XÁC ĐỊNH CÁC HẰNG SỐ ĐÀN HỒI TỪ CHUỖI THỰC NGHIỆM

Vũ Tiến Đức
Khoa Toán và Khoa học tự nhiên
Email: ducvt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 09/3/2023
Ngày PB đánh giá: 24/3/2023
Ngày duyệt đăng: 05/5/2023

TÓM TẮT: Trong bài báo này, phương pháp bình phương tối thiểu được sử dụng để xác định các hằng số đàn hồi của đàn hồi trực tiếp. Những khó khăn trong công việc bố trí thực thi kéo - nén đồng thời trên cả ba trục trên một khối mẫu thiết lập phương pháp, xử lý dữ liệu thu thập cũng giống như sự phức tạp trong quá trình tính toán. Để giải quyết vấn đề đó, một chuỗi thí nghiệm kéo -nén một trục trên mẫu có dạng tấm được đề xuất để xác định sáu hằng số đàn hồi của vật liệu trực tiếp. Ba hằng số còn lại được tính toán nhờ công thức biến đổi các hằng số đàn hồi, với dữ liệu thực nghiệm trên mẫu dạng tấm với các trục quay một góc 45 độ so với các trục chính dị hướng.

Từ khóa*:* vật liệu dị hướng, vật liệu trực hướng, hằng số vật liệu, phương pháp bình phương tối thiểu.

DETERMINING THE ELASTIC CONSTANTS FROM A SERIES OF EXPERIMENTS

ABSTRACT: In this paper, the "least squares method" is used to determine the elastic constants of the direct elasticity. Difficulties in laying out the execution of the pull-compression simultaneously on all three axes on a sample block, setting the methods, or handling the collected data are like the complexity in the calculation process. To solve that problem, a series of uniaxial tensile-compression experiments on plate specimens are proposed to determine six elastic constants of the direct materials. The remaining three constants are calculated using the elastic constants transformation formula, with the experimental data on a plate sample and with the axes rotating at an angle of 45 degrees with respect to the anisotropic major axes.

Key words: anisotropic materials, orthotropic material, material constant, least squares method.

1. GIỚI THIỆU

Các vật liệu dị hướng, nghĩa là vật liệu có tính chất cơ học khác nhau theo các hướng khác nhau được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành công nghệ hiện đại. Trực hướng là một trường hợp đặc biệt của dị hướng, tức là các tính chất không giống nhau của một vật liệu dọc theo các hướng vuông góc lẫn nhau. Việc nghiên cứu tính ổn định của các cấu trúc dị hướng nói chung và cấu trúc trực hướng nói riêng đòi hỏi phải xác định hằng số đàn hồi của vật liệu. Tuy nhiên, rất khó để xác định các hằng số này cả về mặt toán học hay do sự phức tạp của các thí nghiệm. Bằng chứng cho điều này là dữ liệu kéo-nén hai trục hoặc ba trục cũng như các dữ liệu từ thực nghiệm cắt gần như không được tìm thấy.

Vì vậy, bài viết này đề xuất loạt thí nghiệm kéo-nén một trục nhằm đơn giản hóa quá trình thí nghiệm cũng như quá trình tính toán.

2. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

Các nghiên cứu đầy đủ nhất về cấu trúc của vật liệu dị hướng được đưa ra bởi Smith E.W., Pascoe K.J năm 1977 đối với vật liệu thủy tinh hữu cơ và Jones, R.M năm 1980 với Cacbon tổng hợp, ngoài ra có thêm một số ít công bố chưa đầy đủ của E.V. Amelina, S.K. Golushko, V.S. Erasov và các cộng sự. Các nghiên cứu của họ nhìn chung không cho phép xác định tất cả các hằng số đàn hồi của các mô hình phức tạp hơn định luật Húc. Mặc dù vậy, đó vẫn là cơ sở để các nhà nghiên cứu vật liệu sử dụng đến nay.

3. XÁC ĐỊNH CÁC HẰNG SỐ ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

Đối với vật liệu trực hướng, trong biểu thức của định luật Hooke [1,3] có 9 hằng số cần được xác định:

$$\varepsilon_x = A_{11}\sigma_x + A_{12}\sigma_y + A_{13}\sigma_z,$$
$$\varepsilon_y = A_{12}\sigma_x + A_{22}\sigma_y + A_{23}\sigma_z, \quad (1)$$
$$\varepsilon_z = A_{13}\sigma_x + A_{23}\sigma_y + A_{33}\sigma_z,$$
$$\gamma_{yz} = A_{44}\sigma_{yz},\ \gamma_{xz} = A_{55}\sigma_{xz},\ \gamma_{xy} = A_{66}\sigma_{xy}.$$

Để xác định các hằng số A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{13}, A_{23} chỉ cần tiến hành một thí nghiệm kéo - nén đồng thời trên cả ba trục trên một khối mẫu lập phương. Sau khi nhận được các dữ liệu thực nghiệm σ^i và ε^i, trong đo $i=\overline{0,n}$; $n-$ số lần đo, các hằng số đàn hồi có thể xác định bằng phương pháp bình phương tối thiểu. Theo phương pháp này, tổng bình phương độ lệch sẽ đạt giá trị nhỏ nhất [2]:

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-\phi(x_i)]^2 \to \min, (2)$$ trong đó $f(x)$ - xấp xỉ hàm; $\{x_i,\phi(x_i)\}$ - kết quả thực nghiệm.

Cùng với các dữ liệu thực nghiệm thu được, việc xác định ba hàm biến dạng đầu tiên của hệ (1) trở thành bài toán tìm các A_{ij} sao cho:

$$\begin{cases} f_1(A_{11}, A_{12}, A_{13}) = \sum_{i=1}^{n}(A_{11}\sigma_x^i + A_{12}\sigma_y^i + A_{11}\sigma_z^i - \varepsilon_x^i)^2 \to \min \\ f_2(A_{12}, A_{22}, A_{23}) = \sum_{i=1}^{n}(A_{12}\sigma_x^i + A_{22}\sigma_y^i + A_{23}\sigma_z^i - \varepsilon_y^i)^2 \to \min \quad (3) \\ f_3(A_{13}, A_{23}, A_{33}) = \sum_{i=1}^{n}(A_{13}\sigma_x^i + A_{23}\sigma_y^i + A_{33}\sigma_z^i - \varepsilon_z^i)^2 \to \min \end{cases}$$

Các biểu thức này sẽ được thực hiện khi và chỉ khi các tham số thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\frac{\partial f_1}{\partial A_{11}} = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial A_{12}} = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial A_{13}} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial A_{12}} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial A_{22}} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial A_{23}} = 0,\ (4)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial A_{13}} = 0,\ \frac{\partial f_3}{\partial A_{23}} = 0,\ \frac{\partial f_3}{\partial A_{33}} = 0.$$

Do tính bằng nhau của các $A_{ij}, \forall i \neq j$, nên việc tính toán các tham biến theo cả chín phương trình 9 ẩn này sẽ dẫn đến mâu thuẫn (do các sai số trong quá trình tính toán gần đúng). Vì vậy ta sẽ cộng cả 2 vế của các phương trình cùng chứa $A_{ij}, i \neq j$. Theo đó ta thu được hệ gồm sáu phương trình:

$$\frac{\partial f_1}{\partial A_{11}} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial A_{22}} = 0,\ \frac{\partial f_3}{\partial A_{33}} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial A_{12}} + \frac{\partial f_2}{\partial A_{12}} = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial A_{13}} + \frac{\partial f_3}{\partial A_{13}} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial A_{23}} + \frac{\partial f_3}{\partial A_{33}} = 0.$$

Lấy vi phân các hàm $f_k(k = 1, 2, 3)$ từ hệ (3) theo từng tham biến A_{ij} t được:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{11}\sigma_x^{i\,2} + A_{12}\sigma_x^i\sigma_y^i + A_{13}\sigma_x^i\sigma_z^i - \sigma_x^i\varepsilon_x^i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{22}\sigma_y^{i\,2} + A_{12}\sigma_x^i\sigma_y^i + A_{23}\sigma_y^i\sigma_z^i - \sigma_y^i\varepsilon_y^i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{33}\sigma_z^{i\,2} + A_{13}\sigma_x^i\sigma_z^i + A_{23}\sigma_y^i\sigma_z^i - \sigma_z^i\varepsilon_z^i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{12}\sigma_y^{i\,2}+A_{11}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{13}\sigma_y^i\sigma_z^i-\sigma_y^i\varepsilon_x^i)+\sum_{i=1}^{n}(A_{12}\sigma_x^{i\,2}+A_{22}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{23}\sigma_x^i\sigma_z^i-\sigma_x^i\varepsilon_y^i)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{13}\sigma_z^{i\,2}+A_{11}\sigma_x^i\sigma_z^i+A_{12}\sigma_y^i\sigma_z^i-\sigma_z^i\varepsilon_x^i)+\sum_{i=1}^{n}(A_{13}\sigma_x^{i\,2}+A_{23}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{33}\sigma_x^i\sigma_z^i-\sigma_x^i\varepsilon_z^i)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{23}\sigma_z^{i\,2}+A_{12}\sigma_x^i\sigma_z^i+A_{22}\sigma_y^i\sigma_z^i-\sigma_z^i\varepsilon_y^i)+\sum_{i=1}^{n}(A_{23}\sigma_y^{i\,2}+A_{13}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{33}\sigma_y^i\sigma_z^i-\sigma_y^i\varepsilon_z^i)=0.$$

Viết lại hệ phương trình này ở dạng đại số, và đánh số hệ này là (5):

$$A_{11}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^{i\,2}+A_{12}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{13}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_z^i=\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\varepsilon_x^i,$$

$$A_{12}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{22}\sum_{i=1}^{n}\sigma_y^{i\,2}+A_{23}\sum_{i=1}^{n}\sigma_y^i\sigma_z^i=\sum_{i=1}^{n}\sigma_y^i\varepsilon_y^i,$$

$$A_{13}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_z^i+A_{23}\sum_{i=1}^{n}\sigma_y^i\sigma_z^i+A_{33}\sum_{i=1}^{n}\sigma_z^{i\,2}=\sum_{i=1}^{n}\sigma_z^i\varepsilon_z^i,$$

$$A_{11}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{12}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_y^{i\,2}+\sigma_x^{i\,2})+A_{13}\sum_{i=1}^{n}\sigma_y^i\sigma_z^i+A_{22}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{23}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_z^i=\sum_{i=1}^{n}(\sigma_y^i\varepsilon_x^i+\sigma_x^i\varepsilon_y^i)$$

$$A_{11}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_z^i+A_{12}\sum_{i=1}^{n}\sigma_y^i\sigma_z^i+A_{13}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_z^{i\,2}+\sigma_x^{i\,2})+A_{23}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{33}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_z^i=\sum_{i=1}^{n}(\sigma_z^i\varepsilon_x^i+\sigma_x^i\varepsilon_z^i),$$

$$xA_{12}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_z^i+A_{13}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^i\sigma_y^i+A_{22}\sum_{i=1}^{n}\sigma_y^i\sigma_z^i+A_{23}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_z^{i\,2}+\sigma_y^{i\,2})+A_{33}\sum_{i=1}^{n}\sigma_y^i\sigma_z^i=\sum_{i=1}^{n}(\sigma_z^i\varepsilon_y^i+\sigma_y^i\varepsilon_z^i).$$

Đây là hệ phương trình đại số tuyến tính không thuần nhất sáu phương trình sáu ẩn A_{ij}, việc giải hệ này sẽ cho ta bộ nghiệm duy nhất chứa sáu tham số của vật liệu A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{13}, A_{23}.

Việc xác định các hằng số A_{44}, A_{55}, A_{66} dựa trên dữ liệu thực nghiệm trên mặt phẳng yz, xz, xy. Từ phương trình thứ tư của hệ thức (1) cùng với dữ liệu thực nghiệm cắt trên mặt phẳng yz, biểu thức (2) được viết dưới dạng:

$$g_1(A_{44})=\sum_{i=1}^{n}(A_{44}\sigma_{yz}^i-\gamma_{yz}^i)^2\to\min$$

Từ điều kiện bằng không của đạo hàm, ta thu được:

$$2A_{44}\sigma_{yz}^{i\;2}-2A_{44}\sigma_{yz}^i\gamma_{yz}^i=0.$$

Từ đây biểu thức của A_{44} được xác định:

$$A_{44}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{yz}^i\gamma_{yz}^i}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{yz}^{i\;2}}.\qquad(6)$$

Biểu thức tổng bình phương tối thiểu từ dữ liệu thực nghiệm cắt trên mặt phẳng xz có dạng:

$$g_2(A_{55}) = \sum_{i=1}^{n}(A_{55}\sigma_{xz}^{i} - \gamma_{xz}^{i})^2 \to \min$$

Lấy đạo hàm theo A_{55} của hàm g_2 và đánh giá bằng không ta thu được:

$$2A_{55}\sigma_{xz}^{i\ 2} - 2A_{55}\sigma_{xz}^{i}\gamma_{xz}^{i} = 0$$

Do đó:

$$A_{55} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{xz}^{i}\gamma_{yz}^{i}}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{xz}^{i\ 2}}. \qquad (7)$$

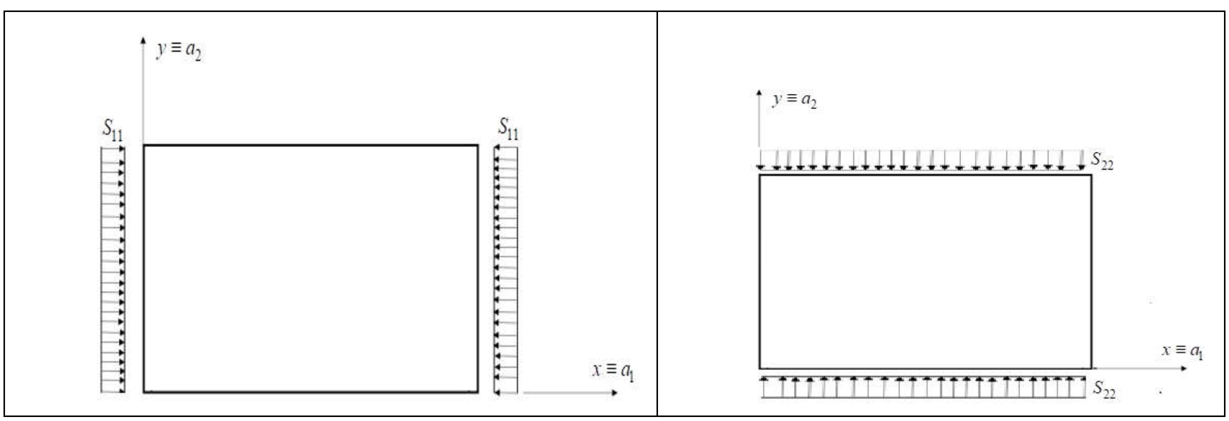
Tương tự, A_{66} được xác định từ thực nghiệm trên mặt phẳng xy:

$$A_{66} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{xy}^{i}\gamma_{xy}^{i}}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{xy}^{i\ 2}}. \qquad (8)$$

Sáu nghiệm của hệ phương trình (5) cùng với các biểu thức (6) - (8) đã xác định đầy đủ chín hằng số của một vật liệu trực hướng bất kì.

4. Thực nghiệm kéo - nén một trục để xác định các hằng số đàn hồi

Ưu điểm của việc tiến hành thí nghiệm trên mẫu khối lập phương là số lượng thí nghiệm ít và độ chính xác cao. Nhược điểm của thí nghiệm này là phải bố trí tải trên cả ba mặt của mẫu thử, phải đo ba lần biến dạng của mẫu lập phương, biểu thức tính số liệu thí nghiệm rườm rà… Ngoài ra, không có nhiều thiết bị đủ tiêu chuẩn có thể thực hiện các thí nghiệm kéo và nén hai trục và ba trục, cũng như các thí nghiệm cắt. Do đó, chúng ta đề xuất thay thế chúng bằng một loạt thí nghiệm kéo-nén một trục trên mỗi mặt phẳng riêng lẻ.



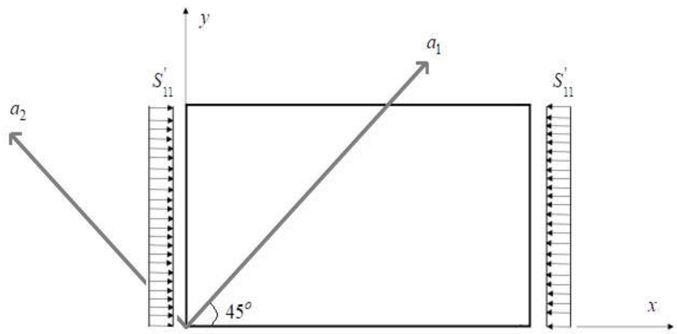
a) b)

Hình 1. Các cạnh của tấm được định hướng dọc theo các trục chính dị hướng:

a) căng-nén dọc trục $x \equiv a_1$;

b) căng-nén dọc trục $y \equiv a_2$;

Trong mặt phẳng xy cần làm thí nghiệm với hai tấm. Các cạnh của tấm đầu tiên được định hướng dọc theo các trục bất đẳng hướng chính a_1 và a_2 (Hình.1). Các cạnh của tấm thứ hai lệch một góc 45 độ so với các trục chính (Hình 2).



Hình 2. Các cạnh của tấm lệch 45 độ so với các trục chính dị hướng.

Tiến hành thí nghiệm căng-nén dọc trục a_1 và a_2 tương ứng với tấm thứ nhất.

Từ thí nghiệm đầu tiên (Hình 1a) ta có:

$\varepsilon_x = A_{11}\sigma_x$; $\varepsilon_y = A_{12}\sigma_x$. từ thí nghiệm thứ hai (Hình 1b) ta có:

$$\varepsilon_x = A_{12}\sigma_y; \qquad \varepsilon_y = A_{22}\sigma_y.$$

Theo cách bố trí thực nghiệm được đề xuất ở đây, biểu thức của phương pháp bình phương tối thiểu trở nên đơn giản:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(A_{11}\sigma_x^i - \varepsilon_x^i)^2 \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(A_{22}\sigma_y^i - \varepsilon_y^i)^2 \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(A_{12}\sigma_x^i - \varepsilon_y^i)^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}(A_{12}\sigma_y^i - \varepsilon_x^i)^2 \to \min \end{cases}$$

Từ đó, hệ phương trình tuyến tính tương ứng đối với các tham biến A_{11}, A_{22}, A_{12} cũng được đơn giản hóa đáng kể:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(2A_{11}\sigma_x^{i\,2} - 2\sigma_x^i\varepsilon_x^i) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(2A_{22}\sigma_y^{i\,2} - 2\sigma_y^i\varepsilon_y^i) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}(2A_{12}\sigma_x^{i\,2} + 2A_{12}\sigma_y^{i\,2} - 2\sigma_x^i\varepsilon_y^i - 2\sigma_y^i\varepsilon_x^i) = 0 \end{cases}$$

Theo đó các tham biến được xác định:

$$A_{11} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_x^i\varepsilon_x^i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_x^{i\,2}}, \quad A_{22} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_y^i\varepsilon_y^i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_y^{i\,2}},$$

$$A_{12} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\sigma_x^i\varepsilon_y^i + \sigma_y^i\varepsilon_x^i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\sigma_x^{i\,2} + \sigma_y^{i\,2})}$$

.

Đối với tấm thứ hai, chúng ta chỉ cần xác định hằng số đầu tiên, tức là A_{11}^{45}. Quá trình thực hiện cũng tương tự (Hình 2).

Để xác định hằng số A_{66}, ta sử dụng công thức biến đổi các hằng số đàn hồi:

$$A_{11}^{(\theta)} = A_{11}\cos^4\theta + (2A_{12} + A_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$+A_{22}\sin^4\theta$$

Góc θ được chọn là 45 độ. Thay nó vào công thức trên, ta được biểu thức xác định A_{66}:

$$A_{66} = 4A_{11}^{(45)} - A_{11} - A_{22} - 2A_{12}. \quad (9)$$

Như vậy tất cả các hằng số trong mặt phẳng xy đã được xác định. Việc xác định các hằng số còn lại hoàn toàn tương tự.

5. KẾT LUẬN

Như vậy, qua bài viết ta thấy có thể sử dụng thí nghiệm kéo-nén một trục để thực hiện các quá trình của thí nghiệm cũng như tính toán các hằng số đàn hồi của vật liệu, cụ thể là sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu. Ưu điểm của phương pháp này là nó đơn giản hóa quá trình thử nghiệm và có thể được sử dụng trong thực tế tính toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lekhnitskii, Sergei Georgievich, et al (1964), *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Physics Today, p.84.

2. Amelina E.V., Golushko S.K., Erasov V.S., Idimeshev S.V., Nemirovskiy Yu.V., Semisalov B.V., Yurchenko A.V., Yakovlev N.O. (2015), *Nonlinear deformation of carbon fiber reinforced plastics: experiment, model, and simulation*, Computational Technologies, №5. p. 27-52.

3. Lekhnitsky S.G. (1977), *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, M. Nauka, p.415.