NHIỄU CỦA KHẢ NGHỊCH DRAZIN

Vũ Tiến Đức
Khoa Toán và KHTN
Email: ducvt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 14/5/2021
Ngày PB đánh giá: 28/5/2021
Ngày duyệt đăng: 10/6/2021

TÓM TẮT: Cho A và E là các ma trận vuông phức cấp n và $B = A + E$. Ký hiệu A^D là khả nghịch Drazin của A. Ta sẽ đánh giá cận trên của sai số tương đối $\frac{\| B^D - A^D \|}{\| A^D \|}$ với điều kiện cụ thể nào đó. Cận trên của sai số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, với $b \in \operatorname{Im} A$, cũng sẽ được nghiên cứu trong bài báo này.

Từ khóa: Chỉ số, khả nghịch Drazin, hệ phương trình suy biến..

PERTURBATION OF THE DRAZIN INVERSE

ABSTRACT: Let A and E be square matrices of order n and $B = A + E$. Denote the Drazin inverse of A by A^D. We give an upper bound for the relative error $\frac{\| B^D - A^D \|}{\| A^D \|}$ under certain circumstances. An error bound of the solution for the linear system $Ax = b, b \in \operatorname{Im} A$ is also considered. .

Key words: Index, Drazin inverse, singular equationse

1. GIỚI THIỆU

Điều kiện cần và đủ đối với tính liên tục của khả nghịch Drazin đã được Campell và Meyer đưa ra vào năm 1975[3], nhưng không một nghiên cứu chi tiết nào về cận trên được đưa ra. Cũng trong bài báo này, họ chỉ ra hai khó khăn trong việc đưa ra ước lượng chuẩn của khả nghịch Drazin. Thứ nhất, khả nghịch Drazin là loại yếu của "luật giản ước" và có phần khó làm việc hơn theo phương pháp đại số so với khả nghịch Moore-Penrose. Hơn nữa, dạng chuẩn tắc Jordan không phải là hàm liên tục từ $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, trong khi đó thì khả nghịch Drazin có thể coi là một dạng chuẩn tắc Jordan. Vì những lí do này mà họ cho rằng khó có thể đánh giá chuẩn đối với khả nghịch Drazin.

Trong bài viết này, ta ký hiệu $\mathbb{C}^{n\times n}$ là tập hợp các ma trận phức cấp n; $\operatorname{Im} A$ và $\ker A$ theo thứ tự là ảnh và hạt nhân của ma trận A. Ký hiệu $\|.\|$ là chuẩn bán nhân tính nào đó trên $\mathbb{C}^{n\times n}$ thỏa mãn $\| I_n \| = 1$, với I_n là ma trận đơn vị cấp n.

Ta sẽ nghiên cứu chi tiết về cận trên đối với sai số tương đối $\dfrac{\| B^D - A^D \|}{\| A^D \|}$ của $A, A^D, E = B - A$ với những điều kiện cụ thể.

2. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Định nghĩa 2.1. Cho ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Số nguyên không âm k nhỏ nhất thỏa mãn:

$$\operatorname{Im} A^{k+1} = \operatorname{Im} A^k, \tag{1}$$

được gọi là *chỉ số* của ma trận A và ký hiệu là $\operatorname{ind}(A)$.

Nhận xét. Chỉ số của ma trận luôn tồn tại.

Định nghĩa 2.2. Cho ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ với $\operatorname{ind}(A) = k$. Ma trận $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ được gọi là *khả nghịch Drazin* của A nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau

$$AX = XA, XAX = X, A^{k+1}X = A \tag{2}$$

Ký hiệu khả nghịch Drazin của ma trận A là A^D. Khi $\operatorname{ind}(A) = 0$ hoặc $\operatorname{ind}(A) = 1$ thì A^D được gọi là *nghịch đảo nhóm* của A, và ký hiệu là A_g.

Nhận xét. Nếu A là ma trận lũy linh bậc k thì $\operatorname{ind}(A) = k$ và $A^D = O$; còn nếu A là ma trận khả nghịch thì $\operatorname{ind}(A) = 0$ và $A^D = A^{-1}$.

Cho $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ khác ma trận lũy linh và dạng chuẩn tắc Jordan của A là

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} P, \tag{3}$$

Chuẩn bán nhân tính $\|.\|$ trên $\mathbb{C}^{n\times n}$ là chuẩn thỏa mãn

$\| A.B \| \le \| A \| . \| B \|, \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

trong đó A_1 là ma trận khả nghịch và A_2 là ma trận lũy linh. Khi đó ta có $\operatorname{ind}(A)$ bằng bậc lũy linh của A_2 và khả nghịch Drazin của A là:

$$A^D = P^{-1}\begin{bmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P.$$

Định nghĩa 2.3. Ma trận $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ được gọi là *ma trận nhiễu tương thích* của A nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

$$AA^D E = EAA^D, \tag{4}$$

$$E^m = AA^D E^m, \text{ với } m \in \mathbb{N} \text{ nào đó} \tag{5}$$

$$AE(I_n - AA^D) = EA(I_n - AA^D). \tag{6}$$

Bổ đề 2.1. *Cho ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ có phân tích như ở (3). Khi đó ma trận $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ là nhiễu tương thích của A nếu và chỉ nếu*

$$E = P^{-1}\begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{bmatrix} P, \tag{7}$$

với khối ma trận tương thích với $\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$, còn E_2 *là ma trận lũy linh, giao hoán với* A_2.

Chứng minh. Giả sử E là ma trận nhiễu tương thích của A. Đặt:

$$A^{\pi} = I_n - AA^D = P^{-1}\begin{bmatrix} O & O \\ O & I_s \end{bmatrix}P.$$

Khi đó điều kiện (4) tương đương với $A^{\pi}E = EA^{\pi}$. Đặt

$$PEP^{-1} = \begin{bmatrix} E_1 & U \\ V & E_2 \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$PEA^{\pi}P^{-1} = (PEP^{-1})(PA^{\pi}P^{-1}) = \begin{bmatrix} E_1 & U \\ V & E_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} O & O \\ O & I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & U \\ O & E_2 \end{bmatrix}$$

$$PA^{\pi}EP^{-1} = (PA^{\pi}P^{-1})(PEP^{-1}) = \begin{bmatrix} O & O \\ O & I_s \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} E_1 & U \\ V & E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ V & E_2 \end{bmatrix}$$

Từ điều kiện $A^{\pi}E = EA^{\pi}$, suy ra $U = O, V = O$. Vậy đẳng thức (7) thỏa mãn. Bởi điều kiện (5) thì

$$\begin{bmatrix} E_1^m & O \\ O & E_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-s} & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1^m & O \\ O & E_2^m \end{bmatrix} \Rightarrow E_2^m = O.$$

Cuối cùng, điều kiện (6) tương đương với điều kiện

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & O \\ O & I_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & O \\ O & I_s \end{bmatrix},$$

hay

$$\begin{bmatrix} O & O \\ O & A_2E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & E_2A_2 \end{bmatrix}.$$

Vậy $A_2E_2 = E_2A_2$.

Ngược lại, giả sử ma trận $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ thỏa mãn điều kiện (7) với E_2 là ma trận lũy linh, ta có thể kiểm tra lại các điều kiện (4), (5) và (6) đều thỏa mãn với phép nhân các ma trận khối.

Bổ đề 2.2. *Cho ma trận* $F \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *và* $\| F \| < 1$. *Khi đó* $I_n + F$ *là ma trận không suy biến và*

$$\| (I_n + F)^{-1} \| \le \frac{1}{1 - \| F \|}.$$

Định lý 2.1. *Cho ma trận* $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *là nhiễu tương thích của ma trận* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *sao cho* $\| A^D E \| < 1$. *Đặt* $B = A + E$, *khi đó:*

$$B^{\pi} = A^{\pi}, \tag{8}$$
$$B^D = (I_n + A^D E)^{-1} A^D = A^D (I + EA^D)^{-1}, \tag{9}$$
$$\frac{\| B^D - A^D \|}{\| A^D \|} \le \frac{\| A^D E \|}{1 - \| A^D E \|} \tag{11}$$
$$\frac{\| A^D \|}{1 + \| A^D E \|} \le \| B^D \| \le \frac{\| A^D \|}{1 - \| A^D E \|} \tag{12}$$

Chứng minh. Ta có
$$I_n + A^D E = I_n + P^{-1} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{bmatrix} P = P^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-s} + A_1^{-1} E_1 & O \\ O & I_s \end{bmatrix} P .$$

Theo bổ đề 2.2 thì ma trận $I_n + A^D E$ khả nghịch vì $\| A^D E \| < 1$, do đó các ma trận $I_{n-s} + A_1^{-1} E_1, A_1 + E_1$ khả nghịch vì
$$I_{n-s} + A_1^{-1} E_1 = A_1^{-1} (A_1 + E_1) .$$

Bởi bổ đề 2.1 thì E_2 là ma trận lũy linh, giao hoán với A_2, do đó $A_2 + E_2$ cũng là ma trận lũy linh, cho nên
$$B = P^{-1} \begin{bmatrix} A_1 + E_1 & O \\ O & A_2 + E_2 \end{bmatrix} P.$$

Do đó $B^{\pi} = P^{-1} \begin{bmatrix} O & O \\ O & I_s \end{bmatrix} P = A^{\pi}$. Tính toán ta được:
$$\begin{aligned} (I_n + A^D E)^{-1} A^D &= P^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-s} + A_1^{-1} E_1 & O \\ O & I_s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} (I_{n-s} + A_1^{-1} E_1)^{-1} & O \\ O & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} (A_1 + E_1)^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P = B^D \end{aligned}$$

Đẳng thức thứ hai của (9) được chứng minh tương tự.

Áp dụng Bổ đề 2.2, ta được
$$\| (I_n + A^D E)^{-1} \| \le \frac{1}{1 - \| A^D E \|} .$$

Lại có $\| B^D - A^D \| = \| (I_n + A^D E)^{-1} A^D - A^D \|$
$$\begin{aligned} &= \| (I_n + A^D E)^{-1} [I_n - (I_n + A^D E)] A^D \| \\ &= \| (I_n + A^D E)^{-1} A^D E A^D \| \\ &\le \| (I_n + A^D E)^{-1} \| . \| A^D E \| . \| A^D \| . \end{aligned}$$

Từ đó ta có đánh giá

$$\frac{\| B^D - A^D \|}{\| A^D \|} \le \frac{\| A^D E \|}{1 - \| A^D E \|}$$

$$\| B^D \| = \| (I_n + A^D E)^{-1} A^D \| \le \| (I_n + A^D E)^{-1} \| . \| A^D \| \le \frac{\| A^D \|}{1 - \| A^D E \|}$$

$$\| A^D \| = \| (I_n + A^D E).B^D \| \le \| B^D \| . \| I_n + A^D \| \le \| B^D \| (1 + \| A^D E \|).$$

Suy ra

$$\frac{\| A^D \|}{1 + \| A^D E \|} \le \| B^D \| \le \frac{\| A^D \|}{1 - \| A^D E \|}. \square$$

Hệ quả 2.1. *Giả sử* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *và* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ *là dãy các nhiễu tương thích của* A *sao cho* $\sigma_k = \| A^D E_k \| \to 0$. *Khi đó*

$$\| (A + E_k)^D - A^D \| \le \frac{\| A^D \| .\sigma_k}{1 - \sigma_k} \to 0, \, khi \;\, k \to \infty. \qquad (13)$$

Điều kiện $\sigma_k = \| A^D E_k \| \to 0$ trong hệ quả 2.1 có thể thay thế bởi giả thiết mạnh hơn, đó là $\| E_k \| \to 0$, khi đó (13) vẫn thỏa mãn với $\sigma_k \le \| A^D \| . \| E_k \| \to 0$. Tuy nhiên, ở ví dụ dưới đây cho ta thấy điều kiện $\| A^D E_k \| \to 0$ không kéo theo $\| E_k \| \to 0$.

Ví dụ 1. Cho

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}, E_k = \begin{bmatrix} F_k & O \\ O & A_2 \end{bmatrix},$$

ở đây A_1 là ma trận khả nghịch, A_2 là ma trận lũy linh khác ma trận không và $F_k \to O$. Khi đó mỗi E_k là một nhiễu tương thích của A, và

$$E_k \to \begin{bmatrix} O & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} \ne O.$$

Tuy nhiên

$$A^D E_k = \begin{bmatrix} A_1^{-1} F_k & O \\ O & O \end{bmatrix} \to O.$$

Định lý 2.1 mở rộng kết quả của Wei và Wang [7], họ đã nghiên cứu nhiễu của khả nghịch Drazin và thu được đánh giá đối với chuẩn $\| B^D - A^D \|$ với điều kiện

$$AA^D EAA^D = E \text{ và } \| A^D E \| < 1. \qquad (*)$$

Để thấy được mối liên hệ giữa kết quả của họ và Định lý 2.1, ta xét mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1. *Các điều kiện sau đây là tương đương với giả thiết là* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *là một ma trận với* $\operatorname{ind}(A) = k$, *và* $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

(i) $AA^D EAA^D = E$.

(ii) $A^{\pi} E = O = EA^{\pi}$.

(iii) $\operatorname{Im} E \subset \operatorname{Im} A^k$ *và* $\ker A^k \subset \ker E$.

(iv) Nếu A *có phân tích (3) với* A_1 *là ma trận không suy biến và* A_2 *là ma trận lũy linh thì* E *có phân tích (7) với* $E_2 = O$.

Chứng minh.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). Nhắc lại rằng $AA^D = I_n - A^\pi$. Nếu (i) thỏa mãn, khi đó

$$EA^D A = AA^D E(AA^D)^2 = AA^D EAA^D = E,$$

và $EA^\pi = O$. Tương tự thì $A^\pi E = O$.

Ngược lại, nếu (ii) thỏa mãn, ta có

$$A^\pi E = O \Rightarrow E = AA^D E \Rightarrow EAA^D = AA^D EAA^D \Rightarrow E = AA^D EAA^D.$$

Tương tự nếu $EA^\pi = O \Rightarrow E(I_n - AA^D) = O \Rightarrow E = EAA^D$, suy ra

$$AA^D E = AA^D EAA^D.$$

Vì $A^\pi E = EA^\pi \Leftrightarrow (I_n - AA^D)E = E(I_n - AA^D) \Leftrightarrow AA^D E = EAA^D$, do đó

$$E = AA^D E = AA^D EAA^D$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Chú ý rằng $\operatorname{Im} A^\pi = \ker A^k$ và $\ker A^\pi = \operatorname{Im} A^k$.

Từ $A^\pi E = O$, suy ra

$$\operatorname{Im} E \subset \ker A^\pi = \operatorname{Im} A^k.$$

Từ $EA^\pi = O$, suy ra

$$\operatorname{Im} A^\pi \subset \ker E \Rightarrow \ker A^k \subset \ker E.$$

Ngược lại, nếu $\operatorname{Im} E \subset \operatorname{Im} A^k$ và $\ker A^k \subset \ker E$ thì

$$\operatorname{Im} E \subset \operatorname{Im} A^k = \ker A^\pi \Rightarrow A^\pi E = O.$$

$$\operatorname{Im} A^\pi = \ker A^k \subset \ker E \Rightarrow EA^\pi = O.$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv). Nếu $A^\pi E = O = EA^\pi$ thì ta có điều kiện (4), (5), (6) đều thỏa mãn, tức E là ma trận nhiễu tương thích của A. Theo Bổ đề 2.1 thì ma trận E có phân tích

$$E = P^{-1}\begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{bmatrix} P.$$

Ta có

$$O = A^\pi E = P^{-1}\begin{bmatrix} O & O \\ O & I_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & E_2 \end{bmatrix} P = P^{-1}\begin{bmatrix} O & O \\ O & E_2 \end{bmatrix} P.$$

Suy ra $E_2 = O$. Ngược lại, giả sử

$$E = P\begin{bmatrix} E_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}; A^\pi = P\begin{bmatrix} O & O \\ O & I_s \end{bmatrix} P^{-1};$$

Khi đó $A^\pi E = EA^\pi = O$. □

Nhận xét. Nếu ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ với $\operatorname{ind}(A) = k$ thỏa mãn điều kiện (*), khi đó các giả thiết của Định lý 2.1 được thỏa mãn với nhiễu có dạng sau:

$$B = A + E = P^{-1}\begin{bmatrix} A_1 + E_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} P.$$

Từ (8) ta có $B^{\pi} = A^{\pi}$ và chú ý rằng và $\ker A^{\pi} = \operatorname{Im} A^k$, suy ra $\operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} B^k$.

Lại có $\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} A^k \oplus \ker A^k = \operatorname{Im} B^k \oplus \ker B^k \Rightarrow \ker A^k = \ker B^k$.

Ví dụ 2. Ta sẽ chứng tỏ rằng nếu A và các ma trận E_k thỏa mãn điều kiện (*), khi đó điều kiện $\delta_k = \| A^D E_k \| \to 0$ tương đương với điều kiện $\| E_k \| \to 0$.

Thật vậy, giả sử $\delta_k = \| A^D E_k \| \to 0$, ta có:

$$\| E_k \| = \| AA^D E_k \| \le \| A \| . \| A^D E_k \| = \| A \| .\delta_k \to 0.$$

Điều ngược lại là rõ ràng. Điều này có nghĩa rằng, với điều kiện (*) thì

$$(A + E_k)^D \to A^D \Leftrightarrow E_k \to O.$$

3. Ứng dụng

Trong phần này, ta sẽ đưa ra ứng dụng đối với nhiễu của hệ phương trình tuyến tính. Cho ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ với $\operatorname{ind}(A) = k$. Khi đó $\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} A^k \oplus \ker A^k$.

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$Ax = b,\ b \in \operatorname{Im} A^k \tag{14}$$

Phương trình (14) có nghiệm $x_0 = A^D b$ và là nghiệm duy nhất thuộc $\operatorname{Im} A^k$

Thật vậy, do $b \in \operatorname{Im} A^k \Rightarrow b = A^k v$. Khi đó

$$A(A^D b) = AA^D A^k v = A^{k+1} A^D v = A^k v = b.$$

Vậy $x_0 = A^D b$ là nghiệm của hệ phương trình (14). Lại có

$$x_0 = A^D b = A^D A^k v = A^k (A^D v) \in \operatorname{Im} A^k.$$

Giả sử $u = A^k c \in \operatorname{Im} A^k$ là nghiệm khác của (14), suy ra $u - x_0 \in \operatorname{Im} A^k$. Ta có

$$\begin{cases} Au = b \\ AA^D b = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^{k+1} u = A^k b \\ A^{k+1} A^D b = A^k b \end{cases} \Rightarrow A^{k+1}(u - A^D b) = 0,$$

hay $u - A^D b \in \ker A^{k+1} = \ker A^k$. Do đó

$$u - A^D b \in \ker A^k \bigcap \operatorname{Im} A^k = \{0\} \Rightarrow u = A^D b = x_0.$$

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình (14) là $A^D b + \ker A$.

Định nghĩa 3.1. Cho ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Số điều kiện* của khả nghịch Drazin được định nghĩa là:

$$\kappa_D(A) = \| A \| . \| A^D \|.$$

Định lý 3.1. *Cho ma trận* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *với* $\operatorname{ind}(A) = k$, $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *là ma trận nhiễu tương thích của* A *thỏa mãn* $\| A^D E \| < 1$, *đặt* $B = A + E$ *và* $b, u \in \operatorname{Im} A^k$. *Nếu* $x \in \mathbb{C}^n$ *là nghiệm của hệ phương trình* $Ax = b$ *và* $y \in \mathbb{C}^n$ *là nghiệm của phương trình* $Ay = b + u$. *Khi đó*

$$\frac{\|(I_n - A^\pi)(y-x)\|}{\|(I_n - A^\pi)x\|} \le \frac{\|A^D\|}{1-\|A^D E\|}.\left[\|E\| + \frac{\|u\|}{\|A^D b|}\right. \quad (15)$$

Hơn nữa, nếu $\|A^D\|.\|E\|<1$ *thì*

$$\frac{\|(I_n - A^\pi)(y-x)\|}{\|(I_n - A^\pi)x\|} \le \frac{\kappa_D(A)}{1-\kappa_D(A).\dfrac{\|E\|}{\|A\|}}.\left[\frac{\|E\|}{\|A\|} + \frac{\|u\|}{\|b\|}\right] \quad (16)$$

Chứng minh. Xét $x_0 = A^D b, y_0 = B^D(b+u)$. Từ (9) ta có:

$$B^D(I_n + EA^D) = A^D \Rightarrow B^D - A^D = -B^D E A^D.$$

Do đó $y_0 - x_0 = (B^D - A^D)b + B^D u = -B^D E x_0 + B^D u$, suy ra

$$\|y_0 - x_0\| \le \|B^D\|.(\|Ex_0\| + \|u\|).$$

Áp dụng (11) với điều kiện $\|A^D E\|<1$, ta được:

$$\|y_0 - x_0\| \le \frac{\|A^D\|}{1-\|A^D E\|}(\|Ex_0\| + \|u\|) \le \frac{\|A^D\|}{1-\|A^D E\|}(\|E\|.\|x_0\| + \|u\|),$$

$$\Rightarrow \frac{\|y_0 - x_0\|}{\|x_0\|} \le \frac{\|A^D\|}{1-\|A^D E\|}\left(\|E\| + \frac{\|u\|}{\|x_0\|}\right) = \frac{\|A^D\|}{1-\|A^D E\|}\left(\|E\| + \frac{\|u\|}{\|A^D b\|}\right)$$

Vậy (15) thỏa mãn khi $x = x_0, y = y_0$.

Nếu $Ax = b$ và $By = b + u$, khi đó $x = x_0 + x_1$ và $y = y_0 + y_1$ với

$$x_1 \in \ker A \subset \ker A^k,\ y_1 \in \ker B \subset \ker B^k = \ker A^k.$$

Chú ý rằng $y_1 - x_1 \in \ker A^k = \ker(I_n - A^\pi)$, suy ra

$$\begin{aligned}(I_n - A^\pi)(y-x) &= (I_n - A^\pi)(y_0 - x_0) + (I_n - A^\pi)(y_1 - x_1)\\ &= (I_n - A^\pi)(y_0 - x_0) = y_0 - x_0\end{aligned}$$

Nhưng $y_0 - x_0 \in \operatorname{Im} A^k \Rightarrow y_0 - x_0 = A^k u_0$, do đó

$$(I_n - A^\pi)(y_0 - x_0) = AA^D A^k u_0 = A^k u_0 = y_0 - x_0$$

Vậy $(I_n - A^\pi)(y-x) = (y_0 - x_0)$. Tương tự thì $(I_n - A^\pi)x = x_0$, do đó

$$\frac{\|(I_n - A^\pi)(y-x)\|}{\|(I_n - A^\pi)x\|} \le \frac{\|A^D\|}{1-\|A^D E\|}.\left[\|E\| + \frac{\|u\|}{\|A^D b\|}\right]$$

Tiếp theo, ta có $1-\|A^D E\| \ge 1-\|A^D\|.\|E\|>0$ và

$$b = AA^D b \Rightarrow \|b\| \le \|A\|.\|A^D b\| \Rightarrow \frac{1}{\|A^D b\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}.$$

Suy ra $\dfrac{\|(I_n - A^\pi)(y-x)\|}{\|(I_n - A^\pi)x\|} \le \dfrac{\|A^D\|}{1-\|A^D\|.\|E\|}.\left[\|E\| + \dfrac{\|A\|.\|u\|}{\|b\|}\right]$

$$\leq \frac{\|A\|.\|A^D\|}{1-\dfrac{\|A\|.\|A^D\|.\|E\|}{\|A\|}}.\left[\frac{\|E\|}{\|A\|}+\frac{\|u\|}{\|b\|}\right]$$

Vậy $\dfrac{\|(I_n - A^\pi)(y-x)\|}{\|(I_n - A^\pi)x\|} \leq \dfrac{\kappa_D(A)}{1-\kappa_D(A)\dfrac{\|E\|}{\|A\|}}.\left[\dfrac{\|E\|}{\|A\|}+\dfrac{\|u\|}{\|b\|}\right]$. □

4. Kết luận

Tính liên tục của khả nghịch Drazin đã được một số tác giả nghiên cứu, nhưng lại ít có các nghiên cứu chi tiết về đánh giá về cận trên của sai số. Kết quả chính về tính liên tục của khả nghịch Drazin ở các bài báo [4,6] nói rằng nếu (A_n) là dãy các ma trận trong $\mathbb{C}^{n\times n}$ hội tụ về ma trận A, khi đó $A_n^D \to A^D$ khi và chỉ khi $A_k^\pi \to A^\pi$. Tuy nhiên, có nhiều khó khăn khi đánh giá sai số $\| A_k^D - A^D \|$. Một số tác giả đã đưa ra đánh giá sai số cận trên với những điều kiện quá "chặt".

Trong bài báo này, ta đã mở rộng các kết quả của bài báo [3], đánh giá sai số $\| A_k^D - A^D \|$ với những điều kiện "nhẹ" hơn, đó là điều kiện $\| A^D E_k \| \to 0$, trong khi đó một số tác giả yêu cầu $\| E_k \| \to 0$ (chú ý nếu $\| E_k \| \to 0$ thì $\| A^D E_k \| \to 0$ vì chuẩn ta xét là chuẩn bán nhân tính, điều ngược lại không đúng đã chỉ ra ở Ví dụ 1). Đồng thời ta cũng đưa ra được đánh giá sai số của nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. A. Ben-Iserael, T. N. E. Greville (2002), *Generalized Inverses*: *Theorey and Applications*, Wiley-Interscience, 1974; 2nd Edition, SpringerVerlag, New York.

2. M. P. Drazin (1985), *Pseudo inverses in associate rings and semigroups*, Amer. Math. Mon., 65 506-514.

3. S. Campbell and C. Meyer (1975), *Continuity properties of the Drazin pseudoinverse*, Lin. Alg. Appl., 10: 77–83, .

4. H.C. Huang (1984), *Bounds on condition number of a matrix,* J. Comput. Math., 2(4) 356-360.

5. R. Penrose (1955), *A genaralized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 52 406-413.

6. J. G. Sun (2001), *Perturbation analysis for matrix*, Second ed., Science Press, Beijing.

7. G. Wang, Y. Wei (2004), S. Qiao, *Generalized Inverses: Theory and Computations*, Science Press, Beijing.

8. Y. Wei, G. Wang (1997), *The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications*, Linear Algebra Appl., 258179-186.

9. G. W. Stewart (1969), *On the continuity of the generalized inverse*, SZAMJ. A&. Math. 17, 33-45.