TẬP HÚT PHỤ THUỘC THỜI GIAN CHO PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN KHÔNG CỔ ĐIỂN VỚI HỆ SỐ PHỤ THUỘC THỜI GIAN

Cao Thị Thu Trang
Khoa Toán và KHTN
Email: trangctt@dhhp.edu.vn
Đỗ Thị Hoài
Khoa Toán và KHTN
Nguyễn Thị Thanh Thanh
Trường THCS Xuân Đỉnh, Bắc Từ Liêm, Hà Nội

Ngày nhận bài: 20/3/2023
Ngày PB đánh giá: 28/3/2023
Ngày duyệt đăng: 05/5/2023

TÓM TẮT: Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình khuếch tán không cổ điển với hệ số phụ thuộc thời gian thông qua lý thuyết tập hút. Cụ thể, sử dụng lý thuyết được đưa ra bởi F. Di Linio, G. S. Duane và R. Temam năm 2011, chúng tôi chứng minh sự tồn tại của tập hút phụ thuộc thời gian cho bài toán biên ban đầu đối với phương trình khuếch tán không cổ điển. Kết quả chính của bài báo là một mở rộng của Yong-feng Liu (*Applicable Analysis, 2014*).

Từ khóa: Phương trình khuếch tán không cổ điển; hệ số phụ thuộc thời gian; tập hút phụ thuộc thời gian.

TIME-DEPENDENT ATTRACTORS FOR THE NON-CLASSICAL DIFFUSION EQUATIONS WITH TIME-DEPENDENT COEFFICIENT

ABSTRACT: In this article, we study the asymptotic behavior of the non-classical diffusion equations with time-dependent coefficients through the theory of attractors. Namely, using the theory given by F. Di Linio, G. S. Duane, and R. Temam in 2011, we prove the existence of time-dependent attractors for the initial boundary value problem for the non-classical diffusion equations. The article aims to extend and improve some results in Yong-feng Liu (*Applicable Analysis, 2015*).

Keywords: Non-classical diffusion equations; time-dependent coefficient; time-dependent attractor.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Có thể nói, phương trình đạo hàm riêng như chiếc cầu nối giữa Toán học và ứng dụng. Rất nhiều mô hình trong thực tế được mô tả thông qua phương trình vi phân - đạo hàm riêng. Khi có một phương trình đạo hàm riêng nói chung, việc đầu tiên chúng ta sẽ nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán (sự tồn tại, tính duy nhất nghiệm, sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu). Tiếp sau đó, chúng ta nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của mô hình. Bởi vì, thông qua dáng điệu tiệm cận của nghiệm, ta có thể dự đoán được xu thế phát triển của mô hình ở tương lai. Từ đó, ta có thể tác động, điều chỉnh để thu được kết quả mong muốn.

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm (thông qua lí thuyết tập hút) của bài toán biên ban đầu đối với phương trình khuếch tán không cổ điển với hệ số phụ thuộc thời gian có dạng

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon(t)\Delta u_t - \Delta u + f(u) = g, & x \in \Omega, t > \tau, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t > \tau, \\ u(x,\tau) = u_\tau(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ với biên $\partial\Omega$ trơn, $\tau \in \mathbb{R}$.

2. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU VỀ PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN KHÔNG CỔ ĐIỂN

Phương trình khuếch tán không cổ điển là một mở rộng của lớp phương trình phản ứng khuếch tán. Lớp phương trình này được xây dựng bởi E.C. Aifantis (1980) [1], nhằm mô tả các hiện tượng vật lí như dòng chảy không Newton, các hiện tượng trong cơ học chất rắn. Từ khi ra đời đến nay, lớp phương trình này đã và đang được quan tâm nghiên cứu mở rộng trên nhiều khía cạnh khác nhau như: thay đổi, mở rộng các điều kiện áp đặt lên hàm phi tuyến (kiểu Sobolev, kiểu đa thức, kiểu mũ), thay đổi miền xác định của biến không gian (miền bị chặn, miền không bị chặn, miền không hình trụ, miền thay đổi theo thời gian)....

Theo khảo sát, có khá nhiều kết quả nghiên cứu lớp phương trình khuếch tán không cổ điển có dạng như (1) với $\varepsilon(t) = \nu$ là hằng số. Các kết quả đạt được chủ yếu là: chứng minh sự tồn tại, duy nhất nghiệm; sự tồn tại của tập hút toàn cục, tập hút đều, tập hút mũ, tập hút ngẫu nhiên… [2-4, 8-10,12].

Bên cạnh đó, thực tế các mô hình trong Vật lí, hóa học, sinh học nói chung thường chịu sự tác động của các yếu tố ngoại lực, các thay đổi trong tự nhiên hoặc nhân tạo. Với mong muốn nghiên cứu mở rộng lớp phương trình khuếch tán không cổ điển sao cho gần với thực tế hơn, F. Rivero (2013) [7] đã nghiên cứu lớp phương trình dạng (1) với hệ số khuếch tán phụ thuộc vào thời gian (tức là có thể thay đổi theo thời gian). Sau F. Rivero, các tác giả Y-F. Liu và D. Tao (2015) [6], J. Wang và Q.Ma (2021) [11], Hoài, Thanh, Thoa [5] cũng đã nghiên cứu mô hình (1) và cũng đã đạt được một số kết quả về tính đặt đúng cũng như sự tồn tại của tập hút phụ thuộc thời gian. Hai kết quả tiêu biểu nhất hiện nay nghiên cứu về lớp phương trình này là của Y-F. Liu và D. Tao [6] và J. Wang [11]. Các tác giả Y-F. Liu và D. Tao [6] đã nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của bài toán (1) trong trường hợp ngoại lực $g \in L^2(\Omega)$, hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng kiểu Sobolev dạng $|f''(u)| \le C(1+|u|), C \ge 0$. Có thể thấy rằng, số mũ tăng trưởng tối đa của $f(u)$ chỉ bằng 3, chưa phải số mũ tới hạn của tăng trưởng kiểu Sobolev. Tác giả J. Wang [11] cũng đưa ra kết quả về sự tồn tại nghiệm và tồn tại tập hút phụ thuộc thời gian cho bài toán (1) trong trường hợp hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng kiểu đa thức.

Nhìn chung, các kết quả nghiên cứu về phương trình khuếch tán không cổ điển là khá đa dạng. Trong bài báo này, chúng tôi đi cải tiến một số kết quả của Hoài, Thanh, Thoa [5] và Y-F. Liu và D. Tao [6]. Cụ thể, chúng tôi sẽ nghiên cứu bài toán (1) khi hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng kiểu Sobolev với số mũ tới hạn (bằng 5) và ngoại lực g chỉ nằm trong không gian tô-pô yếu $H^{-1}(\Omega)$.

Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của bài toán, chúng tôi đặt điều kiện cho hệ số phụ thuộc thời gian $\varepsilon(t)$, hàm phi tuyến $f(u)$ và ngoại lực g như sau: **(H1)** Giả sử

$$\varepsilon(t): \mathbb{R} \to [0,\infty), \varepsilon(t) \in C^1(\mathbb{R})$$

là các hàm giảm, bị chặn và thỏa mãn

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0. \qquad (2)$$

Đặc biệt, tồn tại $L > 0$ sao cho $\sup_{t\in\mathbb{R}} \{|\varepsilon(t)| + |\varepsilon'(t)|\} \le L$.

(H2) Hàm $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện tăng trưởng và tiêu hao kiểu Sobolev

$$f(u)u \ge -\mu u^2 - C, \qquad (3)$$

$$f_u'(u) \ge -\ell, \qquad (4)$$

$$|f(u)| \le C(1+|u|^\rho), \qquad (5)$$

$$\liminf_{|u|\to\infty} \frac{F(u)}{u^2} \ge 0 \qquad (6)$$

với $0 < \rho \le 5, 0 < 2\mu < \lambda_1, \lambda_1$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet và $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ là nguyên hàm của f.

(H3) Ngoại lực $g \in H^{-1}(\Omega)$.

Ta xét bài toán (1) trên không gian pha $\mathcal{H}_t$ - là không gian phụ thuộc thời gian, với chuẩn

$$\|u\|_{\mathcal{H}_t}^2 = \|u\|^2 + \varepsilon(t)\|u\|_1^2.$$

3. SỰ TỒN TẠI CỦA TẬP HÚT PHỤ THUỘC THỜI GIAN

Trước hết, chúng ta nhắc lại định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (1) cũng như định lí về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán.

Định nghĩa 3.1. (xem [5]) Hàm $u=u(x,t)$ xác định trong $\Omega\times[\tau,T]$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1) trên $[\tau;T]$ nếu $u\in C([\tau,T],\mathcal{H}_t)$ và $u(\tau)=u_\tau\in\mathbb{B}_{\mathcal{H}_\tau}(R_0)\subset\mathcal{H}_\tau$. Hơn nữa

$$(u_t,v)+\varepsilon(t)(\nabla u_t,\nabla v)+(\nabla u,\nabla v)+(f(u),v)$$
$$=\langle g,v\rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

với hầu khắp $t\in[\tau,T]$ và với mọi hàm thử $v\in H_0^1(\Omega)$.

Định lí 3.1. (xem [5]) Giả sử các giả thiết $(H1)-(H3)$ thoả mãn. Với bất kì $\tau\in\mathbb{R},T>\tau$ và $u_\tau\in\mathbb{B}_{\mathcal{H}_\tau}(R_0)\subset\mathcal{H}_\tau$ cho trước, bài toán (1) có duy nhất nghiệm yếu $u\in C(\tau,T;\mathcal{H}_t)$. Theo Định lí 3.1 ta có thể xác định một quá trình liên tục $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$

$$U(t,\tau):\mathcal{H}_\tau\to\mathcal{H}_t,\ t\geq\tau\in\mathbb{R},$$

với $U(t,\tau)u_\tau=u(t)$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày kết quả về dáng điệu tiệm cận nghiệm của bài toán (1) thông qua việc chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục phụ thuộc thời gian. Theo lí thuyết được đề xuất bởi M. Conti, V. Pata và R. Temam trong [4], để chứng minh sự tồn tại tập hút phụ thuộc thời gian ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh họ quá trình $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ có một họ các tập hấp thụ phụ thuộc thời gian trong không gian $\mathcal{H}_t$.

Bước 2: Chứng minh tính compact tiệm cận lùi của quá trình $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$.

3.1. Sự tồn tại tập hấp thụ phụ thuộc thời gian

Định lí 3.2. Giả sử các giả thiết $(H1)-(H3)$ thoả mãn. Với $u_\tau\in\mathbb{B}_{\mathcal{H}_\tau}(R_0)\subset\mathcal{H}_\tau$, tồn tại $R_1>0$ sao cho $\mathfrak{B}=\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}=\{\mathbb{B}_{\mathcal{H}_t}(R_1)\}_{t\in\mathbb{R}}$ là một họ các tập hấp thụ phụ thuộc thời gian trong $\mathcal{H}_t$ đối với quá trình $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ tương ứng với bài toán (1).

Chứng minh. Nhân phương trình đầu tiên của bài toán (1) với $2u$, ta được

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\varepsilon(t)\|u\|_1^2\right)+\left(2-\varepsilon'(t)\right)\|u\|_1^2$$
$$+2(f(u),u)=2\langle g,u\rangle. \tag{3.1}$$

Từ giả thiết (3), áp dụng bất đẳng thức Young và bất đẳng thức Hölder ta được

$$\int_\Omega f(u)udx\geq-\mu\|u\|^2-C|\Omega| \tag{3.2}$$

và

$$\langle g,u\rangle\leq\|g\|_{-1}^2+\frac{1}{4}\|u(t)\|_1^2. \tag{3.3}$$

Thay các đánh giá (3.2) và (3.3) vào (3.1), ta được

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\varepsilon(t)\|u\|_1^2\right)+\left(\frac{3}{2}-\varepsilon'(t)\right)\|u\|_1^2$$
$$-2\mu\|u\|^2\leq2\|g\|_{-1}^2+2C|\Omega|$$
$$. \tag{3.4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Poincaré, ta được $\|u\|_1^2\geq\lambda_1\|u\|^2$, khi đó (3.4) trở thành

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\varepsilon(t)\|u\|_1^2\right)+\left(\frac{1}{2}-\varepsilon'(t)\right)\|u\|_1^2$$
$$+(\lambda_1-2\mu)\|u\|^2\leq2\|g\|_{-1}^2+2C|\Omega|.$$

Từ giả thiết (H1) cho số hạng $\varepsilon(t)$, ta có

$$\left(\frac{1}{2}-\varepsilon'(t)\right)\|u\|_1^2 \geq \frac{1}{2}\|u\|_1^2 \geq \frac{\varepsilon(t)}{2L}\|u\|_1^2$$

Chọn $\delta=\min\left\{\frac{1}{2L},\lambda_1-2\mu\right\}$ với $L,(\lambda_1-2\mu)>0$, khi đó ta được

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\varepsilon(t)\|u\|_1^2\right)+\delta\left(\|u\|^2+\varepsilon(t)\|u\|_1^2\right)$$
$$\leq 2\|g\|_{-1}^2+2C|\Omega|$$

Đặt $E_1(t)=\|u\|^2+\varepsilon(t)\|u\|_1^2$, khi đó,

$$\frac{d}{dt}E_1(t)+\delta E_1(t)\leq 2\|g\|_{-1}^2+2C|\Omega|.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có $E_1(t)\leq e^{-\delta(t-\tau)}E_1(\tau)+\frac{2}{\delta}\left(\|g\|_{-1}^2+C|\Omega|\right)$.

Suy ra $\|u\|^2+\varepsilon(t)\|u\|_1^2\leq R_1$ với $t\geq T=\tau+\frac{2}{\delta}\ln\frac{E_1(\tau)}{R_1}$, trong đó $R_1=\frac{4}{\delta}\left(\|g\|_{-1}^2+C|\Omega|\right)$. Vậy

$B_t=\left\{u\in\mathcal{H}_t:\|u(t)\|^2+\varepsilon(t)\|u(t)\|_1^2\leq R_1\right\}$

là tập hấp thụ phụ thuộc thời gian trong không gian $\mathcal{H}_t$ đối với quá trình $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$.

Chúng ta có thể giả sử rằng tập hấp thụ phụ thuộc thời gian là bất biến dương (tức là $U(t,\tau)B_\tau\subset B_t$ với mọi $t\geq\tau$). Thật vậy, gọi θ_e là thời điểm đầu của B_t sao cho $U(t,\tau)B_\tau\subset B_t,\ \tau\leq t-\theta_e$.

Chúng ta có thể thay thế B_t bằng họ tập hấp thụ bất biến $\bigcup_{\tau\leq t-\theta_e}U(t,\tau)B_\tau\subset B_t$.

3.2. Tính compact tiệm cận và sự tồn tại của tập hút phụ thuộc thời gian

Tiếp theo ta chứng minh quá trình $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ tương ứng với bài toán (1) là compact tiệm cận lùi. Để làm được điều đó, chúng ta sử dụng phương pháp phân rã nghiệm thành hai phần, sau đó, chứng minh một phần nghiệm tiêu hao, một phần nghiệm còn lại bị chặn trong không gian trơn hơn không gian pha ban đầu. Từ đó, áp dụng định lý nhúng compact ta thu được tính compact tiệm cận của quá trình liên kết bài toán. Các chứng minh chi tiết sẽ được thực hiện dưới đây.

Trước hết, do $L^2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$ là trù mật, nên với mọi $g\in H^{-1}(\Omega)$ và bất kì $\eta>0$, tồn tại $g^\eta\in L^2(\Omega)$ sao cho

$$\left\|g-g^\eta\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\leq\eta. \tag{3.5}$$

Cố định $\tau\in\mathbb{R}$, ta tách nghiệm $U(t,\tau)u_\tau=u(t)$ với $u_\tau\in\mathcal{H}_\tau$ thành

$$U(t,\tau)u_\tau=U_0(t,\tau)u_\tau+U_1(t,\tau)u_\tau,$$

với $U_0(t,\tau)u_\tau=v(t)$ và $U_1(t,\tau)u_\tau=w(t)$ là hai nghiệm tương ứng của hai bài toán

$$\begin{cases} v_t-\varepsilon(t)\Delta v_t-\Delta v+f(u)-f(w)+\lambda v \\ =g-g^\eta,\ \lambda>\ell, x\in\Omega, t>\tau, \\ v|_{\partial\Omega}=0,\ t>\tau, \\ v(x,\tau)=u_\tau(x), x\in\Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

và $\begin{cases} w_t - \varepsilon(t)\Delta w_t - \Delta w + f(w) \\ = g^\eta + \lambda v,\ x \in \Omega, t > \tau, \\ w|_{\partial\Omega} = 0,\ t > \tau, \\ w(x,\tau) = 0, x \in \Omega. \end{cases}$ (3.7)

Lập luận tương tự như Định lí 2.1 và Định lí 2.2 trong [5], ta có thể chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (2.6) và (2.7). Hơn nữa, trong bài toán (3.7), do $g^\eta \in L^2(\Omega)$ và điều kiện ban đầu bằng 0 (vì vậy $w(x,\tau) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$) nên chúng ta có thể chứng minh nghiệm w là nghiệm mạnh. Cụ thể, chúng ta có $w \in C([\tau,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ với mọi $T > \tau$, và điều này sẽ được sử dụng trong phần chứng minh của Định lí 3.3 dưới đây.

Tiếp theo, trong bổ đề dưới đây, chúng ta sẽ chứng minh nghiệm của bài toán (2.6) là tiêu hao.

Bổ đề 2.1. Giả sử các điều kiện $(H1)-(H3)$ được thỏa mãn. Khi đó, với bất kì $\eta > 0$, nghiệm của bài toán (3.6) thỏa mãn đánh giá sau: Tồn tại hằng số d_0 phu thuộc vào λ_1, ℓ, sao cho với bất kì $t \geq \tau$, $\|U_0(t,\tau)u_\tau\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leq Ce^{-d_0(t-\tau)} + \eta.$

Chứng minh. Nhân vô hướng phương trình thứ nhất trong (3.6) với v trong $L^2(\Omega)$, ta được

$$\frac{d}{dt}\left(\| v \|^2 + \varepsilon(t) \| v \|_1^2\right) + \left(2 - \varepsilon'(t)\right) \| v \|_1^2$$
$$+2\left(f(u) - f(w), v\right) + 2\lambda \| v \|^2 = 2\left\langle g - g^\eta, v\right\rangle$$
(3.8)

Từ giả thiết (3.4), ta có

$$2\left(f(u) - f(w), v\right) \geq -\ell \| v \|^2. \quad (3.9)$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, ta được

$$2\left\langle g - g^\eta, v\right\rangle \leq 2\left\| g - g^\eta \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \| v \|_1^2.$$
(3.10)

Kết hợp $(3.9), (3.10)$ và (3.8), ta được

$$\frac{d}{dt}\left(\| v \|^2 + \varepsilon(t) \| v \|_1^2\right) + \left(\frac{3}{2} - \varepsilon'(t)\right) \| v \|_1^2 +$$
$$2(\lambda - \ell) \| v \|^2 \leq 2\left\| g - g^\eta \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$
(2.11)

Do $\lambda - \ell > 0$, lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lí 3.2, ta thu được tồn tại hằng số $d_0 > 0$ sao cho

$$\left\| U_0(t,\tau)u_\tau \right\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leq \| v \|_{\mathcal{H}_t}^2 e^{-d_0(t-\tau)}$$
$$+ \frac{1}{C}\left\| g - g^\eta \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Chọn $\eta^2 \leq C\eta$, ta được điều phải chứng minh

$$\left\| U_0(t,\tau)u_\tau \right\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leq Ce^{-d_0(t-\tau)} + \eta.$$

Tiếp theo, ta chứng minh cho nghiệm của bài toán (3.7) bị chặn trong không gian $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Nhắc lại rằng, không gian phụ thuộc thời gian $\mathcal{H}_t^1$ được xác định với chuẩn $\| u \|_{\mathcal{H}_t^1}^2 = \| u \|_1^2 + \varepsilon(t) \| u \|_2^2$.

Bổ đề 2.2. Giả sử các điều kiện $(H1)-(H3)$ được thỏa mãn. Khi đó, với bất kì $\eta > 0$ và $u_\tau \in \mathcal{H}_\tau$, tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho nghiệm của bài toán (3.7) thỏa mãn

$$\left\| U_1(t,\tau)u_\tau \right\|_{\mathcal{H}_t^1}^2 \leq M \text{ với mọi } t \geq T.$$

Chứng minh. Nhân vô hướng phương trình thứ nhất trong (3.7) với $-\Delta w$ trong $L^2(\Omega)$, ta được

$$\frac{d}{dt}\left(\| w\|_1^2 +\varepsilon(t)\| w\|_2^2\right)+\left(2-\varepsilon'(t)\right)\| w\|_2^2 +2\left(f(w),-\Delta w\right)+\lambda\left(w,-\Delta w\right) = 2\left(g^\eta+\lambda u,-\Delta w\right) \tag{3.12}$$

Từ giả thiết (3.4), ta có

$$2\left(f(w),-\Delta w\right)=2\int_\Omega f'(w)|\nabla w|^2\,dx \geq -\ell\| w\|_1^2 \tag{3.13}$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, ta được

$$2\left(g^\eta+\lambda u,-\Delta w\right)\leq 2\left(\left\|g^\eta\right\|^2+\lambda\| u\|^2\right) +\frac{1}{2}\| w\|_2^2\leq C\left(\left\|g^\eta\right\|^2+R_1\right)+\frac{1}{2}\| w\|_2^2\ \forall t\geq T. \tag{3.14}$$

Kết hợp (3.13), (3.14) và (3.12), ta được

$$\frac{d}{dt}\left(\| w\|_1^2+\varepsilon(t)\| w\|_2^2\right)+\left(\frac{3}{2}-\varepsilon'(t)\right)\| w\|_2^2 +\left(\lambda-\ell\right)\| w\|_1^2\leq C\left(\left\|g^\eta\right\|^2+R_1\right) \tag{2.15}$$

Lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lí 3.2, ta thu được tồn tại hằng số $T>0$ đủ lớn sao cho

$$\left\|U_1(t,\tau)u_\tau\right\|_{\mathcal{H}_t}^2\leq M .$$

Từ Bổ đề 3.2, ta xét họ $\mathcal{K}=\left\{K_t\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ với $K_t=\left\{u\in\mathcal{H}_t^1 : \| u\|_{\mathcal{H}_t^1}\leq M\right\}$.

Do $\mathcal{H}_t^1\subset\mathcal{H}_t$ là nhúng compact nên K_t là compact. Mặt khác, $\mathcal{K}$ là tập bị chặn đều. Vì vậy, từ các Bổ đề 3.1 và 3.2 suy ra $\mathcal{K}$ có tính hút lùi, và khi đó ta cũng thu được kết quả sau:

Định lí 3.3. Quá trình $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ của bài toán (1) là compact tiệm cận lùi trong $\mathcal{H}_t$.

Từ Định lí 3.2 về sự tồn tại tập hấp thụ phụ thuộc thời gian và Định lí 3.3 về tính compact tiệm cận lùi, ta thu được kết quả bài toán (1) tồn tại duy nhất một tập hút phụ thuộc thời gian như sau

Định lí 3.4. Giả sử các điều kiện $(H1)-(H3)$ được thỏa mãn. Khi đó, quá trinh $U(t,\tau):\mathcal{H}_\tau\to\mathcal{H}_t$ sinh bởi Bài toán (1) có một tập hút toàn cục bất biến phụ thuộc thời gian $\mathfrak{A}=\left\{A_t\right\}_{t\in\mathbb{R}}$.

4. KẾT LUẬN

Kết quả của bài báo là cải tiến, mở rộng các điều kiện áp đặt lên các thành phần của phương trình khuếch tán không cổ điển với hệ số phụ thuộc thời gian. Từ đó giúp ta nghiên cứu được một lớp phương trình khuếch tán không cổ điển rộng hơn. Sử dụng được đưa ra bởi F. Di Linio, G. S. Duane, and R. Temam in 2011 và cải tiến các kĩ thuật đánh giá, chúng tôi đã chứng minh được bài toán tồn tại tập hút phụ thuộc thời gian, một tập compact hút lùi các quỹ đạo bị chặn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. E.C. Aifantis (1980), "On the problem of diffusion in solids", *Acta Mech*, 37, 265-296.

2. C.T. Anh and T.Q. Bao (2010), "Pullback attractors for a class of nonautonomous nonclassical diffusion equations", *Nonlinear Anal*, 73, 399-412.
3. C.T. Anh and T.Q. Bao (2012), "Dynamics of non-autonomous nonclassical diffusion equations on RN", *Comm. Pure Appl. Anal*, 11, 1231-1252.
4. F.Di Plinio, G.S. Duane, R. Temam (2011), "Time-Dependent attractor for the oscillon equation", Discrete Contin. Dyn. Syst. 29, 141 - 167
5. Đỗ Thị Hoài, Nguyễn Thị Thanh Thanh, Lâm Thị Thoa (2022), "Tính đặt đúng của bài toán biên ban đầu cho phương trình khuếch tán không cổ điển với hệ số phụ thuộc thời gian", Tạp chí Khoa học Trường Đại học Hải Phòng, số 22 (9/2022).
6. Y-F. Liu, D. Tao (2015), "Time-dependent global attractor for the nonclassical diffusion equations", *Appl. Anal.* 94, no. 7, 1439-1449.
7. F. Rivero (2013), "Time dependent perturbation in a non-autonomous non-classical parabolic equation", *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser,* B18, 209-221.
8. C. Sun and M. Yang (2009), "Dynamics of the nonclassical diffusion equations", *Asymp. Anal.* 59, 51-81.
9. T.W. Ting (1963), "Certain non-steady flows of second-order fluids", *Arch. Ration. Mech. Anal.* 14, 1-26.41.
10. S. Wang, D. Li and C. Zhong (2006), "On the dynamic of a class of nonclassical parabolic equations", *J. Math. Anal. Appl,* 317, 565-582.
11. J. Wang and Q. Ma (2021), "Asymptotic dynamic of the nonclassical diffusion equation with time-dependent coefficient", *J. Appl. Anal. Comput.*11, no. 1, 445-463.
12. Y. Xiao (2002), "Attractors for a nonclassical diffusion equation", *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.* 18, 273-276.