - \mu^2)}{(1 + \mu)^2} \|z_{n+1} - u_n\|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\leq (1 + \lambda)\|z_n - x^*\|^2 - \lambda\|z_{n-1} - x^*\|^2 + \lambda(1 + \lambda)\|z_n - z_{n-1}\|^2. \quad (14)$$

Lại có

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - u_n\|^2 &= \|z_{n+1} - z_n - \lambda(z_n - z_{n-1})\|^2 \\ &= \|z_{n+1} - z_n\|^2 + \lambda^2\|z_n - z_{n-1}\|^2 - 2\lambda\langle z_{n+1} - z_n, z_n - z_{n-1} \rangle \\ &\geq \|z_{n+1} - z_n\|^2 + \lambda^2\|z_n - z_{n-1}\|^2 - 2\lambda\|z_{n+1} - z_n\|\|z_n - z_{n-1}\| \\ &\geq (1 - \lambda)\|z_{n+1} - z_n\|^2 + (\lambda^2 - \lambda)\|z_n - z_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Kết hợp (13) và (15), ta được với mọi $n \geq N$

$$\begin{aligned}
& \|z_{n+1} - x^*\|^2 \leq (1+\lambda)\|z_n - x^*\|^2 - \lambda\|z_{n-1} - x^*\|^2 + \lambda(1+\lambda)\|z_n - z_{n-1}\|^2 \\
& - \frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(1-\lambda)\|z_{n+1} - z_n\|^2 - \frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(\lambda^2 - \lambda)\|z_n - z_{n-1}\|^2 \\
& = (1+\lambda)\|z_n - x^*\|^2 - \lambda\|z_{n-1} - x^*\|^2 - \frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(1-\lambda)\|z_{n+1} - z_n\|^2 \\
& + \left[\lambda(1+\lambda) - \frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(\lambda^2 - \lambda) \right] \|z_n - z_{n-1}\|^2 \\
& = (1+\lambda)\|z_n - x^*\|^2 - \lambda\|z_{n-1} - x^*\|^2 - \gamma\|z_{n+1} - z_n\|^2 + \mu\|z_n - z_{n-1}\|^2, \quad (16)
\end{aligned}$$

trong đó

$$\gamma := \frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(1-\lambda), \quad \mu := \left[\lambda(\lambda+1) - \frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(\lambda^2 - \lambda) \right].$$

Với $\mu \in (0, 1)$ và $\lambda, \varepsilon \in [0, 1)$ không khó để nhận ra $\gamma, \mu > 0$. Ta thiết lập dãy

$$\{\Gamma_n\} \quad \Gamma_n := \|z_n - x^*\|^2 - \lambda\|z_{n-1} - x^*\|^2 + \mu\|z_n - z_{n-1}\|^2.$$

Khi đó, theo điều (16) ta có

$$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n \leq -(\gamma - \mu)\|z_{n+1} - z_n\|^2 \quad \forall n \geq N. \quad (17)$$

Ta cũng thấy rằng:

$$\begin{aligned}
\gamma - \mu &= \left[\frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(1-\lambda) - \left(\lambda(1+\lambda) - \frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(\lambda^2 - \lambda) \right) \right] \\
&= \frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(1-\lambda)^2 - \lambda(1+\lambda). \quad (18)
\end{aligned}$$

Sử dụng giả thiết $0 \leq \lambda < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ và $2\varepsilon + \mu^2 < -\lambda^2 - \lambda + 1 < 1$, ta thu được

$$\frac{(1-2\varepsilon - \mu^2)}{(1+\mu)^2}(1-\lambda)^2 - \lambda(1+\lambda) > (1-2\varepsilon - \mu^2) - \lambda(1+\lambda) = -\lambda^2 - \lambda + 1 - 2\varepsilon - \mu^2 > 0.$$

Điều này chỉ ra rằng $\gamma - \mu > 0$.

Đặt $\delta := \gamma - \mu$. Tiếp đến, từ (17) và (18), ta được

$$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n \leq -\delta\|z_{n+1} - z_n\|^2 \quad \forall n \geq N. \quad (19)$$

Từ đó ta có

$$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n \leq 0 \quad \forall n \geq N.$$

Vậy dãy $\{\Gamma_n\}$ giảm dần khi $n \geq N$. Mặt khác, ta có

$$\Gamma_n = \|z_n - x^*\|^2 - \lambda \|z_{n-1} - x^*\|^2 + \mu_n \|z_n - z_{n-1}\|^2 \geq \|z_n - x^*\|^2 - \lambda \|z_{n-1} - x^*\|^2.$$

Điều này có nghĩa là:

$$\begin{aligned} \|z_n - x^*\|^2 &\leq \lambda \|z_{n-1} - x^*\|^2 + \Gamma_n \leq \lambda \|z_{n-1} - x^*\|^2 + \Gamma_N \\ &\leq \dots \\ &\leq \lambda^{n-N} \|z_N - x^*\|^2 + \Gamma_N (\lambda^{n-N-1} + \dots + 1) \\ &\leq \lambda^{n-N} \|z_N - x^*\|^2 + \frac{\Gamma_N}{1-\lambda} \end{aligned} \quad (20)$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1} &= \|z_{n+1} - x^*\|^2 - \lambda \|z_n - x^*\|^2 + \mu \|z_{n+1} - z_n\|^2 \\ &\geq -\lambda \|z_n - x^*\|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Sử dụng điều (20) và (21), ta thu được

$$-\Gamma_{n+1} \leq \lambda \|z_n - x^*\|^2 \leq \lambda^{n-N+1} \|z_N - x^*\|^2 + \frac{\lambda \Gamma_N}{1-\lambda}$$

Mặt khác từ (19) ta có

$$\begin{aligned} \gamma \sum_{n=N}^k \|z_{n+1} - z_n\|^2 &\leq \Gamma_N - \Gamma_{k+1} \\ &\leq \lambda^{k-N+1} \|z_N - x^*\|^2 + \frac{\Gamma_N}{1-\lambda} \\ &\leq \|z_N - x^*\|^2 + \frac{\Gamma_N}{1-\lambda} \quad \forall k > N. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_{n+1} - z_n\|^2 < +\infty.$$

Kết hợp điều trên với (14) và Bổ đề 2.1, ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \|z_n - x^*\|^2 = l$,

Điều phải chứng minh.

Bổ đề 3.3 Giả sử $\{z_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{z_n\}$ và $z_{n_k} \rightarrow z$. Khi đó $z \in \text{Sol}(C, F)$.

Chứng minh.

Theo Bổ đề 3.2, giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x^*\|$ tồn tại, nên $\{z_n\}$ bị chặn. Khi đó tồn tại dãy con $\{z_{n_k}\}$ của dãy $\{z_n\}$ sao cho $z_{n_k} \rightarrow z$.

Ta chứng minh được rằng $z \in \text{Sol}(C, F)$. Thật vậy, vì $\sum_{n=1}^{+\infty} \|z_{n+1} - z_n\|^2 < +\infty$, suy ra được ngay $\|z_{n+1} - z_n\| \rightarrow 0$. Mặt khác, ta có

$$\|z_{n+1} - u_n\|^2 = \|z_{n+1} - z_n\|^2 + \lambda^2 \|z_n - z_{n-1}\|^2 - 2\lambda \langle z_{n+1} - z_n, z_n - z_{n-1} \rangle$$

Do đó ta cũng có $\|z_{n-1} - u_n\| \rightarrow 0$. Từ (12), ta thu được $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x^*\|^2 = l$.

Tiếp đến, từ Bổ đề 3.1, ta có $(1 - 2\varepsilon - \mu^2) \|y_{n+1} - u_n\|^2 \leq \|u_n - x^*\|^2 - \|z_{n+1} - x^*\|^2$.

Điều này suy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_{n+1} - u_n\| = 0$.

Mặt khác $u_n = z_n + \lambda(z_n - z_{n-1})$, suy ra

$$\|u_n - z_n\|^2 = \lambda^2 \|z_n - z_{n-1}\|^2 \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Do đó, ta thu được: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - z_n\| = 0$.

Từ $z_{n_k} \rightarrow z$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - z_n\| = 0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - y_{n+1}\| = 0$, suy ra $u_{n_k} \rightarrow z$ và $y_{n_k+1} \rightarrow z$.

Ta cũng có $\langle u_{n_k} - \tau_{n_k} F u_{n_k} - y_{n_k+1}, x - y_{n_k+1} \rangle \leq 0, \forall x \in C$, tương đương với,

$$\frac{1}{\tau_{n_k}} \langle u_{n_k} - y_{n_k+1}, x - y_{n_k+1} \rangle \leq \langle F u_{n_k}, x - y_{n_k+1} \rangle, \forall x \in C.$$

Do đó $\frac{1}{\tau_{n_k}} \langle u_{n_k} - y_{n_k+1}, x - y_{n_k+1} \rangle + \langle F u_{n_k}, y_{n_k+1} - u_{n_k} \rangle \leq \langle F u_{n_k}, x - u_{n_k} \rangle, \forall x \in C$. (22)

Vì dãy $\{u_{n_k}\}$ hội tụ yếu nên bị chặn. Do F liên tục Lipschitz, suy ra dãy $\{F u_{n_k}\}$ bị chặn. Vì $\|u_{n_k} - y_{n_k+1}\| \rightarrow 0$, nên dãy $\{y_{n_k+1}\}$ cũng bị chặn. Lấy giới hạn trong (22) khi $k \rightarrow \infty$ thì ta thu được: $\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle F u_{n_k}, x - u_{n_k} \rangle \geq 0, \forall x \in C$. (23)

Hơn nữa, ta có:

$$\begin{aligned} \langle F y_{n_k+1}, x - y_{n_k+1} \rangle &= \langle F y_{n_k+1} - F u_{n_k}, x - u_{n_k} \rangle \\ &+ \langle F u_{n_k}, x - u_{n_k} \rangle + \langle F y_{n_k+1}, u_{n_k} - y_{n_k+1} \rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Vì $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - y_{n_k+1}\| = 0$ và F là ánh xạ liên tục Lipchitz trên H , suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Fu_{n_k} - Fy_{n_k+1}\| = 0$.

Khi đó, kết hợp với điều kiện (23) và (24) nên $\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle Fy_{n_k+1}, x - y_{n_k+1} \rangle \geq 0$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $z \in \text{Sol}(C, F)$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Giả sử $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|Fy_{n_k+1}\| \geq 0$. Vì $y_{n_k+1} \rightarrow z$ và theo (2). Ta suy ra $Fz = 0$.

Do đó $z \in \text{Sol}(C, F)$.

Trường hợp 2: Giả sử $\inf_{k \rightarrow \infty} \|Fy_{n_k+1}\| > 0$. Ta chọn một dãy giảm $\{e_k\}$ là các số dương sao cho tiến dần về 0. Với mỗi $k \geq 0$, ta kí hiệu N_k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho: $\langle Fy_{n_j}, x - y_{n_j} \rangle + e_k \geq 0, \forall j \geq N_k$. (25)

Vì dãy $\{e_k\}$ giảm nên không khó để thấy rằng dãy $\{N_k\}$ là dãy tăng. Hơn nữa, vì $\{y_{N_k+1}\} \subset C$, ta có thể giả sử rằng $Fy_{N_k+1} \neq 0$ với mỗi $k \neq 0$ (nếu không thì y_{N_k+1} là một nghiệm). Do đó, ta đặt: $v_{N_k} = \frac{Fy_{N_k+1}}{\|Fy_{N_k+1}\|^2}$,

Dễ thấy $\langle Fy_{N_k+1}, v_{N_k} \rangle = 1$ với mọi $k \geq 0$. Từ (25), suy ra rằng

$$\langle Fy_{N_k+1}, e_k v_{N_k} - y_{N_k+1} \rangle \geq 0.$$

Vì F là ánh xạ giả đơn điệu trên H nên ta có:

$$\langle F(x + e_k v_{N_k}), x + e_k v_{N_k} - y_{N_k+1} \rangle \geq 0.$$

Điều này dẫn đến:

$$\langle Fx, x - y_{N_k+1} \rangle \geq \langle Fx - F(x + e_k v_{N_k}), x + e_k v_{N_k} - y_{N_k+1} \rangle - e_k \langle Fx, v_{N_k} \rangle. \quad (26)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k v_{N_k} = 0$. Thật vậy, vì $u_{n_k} \rightarrow z$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{n_k} - y_{n_k+1}\| = 0$, suy ra $y_{N_k+1} \rightarrow z$ khi $k \rightarrow \infty$. Mặt khác, vì $\{y_{N_k+1}\} \subset \{y_{n_k+1}\}$ và $e_k \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$, ta thu được

$$0 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|e_k v_{N_k}\| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{e_k}{\|Fy_{n_k+1}\|} \right) \leq \frac{\limsup_{k \rightarrow \infty} e_k}{\liminf_{k \rightarrow \infty} \|Fy_{n_k+1}\|} = 0.$$

Từ đó, suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k v_{N_k} = 0$, như đã khẳng định.

Bây giờ, cho $k \rightarrow \infty$, ta thấy rằng vế phải của bất đẳng thức (26) tiến dần về 0. Do đó ta thu được $\liminf_{x \rightarrow \infty} \langle Fx, x - y_{N_k+1} \rangle \geq 0$.

Suy ra với mọi $x \in C$, ta có

$$\langle Fx, x - z \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Fx, x - y_{N_k+1} \rangle = \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle Fx, x - y_{N_k+1} \rangle \geq 0.$$

Áp dụng Bổ đề 2.3, ta có thể thu được $z \in \text{Sol}(C, F)$. Bổ đề được chứng minh xong.

Định lý 3.2 Giả sử điều kiện 3.1 - 3.3 được giữ nguyên và phép ánh xạ $F : H \rightarrow H$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$\text{Nếu } z_n \subset C, z_n \rightarrow z \text{ và } \liminf_{n \rightarrow \infty} \|Fz_n\| = 0 \text{ thì } Fz = 0 \quad (27)$$

Giả sử rằng các tham số λ , ε và μ thỏa mãn các điều kiện

$$0 \leq \lambda < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ và } 2\varepsilon + \mu^2 < 1 - \lambda - \lambda^2.$$

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ được sinh ra bởi Thuật toán 3.1 hội tụ yếu đến phần tử $x^* \in \text{Sol}(C, F)$.

Chứng minh.

Ta chứng minh rằng dãy $\{z_n\}$ hội tụ yếu đến một điểm thuộc $\text{Sol}(C, F)$. Thật vậy, theo Bổ đề 3.2 và Bổ đề 3.3 thì với mọi $x^* \in \text{Sol}(C, F)$, giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x^*\|$ tồn tại và mỗi điểm tụ yếu của dãy $\{z_n\}$ thuộc $\text{Sol}(C, F)$. Áp dụng Bổ đề 2.2, suy ra dãy $\{z_n\}$ hội tụ về một điểm thuộc tập nghiệm $\text{Sol}(C, F)$. Định lý hoàn toàn được chứng minh. \square

4. Kết luận

Trong bài báo các tác giả đã đề xuất một cách tiếp cận mới để giải bài bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu với chỉ một phép chiếu xấp xỉ tại mỗi bước lặp. Điều này giúp giảm đáng kể chi phí tính toán tại mỗi bước lặp của thuật toán. Bên cạnh đó thuật toán được kết hợp bởi hai kỹ thuật rất phổ biến hiện nay là kỹ thuật lặp quán tính và kỹ thuật bước nhảy tự thích nghi, giúp tăng tốc thuật toán và bỏ qua điều kiện phải biết trước hệ số Lipschitz của ánh xạ giá nhằm mở rộng phạm vi áp dụng của thuật toán cho các bài toán trong thực tiễn. Bên cạnh đó các tác giả cũng đã chứng minh một cách chi tiết sự hội tụ của thuật toán về nghiệm của bài (VIP).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Abaidoo, R., Agyapong, EK. (2022), Financial development and institutional quality among emerging economies, *J. Econ. Dev.*, 24, 198-216.

2. Alvarez, F., Attouch, H. (2001), An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping, *Set-Valued Anal*, 9, 3-11.
3. Baiocchi, C., Capelo, A. (1984), *Variational and Quasivariational Inequalities, Applications to Free Boundary Problems*, Wiley, New York.
4. Cegielski, A. (2012), *Iterative Methods for Fixed Point Problems in Hilbert Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2057, Springer, Berlin.
5. Censor, Y., Gibali, A., Reich, S. (2011), The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space, *J. Optim. Theory Appl.*, 148, 318-335.
6. Cottle, RW., Yao, JC. (1992), Pseudo-monotone complementarity problems in Hilbert space, *J. Optim. Theory Appl.*, 75, 281-295.
7. Facchinei, F., Pang, JS. (2003), *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer Series in Operations Research, vols. I and II. Springer, New York.
8. Khanh, PQ., Luu, LD. (2005), Upper semicontinuity of the solution set to parametric vector quasivariational inequalities, *Journal of Global Optimization*, 32, 569-580.
9. Khanh, PQ., Luu, LD. (2005), Some existence results for vector quasivariational inequalities involving multifunctions and applications to traffic equilibrium problems, *Journal of Global Optimization*, 32, 551-568.
10. Kien, BT., Yao, JC., Yen, ND. (2008), On the solution existence of pseudomonotone variational inequalities, *Journal of Global Optimization*, 41, 135-145.
11. Kinderlehrer, D., Stampacchia, G. (1980), *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic, New York.
12. Konnov, I. (2001), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
13. Korpelevich, GM. (1976), The extragradient method for finding saddle points and other problems, *Ekonomikai Matematicheskie Metody*, 12 (1976), 747-756.
14. Levy, AB. (1999), Sensitivity of solutions to variational inequalities on Banach spaces, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38, pp. 50 - 60.
15. Mordukhovich, BS. (1994), Stability theory for parametric generalized equations and variational inequalities via nonsmooth analysis, *Transactions of the AMS - American Mathematical Society*, 343, 609-658.

16. Mordukhovich, BS., Outrata, JV. (2001), On second-order subdifferentials and their applications, *SIAM Journal on Optimization*, 12, 139-169.
17. Muu, LD. (1984), Stability property of a class of variational inequalities, *Optimization*, 15, 347-351.
18. Opial, Z. (1967), Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 591-597.
19. Wang, Z., Chen, X., Yi, J. et al. (2022), Inertial projection and contraction algorithms with larger step sizes for solving quasimonotone variational inequalities, *J. Glob. Optim.*, 82, 499-522.
20. Wang, K., Wang, Y., Iyiola, OS., Shehu, Y. (2024), Double inertial projection method for variational inequalities with quasi-monotonicity, *Optimization*, 73 (2024), 707-739.
21. Yen, ND., Lee, GM. (1997), Solution sensitivity of a class of variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 215, 48-55.