

# MỘT PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG ĐƠN ĐIỀU

Hồ Phi Tứ  
Khoa Toán - KHTN  
Email: tuhp@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 06/5/2022  
Ngày PB đánh giá: 19/5/2022  
Ngày duyệt đăng: 26/5/2022

**TÓM TẮT:** Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một phương pháp lặp mới giải bài toán cân bằng với song hàm đơn điệu. Phương pháp dựa trên phương pháp lặp của Ronald và Bruck và kỹ thuật bài toán phụ của Noor kết hợp với tính chất của ma trận đối xứng xác định dương. Thuật toán được đề xuất khá đơn giản, hơn nữa, nó giảm nhẹ các giả thiết cần thiết để thu được sự hội tụ về nghiệm của bài toán cân bằng. Cụ thể các phương pháp trước đây thường yêu cầu điều kiện đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz của song hàm. Trong phương pháp chúng tôi đề xuất chỉ yêu cầu tính đơn điệu của song hàm và không cần tính liên tục Lipschitz. Bên cạnh đó, định lý hội tụ của thuật toán cũng được thiết lập và chứng minh một cách chi tiết trong bài báo.

**Từ khóa:** Bài toán cân bằng; Tính đơn điệu; Kỹ thuật bài toán phụ; Phương pháp lặp

---

## A ITERATIVE METHOD FOR MONOTONE EQUILIBRIUM PROBLEM

**ABSTRACT:** In this paper, we introduces a new iterative method for solving monotone equilibrium problem. The method is based on the iteration method of Ronald and Bruck and the auxiliary problem principle of Noor, combining the usage of symmetric and positive definite matrices. The proposed algorithm is quite simple, moreover, it simplifies the assumptions necessary in order to converge to the solution. Specifically, whereas previous methods require strong monotonicity and Lipschitz-type continuous conditions. Our proposed method only requires monotonicity without Lipschitz-type continuous conditions. Besides that, the convergence theorem is also established and to be proved a detail in the paper.

**Key words:** Equilibrium problem; Monotone; Auxiliary problem principle. Iterative method.

## 1. GIỚI THIỆU

- Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian  $R^n$ , xét song hàm  $f: C \times C \rightarrow R$  sao cho  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ . Xét bài toán cân bằng (*Equilibrium problem*) và được ký hiệu là  $EP(f, C)$ :

- Tìm  $x^* \in C$  sao cho  $f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C$ .
- Tập nghiệm của bài toán trên được ký hiệu  $Sol(f, C)$ .
- Xét ánh xạ đa trị  $F: C \rightarrow 2R^n$ . Khi đó, bài toán:

Tìm  $x^* \in C$  và  $\omega^* \in F(x^*)$  sao cho  $\langle \omega^*, x - x^* \rangle \geq 0 \forall x \in C$ , được gọi là bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (ký hiệu  $MVI(F, C)$ ). Bằng cách đặt  $f(x, y) := \max \{ \langle \omega, y - x \rangle : \omega \in F(x) \}$ , khi đó bài toán  $EP(f, C)$  và  $MVI(F, C)$  là tương đương với nhau [15].

- Bài toán  $EP(f, C)$  được giới thiệu lần đầu tiên bởi H. Nikaido và K. Isoda [3] vào năm 1955. Tuy bài toán phát biểu khá đơn giản nhưng nó lại bao hàm được nhiều lớp bài toán quan trọng thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị, đơn trị, bài toán điểm bất động, cân bằng Nash, v. v... [2, 9]. Điều này cũng giải thích vì sao bài toán cân bằng ngày càng được nhiều người quan tâm nghiên cứu.

• Một song hàm  $f$  được gọi là

i) *Đơn điệu mạnh* trên  $C$  với hằng số  $\beta$ , nếu và chỉ nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\beta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C;$$

ii) *Đơn điệu* trên  $C$  nếu và chỉ nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0 \quad \forall x, y \in C;$$

iii) *Giả đơn điệu* trên  $C$ , nếu và chỉ nếu

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0 \quad \forall x, y \in C;$$

iv) *Liên tục kiểu Lipschitz* trên  $C$  với các hằng số  $c_1 > 0$  và  $c_2 > 0$ , nếu

$$f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z) + c_1 \|x - y\|^2 + c_2 \|y - z\|^2 \quad \forall x, y, z \in C.$$

Dễ thấy từ i)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  iii).

• Ánh xạ đa trị  $F$  được gọi là đơn điệu nếu  $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$  với mọi  $x, y \in C$  và với mọi  $u \in F(x), v \in F(y)$ .

- Với  $x \in R^n$ . Khi đó  $P_C(x) := \arg \min \{ \|y - x\|^2 : y \in C \}$  được gọi là phép chiếu metric của  $R^n$  lên  $C$ .

- Dễ thấy  $P_C(\cdot)$  có các tính nhất sau:

$$\langle x - y, P_C(x) - P_C(y) \rangle \geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \quad \forall x, y \in R^n,$$

$$\langle x - P_C(x), P_C(x) - y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in R^n, y \in C,$$

$$\|x - y\|^2 \geq \|x - P_C(x)\|^2 + \|y - P_C(y)\|^2 \quad \forall x \in R^n, y \in C.$$

- Với  $x^0 \in C$  thì  $N_C(x^0) = \{ \omega \in R^n : \langle \omega, x - x^0 \rangle \leq 0, \forall x \in C \}$  được gọi là nón pháp tuyến của  $C$  tại  $x^0$ ;

$\partial f(x, \cdot)(x^0) = \{ p \in R^n : f(x, y) \geq \langle p, y - x^0 \rangle + f(x, x^0) \quad \forall y \in C \}$ ,  $x \in C$  được gọi là dưới vi phân của  $f$  theo biến thứ 2 tại  $x^0$ .

- Một hàm  $g : C \rightarrow R$  được gọi là nửa liên tục dưới trên  $C$  nếu với mọi  $x_0 \in C$ , ta có  $\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq g(x_0)$

## 2. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

Các hướng nghiên cứu chính của bài toán cân bằng  $EP(f, C)$  bao gồm: Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, cấu trúc và tính ổn định của tập nghiệm [7, 8]; hướng thứ hai là nghiên cứu các thuật giải và sự hội tụ của các thuật giải [13, 15]; cuối cùng là ứng dụng của bài toán vào các vấn đề thực tế đặc biệt là các mô hình kinh tế [5, 6]. Trong các hướng nghiên cứu trên thì các phương pháp giải đóng một vai trò rất quan trọng. Một số phương pháp giải đáng chú ý cho bài toán cân bằng là phương pháp điểm gần kề [13], nguyên lý bài toán phụ [4] và đặc biệt là phương pháp chiếu và các biến thể của nó [14].

Vào năm 1977 Ronald và Bruck [10] đã giới thiệu một phương pháp lặp khá đơn giản để giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị như sau: Chọn  $x^1 \in C$  và dãy số dương  $\{ \lambda_k \}$ . Tại mỗi bước lặp  $k = 1, 2, \dots$ , thực hiện các tính toán

$$\text{Chọn } \omega^k \in F(x^k);$$

$$\text{Tính } x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda_k \omega^k);$$

$$\text{Đặt } z^k = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j x^j}{\sum_{j=1}^k \lambda_j}.$$

Với các giả thiết tập nghiệm của bài toán  $MVI(F, C)$  khác rỗng,  $F$  đơn điệu trên  $C$  và  $\{\lambda_k\} \subset (0, +\infty)$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = +\infty$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \|\omega^j\| < +\infty$ , thì dãy  $\{z^k\}$  sinh ra bởi thuật toán trên hội tụ yếu về một nghiệm của Bài toán  $MVI(F, C)$ .

Bằng cách sử dụng mối qua hệ tương đương giữa bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị  $MVI(F, C)$  và bài toán cân bằng với song hàm:

$f(x, y) := \max\{\langle \omega, y - x \rangle : \omega \in F(x)\}$ , và với  $\omega^k \in \partial f(x^k, \cdot)(x^k)$ ,  $\lambda_k > 0$ , thì  $P_C(x^k - \lambda_k \omega^k) = \operatorname{agmin}\left\{\lambda_k f(x^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2 : y \in C\right\}$ , chúng tôi đề xuất một thuật toán lặp mới để giải bài toán cân bằng  $EP(f, C)$  với song hàm đơn điệu mà không cần điều kiện liên tục Lipschitz của nó.

### 3. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

#### 3.1 Thuật toán

**Bước 0.** Cho trước ma trận  $M$  vuông cấp  $n$  đối xứng, xác định dương và  $\varepsilon > 0$ . Chọn  $x^1 \in C$  và  $k := 1$ .

**Bước 1.** Giải bài toán lồi mạnh

$$x^{n+1} = \arg \min \left\{ \lambda_k f(x^k, y) + \frac{1}{2} \langle M(y - x^k), y - x^k \rangle : y \in C \right\}.$$

Tính  $r(x^k) = x^{k+1} - x^k$ . Nếu  $\|r(x^k)\| < \varepsilon$  thì dừng, ngược lại thì chuyển sang Bước 2.

**Bước 2.** Tính  $z^k = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j x^j}{\sum_{j=1}^k \lambda_j}$ .

**Bước 3.** Gán  $k := k + 1$  chuyển về Bước 1.

#### 3.2 Sự hội tụ của thuật toán

Để chứng minh sự hội tụ của thuật toán trên ta cần sử dụng tới các bổ đề kỹ thuật sau đây.

**Bổ đề 3.1 ([1])** Cho  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$  và  $\{c_k\}$  là 3 dãy số thực không âm thỏa mãn bất đẳng thức  $a_{k+1} \leq (1 + b_k)a_k + c_k$ ,

Với mọi số tự nhiên  $k \geq 1$ , trong đó  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$  và  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$ .

Thì  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$  tồn tại.

**Bổ đề 3.2 ([11])** Cho  $\{a_h\}$  và  $\{\beta_h\}$  là 2 dãy số thực không âm thỏa mãn các điều kiện  $\lim_{h \rightarrow \infty} a_h = a \in \mathbb{R}$  và  $\sum_{h=1}^{\infty} \beta_h = +\infty$

$$\text{Thì ta có } \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^h \beta_j a_j}{\sum_{j=1}^h \beta_j} = a.$$

Sự hội tụ của thuật toán được thể hiện qua định lý sau.

**Định lý 3.1** Giả sử song hàm  $f$  đơn điệu, nửa liên tục dưới và lồi theo biến thứ 2 trên  $C$ ,  $Sol(f, C) \neq \emptyset$  và  $\{\lambda_k\} \subset (0, +\infty)$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = +\infty$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |f(x^k, x^{k+1})| < +\infty$ .

Khi đó, nếu thuật toán kết thúc tại bước lặp thứ  $k$  nào đó thì  $x^k$  là một  $\varepsilon$ -nghiệm của bài toán  $EP(f, C)$ . Ngược lại, dãy  $\{z^k\}$  sinh ra bởi Thuật toán 1, hội tụ về một nghiệm  $z^* \in Sol(f, C)$ .

*Chứng minh.* Nếu thuật toán kết thúc tại điểm lặp  $x^k$  với  $\|r(x^k)\| = 0$  thì  $x^k$  là nghiệm của bài toán  $EP(f, C)$  [9]. Do đó, ta có thể nói  $x^k$  là một  $\varepsilon$ -nghiệm của bài toán  $EP(f, C)$  nếu và chỉ nếu  $\|r(x^k)\| < \varepsilon$ . Trong trường hợp ngược lại, chứng minh định lý được chia làm các bước sau.

**Bước 1.** Chứng minh tồn tại  $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x^k - z^*\|_M = c < +\infty$ . Trong đó  $\|x\|_M^2 = \langle Mx, x \rangle$ .

Từ  $x^{n+1} = \arg \min \{ \lambda_k f(x^k, y) + \frac{1}{2} \langle M(y - x^k), y - x^k \rangle : y \in C \}$ , suy ra  $0 \in \partial \left( \lambda_k f(x^k, \cdot) + \frac{1}{2} \langle M(\cdot - x^k), \cdot - x^k \rangle + \delta_C(\cdot) \right) (x^{k+1})$ , trong đó  $\delta_C$  là hàm chỉ trên  $C$ .

Do đó, tồn tại  $\omega \in \partial f(x^k, \cdot)(x^{k+1})$  và  $v \in N_C(x^{k+1})$  sao cho  $0 = \lambda_k \omega + M(x^{k+1} - x^k) + v$ .

Theo định nghĩa của  $N_C$ , thì  $\langle v, x - x^{k+1} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C$ , do đó  $\langle M(x^k - x^{k+1}) - \lambda_k \omega, x - x^{k+1} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C$ .

Mặt khác, vì  $\omega \in \partial f(x^k, \cdot)(x^{k+1})$  nên với mọi  $x \in C$ , ta có  $\lambda_k [f(x^k, x) - f(x^k, x^{k+1})] \geq \lambda_k \langle \omega, x - x^{k+1} \rangle \geq \langle M(x^k - x^{k+1}), x - x^{k+1} \rangle \quad \forall x \in C. \quad (1)$

Do đó ,  $\langle M(x^{k+1} - x^k), x^k - x \rangle \leq \lambda_k [f(x^k, x) - f(x^k, x^{k+1})] - \|x^{k+1} - x^k\|_M \forall x \in C$ ,  
 trong đó  $\|x^{k+1} - x^k\|_M^2 := \langle M(x^{k+1} - x^k), x^{k+1} - x^k \rangle$ . Vì vậy

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x\|_M^2 &= \|x^k - x\|_M^2 + \|x^{k+1} - x^k\|_M^2 + 2\langle M(x^{k+1} - x^k), x^k - x \rangle \\ &\leq \|x^k - x\|_M^2 - \|x^{k+1} - x^k\|_M^2 + 2\lambda_k [f(x^k, x) - f(x^k, x^{k+1})] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\leq \|x^k - x\|_M^2 + 2\lambda_k [f(x^k, x) - f(x^k, x^{k+1})]. \quad (3)$$

Sử dụng giả thiết  $f(z^*, x) \geq 0$  với mọi  $x \in C$  và tính đơn điệu của  $f$ , ta có  $f(x^k, z^*) \leq 0$ . Áp dụng (3) với  $x = z^*$ , ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z^*\|_M^2 &\leq \|x^k - z^*\|_M^2 + 2\lambda_k [f(x^k, z^*) - f(x^k, x^{k+1})] \\ &\leq \|x^k - z^*\|_M^2 - 2\lambda_k f(x^k, x^{k+1}) \\ &\leq \|x^k - z^*\|_M^2 + 2\lambda_k |f(x^k, x^{k+1})|. \end{aligned}$$

Từ bổ đề 3.1 và giả thiết  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |f(x^k, x^{k+1})| < \infty$  với  $a_k = \|x^k - z^*\|_M^2, b_k = 0, c_k = 2\lambda_k |f(x^k, x^{k+1})|$ , suy ra tồn tại  $\lim_{x \rightarrow \infty} \|x^k - z^*\|_M^2 = c < +\infty$ . Bước 1 được chứng minh xong.

*Nhận xét.* Theo Bước 1, ta có  $c = \lim_{x \rightarrow \infty} \|x^k - z^*\|_M^2$ . Lại có  $M$  là ma trận xác định dương nên tồn tại  $\tau > 0$  sao cho  $\|x^k - z^*\|_M^2 = \langle M(x^k - z^*), x^k - z^* \rangle \geq \tau \|x^k - z^*\|$ ,

Và do đó dãy  $\{x^k\}$  bị chặn. Từ đó  $\{z^k\}$  cũng bị chặn, suy ra tồn tại dãy con  $\{z^{k_j}\}$  hội tụ về  $\hat{z}$ .

**Bước 2.** Chứng minh  $\hat{z} \in \text{Sol}(f, C)$ .

Theo (3) ta có  $\|x^{k+1} - x\|_M^2 - \|x^k - x\|_M^2 \leq 2\lambda_k [f(x^k, x) - f(x^k, x^{k+1})] \forall x \in C$ .

Dựa vào tính đơn điệu của  $f$ , tức là  $f(x^k, x) + f(x, x^k) \leq 0$  với mọi  $x \in C$ , ta thu được  $\|x^k - x\|_M^2 - \|x^{k+1} - x\|_M^2 \geq 2\lambda_k [f(x, x^k) + f(x^k, x^{k+1})] \forall x \in C$ .

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức trên suy ra

$$\|x^1 - x\|_M^2 - \|x^{k_j+1} - x\|_M^2 \geq 2 \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i f(x^i, x^{i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i f(x, x^i) \forall x \in C.$$

$$\text{Vì vậy, } \frac{\|x^1 - x\|_M^2 - \|x^{k_j+1} - x\|_M^2}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_j} \geq \frac{2 \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_j f(x^i, x^{i+1})}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_j} + \frac{2 \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i f(x, x^i)}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_j} \quad \forall x \in C. \quad (4)$$

Từ giả thiết song hàm  $f$  lồi theo biến thứ 2 và theo định nghĩa của  $z^k$  ta có

$$f(x, z^{k_j}) = f\left(x, \frac{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i x^i}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i f(x, x^i)}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i} \quad \forall x \in C \quad (5)$$

Đặt  $K := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |f(x^k, x^{k+1})| < \infty$ , thay vào (4) và (5), ta được

$$\frac{\|x^1 - x\|_M^2 - \|x^{k_j+1} - x\|_M^2}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_j} \geq \frac{-2K}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_j} + 2f(x, z^{k_j}) \quad \forall x \in C.$$

Cho  $j \rightarrow \infty$ , và sử dụng  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z^*\|_M^2 = c$ ,  $f$  nửa liên tục dưới theo biến thứ 2 và  $\lim_{j \rightarrow \infty} z^{k_j} = \hat{z}$ , ta có  $f(x, \hat{z}) \leq 0 \quad \forall x \in C$ . Do đó  $\hat{z}$  là một nghiệm của bài toán cân bằng đôi ngẫu  $DEP(f, C)$ . Theo giả thiết  $f$  đơn điệu nên ta cũng có  $\hat{z} \in Sol(f, C)$ . Như vậy Bước 2 được chứng minh xong.

**Bước 3.** Chứng minh dãy  $\{z^k\}$  hội tụ về  $\hat{z} \in Sol(f, C)$ .

Theo giả thiết tập  $Sol(f, C)$  khác rỗng và song hàm  $f$  đơn điệu trên  $C$  nên tập  $Sol(f, C)$  lồi và tồn tại duy nhất điểm  $u^k$  sao cho  $u^k = \arg \min \{\|y - x^k\|_M^2 : y \in Sol(f, C)\}$ .

Ký hiệu  $u^k := P_{Sol(f, C)}^M(x^k)$ , sử dụng  $f(u^k, x) \geq 0 \quad \forall x \in C$  và bất đẳng thức (3) ta thu được  $\|x^{k+1} - u^k\|_M^2 \leq \|x^k - u^k\|_M^2 + 2\lambda_k [f(x^k, u^k) - f(x^k, x^{k+1})]$

$$\begin{aligned} &\leq \|x^k - u^k\|_M^2 - 2\lambda_k f(x^k, x^{k+1}) \\ &\leq \|x^k - u^k\|_M^2 + 2\lambda_k |f(x^k, x^{k+1})|. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta có  $\|x^{k+m} - u^k\|_M^2 \leq \|x^k - u^k\|_M^2 + 2 \sum_{j=k}^{k+m-1} \lambda_j |f(x^j, x^{j+1})|$ . (6)

Theo định nghĩa  $u^{k+m} = P_{Sol(f, C)}^M(x^{k+m})$ , nên

$$\|x^{k+m} - u^{k+m}\|_M \leq \left\| x^{k+m} - \frac{1}{2}(u^{k+m} + u^k) \right\|_M.$$

Kết hợp với (6), ta có

$$\begin{aligned}
\|u^{k+m} - u^k\|_M^2 &= \|u^{k+m} - x^{k+m} + x^{k+m} - u^k\|_M^2 \\
&= 2\|x^{k+m} - u^k\|_M^2 + 2\|u^{k+m} - x^{k+m}\|_M^2 \\
&\quad - 4\left\|x^{k+m} - \frac{1}{2}(u^{k+m} + u^k)\right\|_M^2 \\
&\leq 2\|x^{k+m} - u^k\|_M^2 - 2\|u^{k+m} - x^{k+m}\|_M^2 \\
&\leq 2\|x^k - u^k\|_M^2 - 2\|u^{k+m} - x^{k+m}\|_M^2 \\
&\quad + 4\sum_{j=k}^{k+m-1} \lambda_j |f(x^j, x^{j+1})|. \quad (7)
\end{aligned}$$

Do đó  $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|u^{k+m} - x^{k+m}\|_M^2 \leq \|x^k - u^k\|_M^2 + 2\sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j |f(x^j, x^{j+1})|$ .

Từ giả thiết  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |f(x^j, x^{j+1})| < \infty$  suy ra  $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|u^{k+m} - x^{k+m}\|_M^2 < \infty$ . Vì vậy, tồn tại

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - u^k\|_M^2 < \infty$ . Kết hợp điều này với (7) ta có  $\{u^k\}$  là dãy. Do đó tồn tại giới hạn

$\lim_{k \rightarrow \infty} u^k = \bar{z}$ . Mặt khác, từ định nghĩa của  $u^k = P_{Sol(f, C)}^M(u^k)$  và chứng minh trên, ta có

$\hat{z} \in Sol(f, C)$ , với mỗi  $y \in Sol(f, C)$  và với mọi  $\lambda \in (0, 1)$ , ta có  $x_\lambda := \lambda y + (1 - \lambda)x^k \in Sol(f, C)$  và

$$\begin{aligned}
\|x^k - u^k\|_M^2 &\leq \|x^k - x_\lambda\|_M^2 \\
&= \|\lambda y + (1 - \lambda)u^k - x^k\|_M^2 \\
&= \|\lambda(y - u^k) + (u^k - x^k)\|_M^2 \\
&= \lambda^2 \|y - u^k\|_M^2 + 2\lambda \langle M(y - u^k), u^k - x^k \rangle + \|u^k - x^k\|_M^2.
\end{aligned}$$

Vì vậy,  $\lambda \|y - u^k\|_M^2 + 2\langle M(y - u^k), u^k - x^k \rangle \geq 0 \forall \lambda \in (0, 1)$ . Cho  $\lambda \rightarrow 0^+$  ta được

$$\langle M(y - u^k), u^k - x^k \rangle \geq 0 \forall y \in Sol(f, C).$$

Thay  $y$  bởi  $\hat{z} \in Sol(f, C)$  thì  $\langle M(\hat{z} - u^k), x^k - u^k \rangle \leq 0 \forall k$ .

Do đó,

$$\begin{aligned}
\langle M(\hat{z} - \bar{z}), x^k - u^k \rangle &= \langle M(\hat{z} - u^k), x^k - u^k \rangle + \langle M(u^k - \bar{z}), x^k - u^k \rangle \\
&\leq \langle M(u^k - \bar{z}), x^k - u^k \rangle \leq \|u^k - \bar{z}\| \cdot \|M(x^k - u^k)\| \leq L \|u^k - \bar{z}\| \forall k,
\end{aligned}$$

trong đó  $L := \sup\{\|M(x^k - u^k)\| : k = 1, 2, \dots\} < \infty$ . Nhận hai vế bất đẳng thức trên với  $\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i$

ta được  $\left\langle M(\hat{z} - \bar{z}), \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i x^i - \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i u^i \right\rangle \leq L \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i \|u^i - \bar{z}\|$ .

$$\text{Vi } \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i > 0, \text{ nên suy ra } \left\langle M(\hat{z} - \bar{z}), z^{k_j} - \frac{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i u^i}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i} \right\rangle \leq L \frac{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i \|u^i - \bar{z}\|}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i}. \quad (8)$$

Áp dụng Bổ đề 3.2 với  $a_h := u_p^h$  ( $p=1,2,\dots,p$ ) và  $\beta_h := \lambda_h$ , ta được  $\frac{\sum_{h=1}^{k_j} \lambda_h u_p^h}{\sum_{h=1}^{k_j} \lambda_h} \rightarrow \bar{z}_p$

khi  $j \rightarrow \infty, \forall p=1,2,\dots,n$  (9)

Trong đó  $u^h = (u_1^h, \dots, u_n^h)$  và  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ .

$$\text{Tương tự ta cũng có } \frac{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i \|u^i - \bar{z}\|}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i} \rightarrow \infty \text{ khi } j \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Kết hợp (8), (9) và (10) dẫn tới kết luận  $\langle M(\hat{z} - \bar{z}), \hat{z} - \bar{z} \rangle \leq 0$ , hay  $\hat{z} = \bar{z}$ . Do đó dãy  $\{u^k\}$  hội tụ về  $\hat{z} \in \text{Sol}(f, C)$ . Suy ra với mọi  $\{z^{k_j}\} \subseteq \{z^k\}$  sao cho  $\lim_{j \rightarrow \infty} z^{k_j} = \bar{z}$  thì  $\bar{z} \equiv \hat{z}$ , trong đó  $\hat{z} = P_{\text{Sol}(f, C)}^M(x^k)$ . Giả sử  $\{z^k\}$  không hội tụ về  $\hat{z}$ . Khi đó,  $\exists \varepsilon > 0, \forall k_0, \exists k_1 > k_0$  sao cho  $\|z^{k_1} - \hat{z}\| \geq \varepsilon$ .

Do đó tồn tại dãy con  $\{z^{k_j}\}$  thỏa mãn  $\|z^{k_j} - \hat{z}\| \geq \varepsilon \forall j \geq 1$ . Vì  $\{z^{k_j}\}$  bị chặn nên chứa dãy con  $\{z^{k_{j_m}}\}$  hội tụ về  $\hat{z}$ . Điều này mâu thuẫn. Như vậy  $\{z^k\}$  phải hội tụ về  $\hat{z} \in \text{Sol}(f, C)$ .

Định lý hoàn toàn được chứng minh.

#### 4. KẾT LUẬN

Trong bài báo tác giả đã đề xuất một cách tiếp cận mới để giải bài toán cân bằng. Tại mỗi bước lặp  $k$ , hàm toàn phương dạng chuẩn tắc  $\|x - x^k\|^2$  được tổng quát bằng một hàm toàn phương dạng  $\langle G(x - x^k), x - x^k \rangle$ , trong đó  $G$  là một ma trận đối xứng xác định dương cấp  $n$  trong không gian  $R^n$ . Tác giả đã chứng minh được sự hội tụ của thuật toán về nghiệm của bài toán cân bằng  $EP(f, C)$  chỉ với giả thiết đơn điệu và không cần đến tính liên tục Lipschitz của song hàm  $f$ .

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. P.N. Anh, J.K. Kim, L.D. Muu (2012), *An extragradient method for solving bilevel variational inequalities*. J. Glob. Optim. 52, 627-639
2. G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo, M. Passacantando (2013), *Existence and Solution Methods for Equilibria*, European J. Operational Research 227: 1-11
3. H. Nikaido, K. Isoda (1955), *Note on Noncooperative Convex Games*, Pacific Journal of Mathematics 5: 807-815
4. M.A., Noor (2004), *Auxiliary principle technique for equilibrium problems*. J. Optim. Theory Appl. 122, 371-386
5. L.D. Muu, N.V. Quy, V.H. Nguyen (2007), *On Nash-Cournot Oligopolistic Market Equilibrium Models with Concave Cost Functions*, J. Glob. Optim. 41: 351-364
6. L.D. Muu, T.D. Quoc (2009), *Regularization Algorithms for Solving Monotone Ky Fan Inequalities with Application to a Nash-Cournot Equilibrium Model*, J. Optim. Theory Appl. 142: 185-204
7. I.V. Konnov: *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer (2001)
8. I.V. Konnov, D.A. Dyabilkin (2011), *Nonmonotone Equilibrium Problems: Coercivity Conditions and Weak Regularization*, J. Glob. Optim. 49: 575-587
9. A. N. Iusem, W. Sosa (2010), *On the Proximal Point Method for Equilibrium Problems in Hilbert Spaces*, Optimization 59: 1259-1274
10. E. Ronald, R.E. Bruck (1977), *On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space*. J. Math. Anal. Appl. 61, 159-164
11. E. Ronald, R.E. Bruck, : *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*. Isr. J. Math. 32, 107-116 (1979)
12. A. Moudafi (1999), *Proximal point algorithm extended to equilibrium problem*. J. Nat. Geom. 15, 91-100
13. T.D. Quoc, L.D. Muu, V.H. Nguyen (2008), *Extragradient algorithms extended to equilibrium problems*. Optimization 57, 749-776
14. P. Santos, S. Scheimberg (2011), *An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems*. Comput. Appl. Math. 30, 91-107
15. E. Blum and W. Oettli (1994), *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Stud. 63, pp. 123-145