# ĐA TẠP ỔN ĐỊNH THUỘC $\mathcal{E}$ – LỚP CỦA PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HÓA NỬA TUYẾN TÍNH CHỨA TRỄ VÔ HẠN

***Đinh Xuân Khánh, Vũ Tiến Đức***
*Khoa Toán và khoa học tự nhiên*
*Gmail: Khanhdx@.dhhp.edu.vn*
*ducvt@dhhp.edu.vn*

*Ngày nhận bài: 23/9/2019*
*Ngày PB đánh giá: 11/12/2019*
*Ngày duyệt đăng: 27/12/2019*

**TÓM TẮT.** Bài báo chỉ ra điều kiện tồn tại đa tạp bất biến chấp nhận được ổn định thuộc $\mathcal{E}$ − lớp đối với các nghiệm của phương trình vi phân hàm chứa trễ vô hạn có dạng $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + f(t,u_t), t \in \mathbb{R}_+$, trong đó phần tuyến tính $(A(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ sinh ra họ tiến hóa $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ có nhị phân mũ và phần phi tuyến $f$ thỏa mãn điều kiện $\varphi$ − Lipschitz, tức là $\| f(t,\phi) - f(t,\psi) \| \leq \varphi(t) \| \phi - \psi \|_{C_\nu}$, với $\phi, \psi \in C_\nu$ và $\varphi$ thuộc không gian hàm chấp nhận được trên $\mathbb{R}_+$.

***Từ khóa:*** *Không gian giảm nhớ, đa tạp bất biến, không gian hàm chấp nhận được.*

---

## THE STABLE MANIFOLDS BELONGS TO $\mathcal{E}$-CLASS FOR SEMI-LINEAR EVOLUTION EQUATIONS WITH INFTY DELAY

**ABSTRACT:** In this paper we investigate the existence of a stable manifold belongs to $\mathcal{E}$-class for solutions to the semi-linear evolution equation of the form $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + f(t,u_t),\ t \in \mathbb{R}_+$, when its linear part, the evolution family $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$, has an exponential trichotomy on the half-line and the nonlinear forcing term $f$ satisfies the $\varphi$-Lipschitz condition, i.e., $\| f(t,u_t) - f(t,v_t) \| \leq \varphi(t) \| u_t - v_t \|_{C_\nu}$ where $u_t, v_t \in C_\nu$ and $\varphi(t)$ belongs to some class of admissible function spaces on the $\mathbb{R}_+$.

***Keywords****: fading memory space**,** invariant manifold, admissible function space*

---

### 1. GIỚI THIỆU CHUNG

Xét phương trình tiến hóa nửa tuyến tính có trễ vô hạn:

$$\frac{du}{dt} = A(t)u(t) + f(t,u_t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

trong đó $A(t)$ là toán tử tuyến tính (có thể không bị chặn) trên không gian Banach $X$ với mỗi $t$ cố định; $f: \mathbb{R}_+ \times C_\nu \to X$ là toán tử phi tuyến tính liên tục với $C = C((-\infty,0],X)$, $C_\nu := \{\phi \in C;\ \lim_{s\to-\infty} e^{\nu s} \| \phi(s) \| = 0;\ \nu > 0\}$ và $u_t$ là hàm lịch sử định nghĩa bởi $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, với $\theta \in (-\infty,0]$.

Một trong những vấn đề quan trọng của lý thuyết định tính của nghiệm các phương trình vi phân là tìm hiểu sự tồn tại nghiệm và đa tạp ổn định hoặc không ổn định. Việc nghiên cứu này đã nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà khoa học trong và ngoài nước. Điều kiện các đa tạp tích phân này tồn tại là phần tuyến tính có nhị phân mũ và phần phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipchitz. Hadamard (năm 1923), Perron (năm 1929), Bogoliubov và Mitropolsky (năm 1963) là những người đầu tiên đưa ra điều kiện tồn tại của các đa tạp tích phân trong không gian $\mathbb{R}$ khi phần tuyến tính là ma trận. Tiếp theo, Daleckii và Krein (năm 1974) chứng minh được sự tồn tại của đa tạp khi phần tuyến tính là toán tử tuyến tính bị chặn trong không gian Banach và Henry (năm 1981) mở rộng với toán tử đạo hàm riêng không giới nội. Cùng với sự phát triển của giải tích hàm và lý thuyết nửa nhóm, phương pháp của Perron đã được phát triển thành phương pháp Lyapunov-Perron có ứng dụng lớn trong nghiên cứu định tính nghiệm phương trình vi phân.

Điều kiện đối với phần phi tuyến thường là thỏa mãn điều kiện Lipschitz đều với hằng số Lipschitz đủ nhỏ. Tuy nhiên, trong các mô hình thực tế phần phi tuyến có hệ số Lipschitz có thể phụ thuộc vào thời gian và không đủ nhỏ. Gần đây, bằng cách sử dụng phương pháp Lyapunov-Perron và không gian hàm chấp nhận được Nguyễn Thiệu Huy, Trịnh Viết Dược đã đưa ra được điều kiện tổng quát hơn cho phần phi tuyến đối với sự tồn tại đa tạp tích phân [5, 6], đó là điều kiện liên tục Lipschitz không đều (tính $\varphi$-Lipschitz) với $\varphi$ là hàm thực dương thuộc không gian hàm chấp nhận được. Một số kết quả về đa tạp bất biến chấp nhận được của phương trình tiến hóa nửa tuyến tính chứa trễ hữu hạn [11, 12].

Nội dung được trình bày trong bài báo này là sự mở rộng các kết quả nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình tiến hóa nửa tuyến tính từ không chứa trễ, chứa trễ hữu hạn trên khoảng $[-r,0]$ sang chứa trễ vô hạn trên khoảng $(-\infty,0]$. Các kết quả về sự tồn tại đa tạp trong trường hợp phương trình không chứa trễ hoặc chứa trễ hữu hạn, bạn đọc có thể xem trong ([1,3,5,6,12]). Các khái niệm về họ tiến hóa, nhị phân mũ, hàm Green,...đề cập trong bài báo này, bạn đọc xem trong [11, 12]. Để chứng minh các kết quả chính của bài báo, ta nhắc lại khái niệm về không gian hàm giảm nhớ.

**Định nghĩa 1.1.** Cho $X$ là không gian Banach. Không gian giảm nhớ là không gian Banach $(\Gamma; \|\cdot\|_\Gamma)$ gồm các hàm từ $(-\infty,0]$ vào $X$ thỏa mãn các tiên đề sau [8]:

A1) Tồn tại hằng số dương $H$, các hàm liên tục không âm bị chặn địa phương $K(\cdot)$ và $M(\cdot)$ trên $[0,\infty)$ và hàm $u:(-\infty,a] \to X$ liên tục thỏa mãn $\sigma < a, u_\sigma \in \Gamma$. Khi đó với mọi $t \in [\sigma,a]$, ta có:

(i) $u_t \in \Gamma$,

(ii) $u_t$ liên tục theo $t$ (đối với chuẩn $\|\cdot\|_\Gamma$),

(iii) $H\|u(t)\| \le K(t-\sigma)\sup_{\sigma\le s\le t}\|u(s)\| + M(t-\sigma)\|u_\sigma\|_\Gamma$ .

A2) Nếu $\{\phi_k\}, \phi_k \in \Gamma$, hội tụ đều đến hàm $\phi$ trên tập compact thuộc $(-\infty, 0]$ , $\{\phi_k\}$ là dãy Cauchy trong $\Gamma$, thì $\phi \in \Gamma$ và $\phi_k \to \phi$ trong $\Gamma$ khi $k \to \infty$.

*Ví dụ 1.2.* (xem [9, Chương 5]) Với hàm $h:(\infty,0] \to (0,\infty)$, cho

$$C_h := \left\{\phi : \quad \phi \in C \text{ và } \lim_{s\to-\infty} \frac{\|\phi(s)\|}{h(s)} = 0\right\},$$

với chuẩn $\|\phi\|_h := \sup_{-\infty<s\le 0} \dfrac{\|\phi(s))\|}{h(s)}$ . Trong trường hợp đặc biệt $h(s) = e^{-\nu s}$, chúng ta có ví dụ sau.

*Ví dụ 1.3.* Không gian $C_\nu := \left\{\phi : \phi \in C \lim_{s\to-\infty} e^{\nu s}\|\phi(s)\| = 0\right\}$ trong đó $\nu > 0$, với chuẩn $\|\phi\|_h := \sup_{-\infty<s\le 0} \dfrac{\|\phi(s))\|}{e^{-\nu s}}$. thỏa mãn các tiên đề trên với $K(t) = 1$, $M(t) = e^{-\nu t}, t \ge 0$. Vậy $C_\nu$ là hàm giảm nhớ.

Cho E là không gian hàm chấp nhận được và E' là không gian liên kết của nó xác định như trong [2]. Đặt

$\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, C_\nu) := \{g : \mathbb{R}_+ \to C_\nu : g$ là đo được mạnh và $\|g(.)\|_{C_\nu} \in E\}$ , (2)

với chuẩn $\|g\|_{\mathcal{E}} := \|\|g(.)\|_{C_\nu}\|_E$. Khi đó $\mathcal{E}$ là một không gian Banach, được gọi là *không gian Banach tương ứng với không gian chấp nhận được* E.

*Giả thiết 1.4.* Giả sử E là không gian hàm Banach chấp nhận được sao cho không gian liên kết E' của nó cũng là không gian hàm Banach chấp nhận được. Hơn nữa ta giả sử rằng E' chứa hàm E- *bất biến mũ,* nghĩa là với hàm $\varphi \ge 0$ và $\nu > 0$, cố định hàm $h_\nu$ được xác định bởi biểu thức sau thuộc E:

$h_\nu(t) := \|e^{-\nu|t-\cdot|}\varphi(.)\|_{E'}$ với $t \in \mathbb{R}_+$. (3)

**2. Sự tồn tại nghiệm của phương trình tiến hóa chứa trễ vô hạn**

Trong phần này, chúng tôi sẽ chứng minh sự tồn tại nghiệm thuộc $\mathcal{E}$ – lớp của phương trình (1). Giả sử rằng họ tiến hóa $(U(t,s))_{t\ge s\ge 0}$ có nhị phân mũ $\mathbb{R}_+$ với họ phép chiếu $P(t), t \ge 0$. Chúng ta định nghĩa họ các toán tử $(P(t))_{t\ge 0}$ trên $C_\nu$ như sau:

$P(t) : C_\nu \to C_\nu$

$(P(t)f)(\theta) = U(t-\theta, t)P(t)f(0)$ với mọi $\theta \in (-\infty, 0]$ . (4)

Ta có $(P(t))^2 = P(t)$, do đó $P(t), t \geq 0$ là các phép chiếu trên $C_\nu$. Hơn nữa

$\operatorname{Im} P(t) = \{\phi \in C_\nu : \phi(\theta) = U(t-\theta, t)\nu_0$, với mọi $\theta \in (-\infty, 0]$ và $\nu_0 \in \operatorname{Im} P(t)$.

Sau đây, chúng ta đưa ra khái niệm $\varphi -$Lipschitz.

**Định nghĩa 2.1.** Cho E là không gian hàm Banach chấp nhận được và $\varphi$ là hàm dương thuộc E. Hàm $f : [0,\infty) \times C_\nu$ được gọi là hàm $\varphi -$Lipschitz nếu $f$ thỏa mãn:

(i) $\| f(t,\phi) \| \leq M\varphi(t)$, với mọi $t \in \mathbb{R}_+$ và $\phi \in C_\nu$.

(ii) $\| f(t,\phi_1) - f(t,\phi_2) \| \leq \varphi(t) \| \phi_1 - \phi_2 \|$, với mọi $t \in \mathbb{R}_+$ và với mọi $\phi_1, \phi_2 \in C_\nu$.

Tiếp theo, nghiệm đủ tốt của phương trình (1) là hàm $u$ liên tục thỏa mãn phương trình tích phân sau:

$$\begin{cases} u(t) = U(t,s)u(s) + \displaystyle\int_s^t U(t,s) f(\zeta, u_\xi) d\zeta, \quad t \geq s \geq 0 \\ u_s = \phi \in C_\nu \end{cases} \quad (5)$$

Cho họ tiến hóa $(U(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ với các phép chiếu nhị phân $P(t), t \geq 0$ và các hằng số $N, \nu > 0$. Chú ý rằng nhị phân mũ của họ $(U(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ có nghĩa là $H := \sup_{t \geq 0} \| P(t) \| < \infty$ và các ánh xạ $t \mapsto P(t)$ là liên tục mạnh (xem [10, Bổ đề 4.2]). Bổ đề sau đưa ra công thức nghiệm Lyapunov - Perron của phương trình (5) thuộc $\mathcal{E}$.

**Bổ đề 2.2.** *Cho họ tiến hóa $(U(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ với họ phép chiếu tương ứng $P(t), t \geq 0$ và các hằng số nhị phân $N, \nu > 0$; E là không gian hàm Banach chấp nhận được, E' là không gian liên kết của E và $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, C_\nu)$ là không gian Banach chấp nhận được tương ứng E. Giả sử rằng $\varphi \in E'$ là hàm E-bất biến mũ định nghĩa như trong Giả thiết 1.4; $f$ là hàm $\varphi -$Lipschitz và $u(t)$ là một nghiệm của phương trình (5) sao cho hàm $\chi_{[s,\infty)}(t)u_t$, $t \in \mathbb{R}_+$, thuộc $\mathcal{E}$ với $s \geq 0$ cố định. Khi đó, với $t \geq s$ chúng ta có thể biểu diễn $u(t)$ dưới dạng:*

$$\begin{cases} u(t) = U(t,s)\nu_0 + \displaystyle\int_s^\infty G(t,s) f(\tau, u_\tau) d\tau, \\ u_s = \phi \in C_\nu, \end{cases} \quad (6)$$

*với $\nu_0 \in X_0(s) = P(s)X$, trong đó $G(t,\tau)$ là hàm Green.*

*Chứng minh.* Đặt $z(t) := \chi_{[s,\infty)}(t)u_t$, $t \in \mathbb{R}_+$ và $y(t) = \displaystyle\int_s^\infty G(t,s) f(\tau, u_\tau) d\tau$, với $t \geq s$ và $y(t) = 0$ với $0 \leq t < s$. Chúng ta có

$$\| y(t) \| \le N(1+H)\int_s^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)\| u_\tau \|_{C_\nu}\, d\tau = N(1+H)\int_0^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)\| z(\tau) \|_{C_\nu}\, d\tau, t \ge 0.$$

Áp dụng "Bất đẳng thức Holder ", ta có $\| y(t) \| \le N(1+H) \| e^{-\nu|t-\cdot|}\varphi(\cdot) \|_{E'} \| z \|_{\mathcal{E}}, t \ge 0$ .(7)

Chú ý rằng hàm $h_\nu(t) = \| e^{-\nu|t-\cdot|}\varphi(\cdot) \|_{E'}, t \ge 0$ thuộc E. Do đó bởi tính chất lưới Banach chúng ta có hàm $\| y(\cdot) \| \in E$ . Tương tự, ta cũng có hàm $\| u(\cdot) \| \in E$ . Mặt khác,

$$U(t,s)y(s) = -\int_s^t U(t,s)U(s,\tau)(I-P(\tau))f(\tau,u_\tau)d\tau - \int_t^{\infty} U(t,s)U(s,\tau)(I-P(\tau))f(\tau,u_\tau)d\tau$$

$$= -\int_s^t U(t,\tau)(I-P(\tau))f(\tau,u_\tau)d\tau - \int_t^{\infty} U(t,\tau)(I-P(\tau))f(\tau,u_\tau)d\tau .$$

Vì vậy,

$$y(t) = U(t,s)y(s) + \int_s^t U(t,\tau)f(\tau,u_\tau)d\tau .$$

Từ $u(t)$ là nghiệm của phương trình (5) chúng ta thu được:

$$u(t) - y(t) = U(t,s)(u(s) - y(s)) .$$

Đặt $v_0 = u(s) - y(s)$ . Vì các hàm $\| y(t) \|, \| u(t) \|$ thuộc E suy ra rằng $v_0 \in X_0(s)$ và $P(s)u(s) = P(s)\phi(0) = v_0$ . Vì vậy $u(t) = U(t,s)v_0 + y(t)$ với $t \ge s$ .

*Chú ý 2.3.* Phương trình (6) được gọi là phương trình Lyapunov-Perron. Bằng tính toán trực tiếp ta có điều ngược lại của Bổ đề 2.2 cũng đúng. Điều này có nghĩa là, mọi nghiệm của phương trình tích phân (6) thuộc $\mathcal{E}$ cũng là nghiệm của phương trình (5) trong không gian Banach chấp nhận được $\mathcal{E}$ với $t \ge s$ .

Sử dụng tính chất chấp nhận được, chúng ta xây dựng cấu trúc của các nghiệm của phương trình (5), trong định lý sau.

**Định lí 2.4.** *Với giả thiết như trong Bổ đề 2.2. Khi đó, nếu* $f$ *là hàm* $\varphi-$*Lipschitz thỏa mãn* $N(1+H) \| h_\nu \|_E < 1$, *thì tương ứng với mỗi* $\phi \in \operatorname{Im} P(s)$ *tồn tại một và chỉ một nghiệm* $u(t)$ *của phương trình (5) trên* $\mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* $P(s)u_s = \phi$ *và hàm* $\chi_{[s,\infty)}(t)u_t, t \in \mathbb{R}$, *thuộc* $E$ .

*Hơn nữa, nếu* $\dfrac{N(1+H)}{1-e^{-(\nu-\mu)}}(N_1 \| \Lambda_1 T_1^{+}\varphi \|_\infty + N_2 \| \Lambda_1\varphi \|_\infty) < 1$ *thì đánh giá sau là đúng với hai nghiệm* $u(t), v(t)$ *tương ứng với điều kiện ban đầu* $\phi_1, \phi_2 \in \operatorname{Im} P(s)$ *:*

$\| u_t - v_t \|_{C_\nu} \le C_\mu e^{-\mu(t-s)} \| \phi_1(0) - \phi_2(0) \|$, với mọi $t \ge s \ge 0$ (8)

*trong đó* $\mu$ *và* $C_\mu$ *là số dương không phụ thuộc thời gian.*

*Chứng minh.* Để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (5) với mỗi $\phi \in \operatorname{Im} P(s)$. Ký hiệu $C_b(\mathbb{R}, X)$ là tập các hàm bị chặn, liên tục và lấy giá trị trong $X$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đặt $v_0 := \phi(0)$, với mỗi $z \in \mathcal{E}$ định nghĩa hàm $H : \mathcal{E} \to C_b(\mathbb{R}, X)$ như sau:

$$(Hz)(t) = \begin{cases} U(2s-t,s)v_0 + \int_s^{\infty} G(2s-t,\tau) f(\tau, z(\tau)) d\tau & \text{khi} \quad t < s, \\ U(t,s)v_0 + \int_s^{\infty} G(t,\tau) f(\tau, z(\tau)) d\tau & \text{khi} \quad t \ge s. \end{cases}$$

Chúng ta chứng minh rằng phép biến đổi $T$ xác định như sau:

$$(Tz)(t) = \begin{cases} (Hz)_t & \text{khi} \quad t < s, \\ 0 & \text{khi} \quad 0 \le t < s, \end{cases}$$

với tác động từ $\mathcal{E}$ vào trong $\mathcal{E}$ và là ánh xạ co. Thật vậy, ta có:

$$(Hz)(t) \le \begin{cases} Ne^{-\nu(s-t)} \| v_0 \| + N(1+H) \int_s^{\infty} e^{-\nu|2s-t-\tau|} \varphi(\tau) \| z(\tau) \|_{C_\nu} \, d\tau & \text{khi} \quad t < s, \\ Ne^{-\nu(t-s)} \| v_0 \| + N(1+H) \int_s^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) \| z(\tau) \|_{C_\nu} \, d\tau & \text{khi} \quad t \ge s. \end{cases}$$

Vì vậy, với $t \ge s$ thì

$$\| (Hz)_t \|_{C_\nu} = \sup_{\theta \in (-\infty, 0]} \| (Hz)(t+\theta) \| \le Ne^{-\nu(t-s)} \| v_0 \| + N(1+H) \int_s^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) \| z(\tau) \|_{C_\nu} \, d\tau$$

Áp dụng "Bất đẳng thức Holder" chúng ta đạt được:

$$\| (Hz)_t \|_{C_\nu} \le NT_s^+ e_\nu(t) \| v_0 \| + N(1+H) h_\nu(t) \| z \|_{\mathcal{E}},$$

trong đó $h_\nu(t) = \| e^{-\nu|t-\cdot|} \varphi(\cdot) \|_{\xi}$, và $T_s^+ e_\nu(t) = \begin{cases} e^{-\nu(t-s)} & \text{khi} \quad t \ge s, \\ 0 & \text{khi} \quad 0 \le t < s. \end{cases}$

Vì các hàm $T_s^+ e_\nu(\cdot), h_\nu(\cdot) \in E$ và bởi tính chất lưới Banach của E suy ra rằng $\| (Tz)(\cdot) \|_{C_\nu} \in E$. Như vậy $Tz \in \mathcal{E}$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $T$ là ánh xạ co. Với $x, z \in \mathcal{E}$ ta có đánh giá sau:

$$\| (Hx)_t - (Hz)_t \|_{C_\nu} \le N(1+H) \int_s^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) \| x(\tau) - z(\tau) \|_{C_\nu} \, d\tau, \quad \text{với } t \ge s.$$

Áp dụng "Bất đẳng thức Holder", ta có

$$\| (Hx)_t - (Hz)_t \|_{C_\nu} \le N(1+H) h_\nu(t) \| x - z \|_{\mathcal{E}}.$$

Bởi tính chất lưới Banach của E, suy ra $\| Tx - Tz \|_{\mathcal{E}} \leq N(1+H) \| h_\nu \|_{\xi} \| x - z \|_{\mathcal{E}}$.

Như vậy, $T$ là ánh xạ co. Do đó, tồn tại duy nhất $z \in \mathcal{E}$ sao cho $Tz = z$. Vì vậy, ta có:

$$z(t) = \begin{cases} (Hz)_t & \text{khi} \quad t \geq s, \\ 0 & \text{khi} \quad 0 \leq t < s. \end{cases}$$

Điều này kéo theo

$$(Hz)(t) = \begin{cases} U(2s-t,s)\nu_0 + \int_s^\infty G(2s-t,\tau) f(\tau,(Hz)_\tau) d\tau & \text{khi} \quad t < s, \\ U(t,s)\nu_0 + \int_s^\infty G(t,\tau) f(\tau,(Hz)_\tau) d\tau & \text{khi} \quad t \geq s. \end{cases}$$

Vì thế, $u(t) = (Hz)(t)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (6). Theo Bổ đề 2.2 và Chú ý 2.3 thì $u(t)$ cũng là nghiệm duy nhất của phương trình (5) với

$$u_s(\theta) = U(s-\theta,s)\nu_0 + \int_s^\infty G(s-\theta,\tau) f(\tau,u_\tau) d\tau \qquad \text{với} \qquad \theta \in (-\infty,0] \qquad \text{và}$$

$P(s)u(s) = \nu_0 = \phi(0)$. Vì thế, $P(s)u_s = \phi$ (xem Đẳng thức (4)).

Cuối cùng, chúng ta chứng minh bất đẳng thức (8). Để làm điều này, cho ta $u(t), v(t)$ là hai nghiệm của phương trình (6) tương ứng với điều kiện ban đầu $\phi_1, \phi_2 \in \operatorname{Im} P(s)$. Đặt $\nu_1 := \phi_1(0), \nu_2 := \phi_2(0)$, chúng ta có:

$$\| u(t) - v(t) \| \leq \begin{cases} Ne^{-\nu(t-s)} \| \nu_1 - \nu_2 \| + N(1+H) \int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) \| u_\tau - v_\tau \|_{C_\nu} d\tau & \text{khi} \quad t \geq s. \\ Ne^{-\nu(s-t)} \| \nu_1 - \nu_2 \| + N(1+H) \int_s^\infty e^{-\nu|2s-t-\tau|} \varphi(\tau) \| u_\tau - v_\tau \|_{C_\nu} d\tau & \text{khi} \quad t < s, \end{cases}$$

Vì $t + \theta \in \mathbb{R}$ với $t \in [s,\infty)$ cố định và $\theta \in (-\infty,0]$, chúng ta đạt được:

$$\| u_t - v_t \|_{C_\nu} \leq Ne^{-\nu(t-s)} \| \nu_1 - \nu_2 \| + N(1+H) \int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) \| u_\tau - v_\tau \|_{C_\nu} d\tau, \quad t \geq s.$$

Đặt

$$h(t) = \begin{cases} \| u_t - v_t \|_{C_\nu} & \text{khi} \quad t \geq s, \\ 0 & \text{khi} \quad 0 \leq t < s. \end{cases}$$

Ta có $h(t) \in E$ và

$$h(t) \leq Ne^{-\nu(t-s)} \| \nu_1 - \nu_2 \| + N(1+H) \int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) h(\tau) d\tau, \quad t \geq s. \; (9)$$

Áp dụng bất đẳng thức nón cho không gian hàm Banach chấp nhận được $E$ và nón $K$ là tập tất các các hàm không âm. Chúng ta xét toán tử tuyến tính $A$ xác định với $g \in E$ bởi

$$(Ag)(t) = \begin{cases} N(1+H)\int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)g(\tau)d\tau & \text{khi} \quad t \geq s, \\ 0 & \text{khi} \quad 0 \leq t < s. \end{cases}$$

Áp dụng "Bất đẳng thức Holder", ta có

$|(Ag)(t)| \leq N(1+H)h_\nu(t) \| g \|_E$.

Theo tính chất lưới Banach của E, chúng ta có $\| Ag \|_E \leq N(1+H) \| h_\nu \|_E \| g \|_E$. Vì vậy, $A \in L(E)$ và $\| A \| \leq N(1+H) \| h_\nu \|_E < 1$. Ta có nón $K$ là bất biến dưới toán tử $A$. Bất phương trình (9) được viết lại như sau:

$h \leq Ah + z$, với $z(t) = Ne^{-\nu(t-s)} \| \nu_1 - \nu_2 \|$.

Áp dụng Định lí bất đẳng thức nón ta có $h \leq g$, trong đó $g$ là nghiệm trong E của phương trình $g = Ag + z$, nghiệm đó có thể được viết lại như sau:

$$g(t) = Ne^{-\nu(t-s)} \| \nu_1 - \nu_2 \| + N(1+H)\int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)g(\tau)d\tau, \ t \geq s.$$

Đặt $\omega(t) = e^{\mu(t-s)}g(t)$, với $t \geq s$. Khi đó $\omega$ là nghiệm của phương trình

$$\omega(t) = Ne^{-(\nu-\mu)(t-s)} \| \nu_1 - \nu_2 \| + N(1+H)\int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|+\mu(t-\tau)}\varphi(\tau)\omega(\tau)d\tau \quad (10)$$

Chúng ta sẽ tìm $\omega$ trong $L_\infty[s,\infty)$ là không gian các hàm nhận giá trị thực xác định và bị chặn cốt yếu trên $[s,\infty)$ (được trang bị chuẩn $\| \cdot \|_\infty$). Xét toán tử tuyến tính $\mathbf{K}$ xác định trên $L_\infty[s,\infty)$ như sau:

$$(\mathbf{K}\phi)(t) = N(1+H)\int_s^\infty e^{-\nu|t-\tau|+\mu(\mathrm{t}-\tau)}\varphi(\tau)\phi(\tau)d\tau \ \text{ với mọi } t \geq s.$$

Bởi [8, Mệnh đề 2.7], ta suy ra rằng $L(L_\infty[s,\infty))$ và

$$\| \mathbf{K} \| \leq \frac{N(1+H)}{1-e^{-(\nu-\mu)}}(N_1 \| \Lambda_1 T_1^+ \varphi \|_\infty + N_2 \| \Lambda_1 \varphi \|_\infty).$$

Phương trình (10) được viết lại dưới dạng

$\omega = \mathbf{K}\omega + \bar{z}$, với $\bar{z}(t) = Ne^{-(\nu-\mu)(t-s)} \| \nu_1 - \nu_2 \|$.

Chúng ta có $\| \mathbf{K} \| < 1$ nếu

$$0 < \mu < \nu + \ln(1 - N(1+H)(N_1 \| \Lambda_1 T_1^+ \varphi \|_\infty + N_2 \| \Lambda_1 \varphi \|_\infty).$$

Dưới điều kiện này, phương trình $\omega = \mathbf{K}\omega + \bar{z}$ có nghiệm duy nhất $\omega \in L_\infty[s,\infty)$ và $\omega = (I - \mathbf{K})^{-1}\bar{z}$. Do đó chúng ta đạt được:

$$\| \omega \|_\infty = \| (I-\mathbf{K})^{-1} \bar{z} \|_\infty \le \frac{N}{1-\|\mathbf{K}\|} \| \nu_1 - \nu_2 \|$$

$$\le \frac{N \| \nu_1 - \nu_2 \|}{1 - \frac{N(1+H)}{1-e^{-(\nu-\mu)}} (N_1 \| \Lambda_1 T_1^+ \varphi \|_\infty + N_2 \| \Lambda_1 \varphi \|_\infty)} := C_\mu \| \nu_1 - \nu_2 \|.$$

Điều này suy ra rằng $\omega(t) \le C_\mu \| \nu_1 - \nu_2 \|$ với $t \ge s$. Vì thế

$$h(t) = \| u_t - v_t \|_{C_\nu} \le g(t) = e^{-\mu(t-s)} \omega(t) \le C_\mu e^{-\mu(t-s)} \| \nu_1 - \nu_2 \| \text{ với } t \ge s.$$

**3. Sự tồn tại đa tạp bất biến chấp nhận được ổn định thuộc $\mathcal{E}$ − lớp**

Chúng tôi đưa ra định nghĩa về đa tạp bất biến chấp nhận được ổn định thuộc $\mathcal{E}$ − lớp cho nghiệm của phương trình (5).

**Định nghĩa 3.1.** Tập $S \subset \mathbb{R}_+ \times C_\nu$ được gọi là *đa tạp bất biến chấp nhận được ổn định thuộc $\mathcal{E}$ − lớp* cho nghiệm của phương trình (5) nếu với mọi $t \in \mathbb{R}_+$ không gian $C_\nu$ tách thành được tổng trực tiếp $C_\nu = X_0(t) \oplus X_1(t)$ với các phép chiếu tương ứng $P(t)$ (tức là, $X_0(t) = \operatorname{Im} P(t)$ và $X_1(t) = \operatorname{Ker} P(t)$) sao cho

$$\sup_{t\ge 0} \| P(t) \| < \infty,$$

và tồn tại các họ ánh xạ Lipschitz

$$\Phi_t : X_0(t) \to X_1(t),\ t \in \mathbb{R}_+,$$

với các hằng số Lipschitz không phụ thuộc vào $t$ thỏa mãn:

(i) $S = \{(t, \psi + \Phi_t(\psi)) \in \mathbb{R}_+ \times (X_0(t) \oplus X_1(t)) \mid t \in \mathbb{R}_+, \psi \in X_0(t)\}$, và kí hiệu

$S_t := \{\psi + \Phi_t(\psi) : (t, \psi + \Phi_t(\psi)) \in S\}$,

(ii) $S_t$ đồng phôi với $X_0(t)$ với mọi $t \ge 0$.

(iii) Với mỗi $\phi \in S_s$, phương trình (5) có một và chỉ một nghiệm $u(t)$ của trên $\mathbb{R}_+$ thỏa mãn điều kiện ban đầu $u_s = \phi$ và hàm $\chi_{[s,\infty)}(t) u_t, t \in \mathbb{R}_+$, thuộc $\mathcal{E}$ trong đó $\chi_{[s,\infty)}$ là hàm đặc trưng của khoảng $[s,\infty)$. Hơn nữa, hai nghiệm $u(t)$ và $v(t)$ bất kỳ của phương trình (5) tương ứng với điều kiện ban đầu $\phi_1, \phi_2 \in S_s$ hút nhau cấp mũ theo nghĩa, tồn tại các hằng số dương $\mu$ và $C_\mu$ phụ thuộc vào $s \ge 0$ sao cho

$$\| u_t - v_t \|_{C_\nu} \le C_\mu e^{-\mu(t-s)} \| (P(s)\phi_1)(0) - (P(s)\phi_2)(0) \|, \text{ với } t \ge s, \quad (11)$$

(iv) $S$ bất biến dưới phương trình (5), tức là, nếu $u(t), t \in \mathbb{R}$, là nghiệm của phương trình (5) thỏa mãn điều kiện ban đầu $u_s \in S_s$ và $\chi_{[s,\infty)}(t) u_t \in \mathcal{E}$ thì chúng ta có $u_t \in S_t$ với mọi $t \ge s$.

**Định lý 3.2.** *Với giả thiết như trong Bổ đề 2.2 và hàm* $e_\nu(t) = e^{-\nu t}$ *với* $t \geq 0$. *Khi đó, nếu hàm* $f$ *là* $\varphi-$*Lipschitz với* $\varphi$ *thỏa mãn*

$$\max\{N(1+H)(N_1 \| \Lambda_1 T_1^{+}\varphi \|_\infty + N_2 \| \Lambda_1 \varphi \|_\infty), N(1+H)(\| h_\nu \|_E + NN_1 \| e_\nu \|_E \| \varphi \|_{E'})\} < 1,$$

*thì tồn tại đa tạp bất biến chấp nhận được ổn định* $S$ *thuộc* $\mathcal{E}-$*lớp cho nghiệm của phương trình (5).*

*Chứng minh.* Vì $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ có nhị phân mũ, chúng ta có với mỗi $t \geq 0$ không gian pha $C_\nu$ phân tích thành tổng trực tiếp $C_\nu = \operatorname{Im} P(t) \oplus \operatorname{Ker} P(t)$, trong đó các phép chiếu $P(t), t \geq 0$ được định nghĩa như trong đẳng thức (4). Rõ ràng, $\sup_{t\geq 0} \| P(t) \| < \infty$.

Bây giờ chúng ta xây dựng đa tạp $S = \{(t, S_t)\}_{t\geq 0}$ cho nghiệm của phương trình (5). Để làm điều này, chúng ta xác định mặt $S_t$ với $t \geq 0$ bởi công thức

$$S_t := \{\phi + \Phi_t(\phi) : \phi \in \operatorname{Im} P(t)\} \subset C_\nu ,$$

và toán tử $\Phi_t$ được định nghĩa với mỗi $t \geq 0$ bởi

$$\Phi_t(\phi)(\theta) = \int_t^\infty G(t-\theta,\tau) f(\tau, u_\tau) d\tau \text{ , với mọi } \theta \in (-\infty, 0],$$

ở đây $u(\cdot)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (5) trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $P(t)u_t = \phi$ và $\chi_{[t,\infty)} u_t \in \mathcal{E}$ (Chú ý rằng sự tồn tại và duy nhất của nghiệm $u(\cdot)$ được suy ra bởi Định lí 2.4. Mặt khác, bởi định nghĩa của hàm Green $G$ ta có $\Phi_t(\phi) \in \operatorname{Ker} P(t)$. Tiếp theo, chúng ta chứng minh rằng đa tạp $S$ thỏa mãn các điều kiện của Định nghĩa 3.1.

Trước tiên, ta chứng minh rằng $\Phi_{t_0}$ là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz không phụ thuộc vào $t_0$. Thật vậy, với $\phi_1$ và $\phi_2$ thuộc $\operatorname{Im} P(t_0)$, chúng ta có

$$\begin{aligned} \| \Phi_{t_0}(\phi_1)(\theta) - \Phi_{t_0}(\phi_2)(\theta) \| &\leq N(1+H) \int_{t_0}^\infty e^{-\nu|t_0-\theta-\tau|} \varphi(\tau) \| u_\tau - v_\tau \|_{C_\nu} \, d\tau \\ &\leq N(1+H) \int_{t_0}^\infty \varphi(\tau) \| u_\tau - v_\tau \|_{C_\nu} \, d\tau \leq N(1+H) \| \varphi \|_{E'} \| u - v \|_{\mathcal{E}} \end{aligned} \tag{12}$$

Hơn nữa, theo phương trình Lyapunov-Perron đối với $u(\cdot)$ và $v(\cdot)$ (xem phương trình (6)), chúng ta có:

$$\| u - v \|_E \leq N e^{-\nu(t-t_0)} \| \phi_1 - \phi_2 \|_{C_\nu} + N(1+H) h_\nu(t) \| u - v \|_E \text{ , với } t \geq t_0 .$$

Bởi tính chất lưới Banach của E và $e^{-\nu(t-t_0)} = T_{t_0}^{+} e_\nu(t)$, chúng ta đạt được

$$\| u - v \|_{\mathcal{E}} \leq\leq NN_1 \| e_\nu \|_E \| \phi_1 - \phi_2 \|_{C_\nu} + N(1+H) \| h_\nu \|_{\mathcal{E}} \| u - v \|_{\mathcal{E}} .$$

Điều này suy ra rằng

$$\| u - v \| \leq \frac{\leq N N_1 \| e_\nu \|_E}{1 - N(1+H) \| h_\nu \|_E} \| \phi_1 - \phi_2 \|_{C_\nu} .$$

Thay bất đẳng thức này vào (12), chúng ta thu được:

$$\| \Phi_{t_0}(\phi_1) - \Phi_{t_0}(\phi_2) \|_{C_\nu} \leq \frac{N^2 (1+H) N_1 \| e_\nu \|_E \| \varphi \|_{E'}}{1 - N(1+H) \| h_\nu \|_E} \| \phi_1 - \phi_2 \|_{C_\nu} .$$

Do đó, $\Phi_{t_0}$ là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz không phụ thuộc vào $t_0$:

$$k := \frac{N^2 (1+H) N_1 \| e_\nu \|_E \| \varphi \|_{E'}}{1 - N(1+H) \| h_\nu \|_E} < 1 .$$

Để chứng minh rằng $S_{t_o}$ đồng phôi với $\operatorname{Im} P(t_0)$. Chúng ta xác định phép biến đổi $D : \operatorname{Im} P(t_0) \to S_{t_0}$ bởi $D\phi := \phi + \Phi_{t_0}(\phi)$, với mọi $\phi \in \operatorname{Im} P(t_0)$. Rõ ràng $D$ là liên tục và toàn ánh. Nếu $D\phi_1 = D\phi_2$ thì $\phi_1 - \phi_2 = \Phi_{t_0}(\phi_2) - \Phi_{t_0}(\phi_1)$. Vì $\Phi_{t_0}$ là ánh xạ Lipschitz với hằng số Lipschitz $k < 1$ nên $\phi_1 = \phi_2$. Do đó, $D$ là song ánh. Chúng ta có

$$\| \phi_1 - \phi_2 \|_{C_\nu} \leq \| D\phi_1 - D\phi_2 \|_{C_\nu} + \| \Phi_{t_0}(\phi_2) - \Phi_{t_0}(\phi_1) \|_{C_\nu} \leq \| D\phi_1 - D\phi_2 \|_{C_\nu} + k \| \phi_1 - \phi_2 \|_{C_\nu}$$

.

Vì thế $\| \phi_1 - \phi_2 \|_{C_\nu} \leq \frac{1}{1-k} \| D\phi_1 - D\phi_2 \|_{C_\nu}$. Điều này kéo theo tính liên tục của ánh xạ ngược $D^{-1}$. Vì vậy, $D$ là đồng phôi. Do đó, điều kiện (ii) trong Định nghĩa 3.1 được thỏa mãn.

Điều kiện (iii) trong Định nghĩa 3.1 được suy ra từ Định lí 2.4. Bây giờ chúng ta chứng minh rằng điều kiện (iv) của Định nghĩa 3.1 được thỏa mãn. Thật vậy, cho $u(\cdot)$ là nghiệm của phương trình sao cho hàm $u_s(\theta) \in S_s$ với mọi $\theta \in (-\infty, 0]$. Khi đó, theo Bổ đề 2.2, nghiệm $u(t)$, với $t \in [s, \infty)$ được viết lại dưới dạng

$$u(t) = U(t,s) v_0 + \int_s^\infty G(t,\tau) f(\tau, u_\tau) d\tau \text{ , với } v_0 \in \operatorname{Im} P(s) .$$

Vì vậy, với $t \geq s$ và $\theta \in (-\infty, 0]$, chúng ta có:

$$u(t-\theta) = U(t-\theta, s) v_0 + \int_s^\infty G(t-\theta, \tau) f(\tau, u_\tau) d\tau ,$$

$$= U(t-\theta, t) \left[ U(t,s) v_0 + \int_s^t U(t,\tau) P(\tau) f(\tau, u_\tau) d\tau \right] + \int_t^\infty G(t-\theta, \tau) f(\tau, u_\tau) d\tau .$$

Đặt $\mu_0 = U(t,s)\nu_0 + \int_s^t U(t,\tau)P(\tau)f(\tau,u_\tau)d\tau$. Chúng ta có $P(t)\mu_0 = \mu_0$, vì vậy $\mu_0 \in \operatorname{Im} P(t)$. Do đó chúng ta đạt được $U(t-\theta,t)\mu_0$ thuộc $\operatorname{Im} P(t)$ và

$$u(t-\theta) = U(t-\theta,s)\mu_0 + \int_t^\infty G(t-\theta,\tau)f(\tau,u_\tau)d\tau .$$

Bởi tính duy nhất $u(\cdot)$ trên $\mathbb{R}$ như trong chứng minh của Định lí 2.4 ta có phương trình (5) có nghiệm duy nhất $u(\cdot)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(P(t)u_t)(\theta) = U(t-\theta,t)\mu_0$ và

$$u(\varsigma) = U(2t-\varsigma,t)\mu_0 + \int_t^\infty G(2t-\varsigma,\tau)f(\tau,u_\tau)d\tau ,$$

với $\varsigma \in \mathbb{R}$. Vì thế hàm lịch sử $u_t$ có thể được viết dưới dạng

$$u_t(\theta) = u(t+\theta) = U(t-\theta,t)\mu_0 + \int_t^\infty G(t-\theta,\tau)f(\tau,u_\tau)d\tau = \phi(\theta) + \Phi_t(\phi)(\theta) .$$

Vì vậy $u_t \in S_t$ với $t \geq s$. □

**4. KẾT LUẬN**

Bài báo đã chứng minh điều kiện tồn tại đa tạp bất biến chấp nhận được ổn định thuộc không gian $\mathcal{E}$-lớp đối với nghiệm của phương trình tiến hóa nửa tuyến tính chứa trễ vô hạn.

---

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


1. N. T. Huy (2006), *exponential dichotomy of evolution equations and admissibility of function spaces on a half-line*, J. Funct. Anal., 235, 330-354.
2. N.T. Huy, V.T.N. Ha (2014), *Admissibly integral manifolds for semilinear evolution equations*, Annales Polonici Mathematici 112, pp. 127-163.
3. N. T. Huy (2009), *Invariant manifolds of admissible classes for semi-linear evolution equations,* J. Diff. Eq., 246 , 1820-1844.
4. N. T. Huy, V. T. N. Ha (2014), *Admissibly Integral Manifolds for Semi-linear Evolution Equations,* Annal. Pol. Math., 112, 127-163.
5. N. T. Huy, T. V. Duoc (2014), *Integral manifolds for partial functional differential equations in admissible spaces on a half-line*, J. Math. Anal. Appl., 411, 816-828.
6. N. T. Huy, T. V. Duoc (2015), *Unstable manifolds for partial functional differential equations in admissible spaces on the whole line*, Vietnam J. Math., 43, 37-55.
7. N.T. Huy (2009), *Invariant manifolds of admissible classes for semi-linear evolution equations*, J. Differential Equations 246, pp1820-1844.
8. J.H. Liu (2000) *Periodic Solutions of Infinite Delay Evolution Equations.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 247, pp. 627-644.

9. J.H. Liu, G.M. N'Guerekata, N.V. Minh (2008) *Topics on stability and periodicity in abstract differential equations.* Series on Concrete and Applicable Mathematics - Vol. 6, World Scientific Publishing, Singapore.

10. N.V. Minh, F. R¨abiger, R. Schnaubelt (1998) *Exponential stability, exponential expansiveness and exponential dichotomy of evolution equations on the half line.* Integr. Eq. and Oper. Theory, 32, pp. 332-353.

11. Nguyen Thieu Huy, Dinh Xuan Khanh (2017), *Local stable manifolds of admissible classes for Parabolic Functional Equations and applications to Hutchinson Models*. International Journal of Evolution Equations, Vol. 10, Number. 3-4, pp. 95– 106.

12. Đinh Xuân Khánh (2018), *Đa tạp chấp nhận được không ổn định địa phương của phương trình tiến hóa nửa tuyến tính chứa trễ*, Hai Phong University journal of science. 230, pp. 90-101.