KHÔNG GIAN NỘI SUY VÀ NỬA NHÓM GIẢI TÍCH

Vũ Thị Mai, Đỗ Thị Hoài
Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Phòng
Email: maivt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 28/02/2024
Ngày PB đánh giá: 08/3/2024
Ngày duyệt đăng: 26/3/2024

TÓM TẮT: Lý thuyết nội suy tổng quát không nhằm mục đích mô tả đặc điểm của tất cả các không gian nội suy giữa X và Y mà để xây dựng các họ không gian nội suy phù hợp và nghiên cứu các tính chất của chúng. Lý thuyết nội suy có nhiều ứng dụng hay. Chúng tôi sẽ quan tâm các ứng dụng của các toán tử vi phân từng phần và các phương trình vi phân từng phần, đồng thời đề cập đến các ứng dụng cho các lĩnh vực khác. Đặc biệt, chúng tôi sẽ đưa ra những chứng minh về các kết quả chính quy tối ưu trong không gian Sobolev cho các phương trình vi phân Parabolic.

Từ khóa: Không gian nội suy, nửa nhóm giải tích, phương trình Parabolic.

INTERPOLATION SPACES AND ANALYTIC SEMIGROUPS

ABSTRACT: General interpolation theory does not aim to characterize all interpolation spaces between X and Y but to construct suitable families of interpolation spaces and study their properties. Interpolation theory has many interesting applications. The authors are interested in the applications of partial differential operators and partial differential equations; they also mention the applications to other fields. In particular, they give proofs about the optimal regularization results in Sobolev spaces for Parabolic differential equations.

Key words: Interpolation space, analytic semigroup, Parabolic equation.

1. GIỚI THIỆU

Chúng ta sẽ viết các phương trình Parabolic dưới dạng phương trình tiến hóa trong không gian Banach thích hợp. Để rõ ràng, chúng ta xét bài toán và chúng ta hãy thiết lập các hàm Banach thích hợp trong không gian nội suy X. Sau khi phát biểu các kết quả về sự tồn tại cục bộ và tính duy nhất, chúng ta sẽ thấy một số tiêu chuẩn về sự tồn tại trong cái lớn. Như trong trường hợp của các phương trình vi phân thông thường, nói chung nghiệm là chỉ được xác định trong một khoảng thời gian nhỏ [0, T]. Vấn đề tồn tại trong cái lớn là đặc biệt quan tâm đến các phương trình đến từ các mô hình toán học trong vật lý, sinh học, hóa học, v.v., nơi mà sự tồn tại ở quy mô lớn được mong đợi. Một số điều kiện đủ để sự tồn tại trong cái lớn sẽ được đưa ra.

2. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

Xét phương trình dưới dạng trừu tượng trong các không gian hàm tổng quát cho phép sử dụng những phương pháp mới dựa trên những phát triển gần đây của toán học như khái niệm nghiệm đủ tốt, không gian nội suy, định lý nội suy, ... để tìm hiểu những vấn đề mang tính bản chất của nghiệm phương trình đó.

Bài toán tìm nghiệm bị chặn trong các miền không bị chặn và chứng minh sự ổn định của nghiệm là bài toán thời sự và mang đến nhiều ứng dụng trong các vấn đề về luồng thủy khí qua các vật cản đứng yên hay quay tròn như là Tuabin hay cánh quạt. Với một số kết quả nền móng ban đầu [1,2,3,4], chúng tôi sẽ phát triển và hoàn thiện các kết quả về tính bị chặn, ổn định, hầu tuần hoàn của nghiệm các phương trình tiến hóa trong các không gian nội suy để nhận được các kết quả tổng quát và ứng dụng vào các phương trình cụ thể của động lực học thủy khí. Việc nghiên cứu và đánh giá sự tồn tại của các nghiệm bị chặn và tính ổn định của nghiệm của các phương trình tiến hóa tổng quát trong các không gian nội suy là rất quan trọng. Cùng với đó là kết hợp những phương pháp toán học hiện đại được ưa chuộng trên thế giới như là lý thuyết phổ của toán tử đạo hàm riêng, lý thuyết nửa nhóm liên tục mạnh, lý thuyết các không gian và hàm tử nội suy, vv...

3. TÍNH CHÍNH QUY TRONG PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC TRỪU TƯỢNG

Định nghĩa 1.1. *Cho* $\delta \in (0,\pi]$, *ta định nghĩa quạt như sau:*

$$\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \delta\} \setminus \{0\}$$

Định nghĩa 1.2. *Một họ toán tử* $(T(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ *được gọi là nửa nhóm nếu*

i) T(0)=Td;

ii) T(t+s)=T(t)T(s) $\forall t,s \in [0,\infty)$

Nếu thêm $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ *với mỗi* $x \in X$, ta gọi $(T(t))_{t\geq 0}$ *là nửa nhóm liên tục mạnh hay* C_0 *–nửa nhóm.*

Định nghĩa 1.3. *Cho X là không gian Banach và* $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. *Nửa nhóm* $(T(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ *được gọi là nửa nhóm giải tích bị chặn với góc* θ *nếu có mở rộng giải tích bị chặn của T lên* $\Sigma_{\theta'}$ *với mọi* $\theta' \in (0,\theta)$.

Cho M_0, M_1 là hai hằng số thỏa mãn: $\begin{matrix} \|e^{tA}\|_{L(X)} \leq M_0 \\ \|te^{tA}\|_{L(X)} \leq M_1 \end{matrix}$ với mọi $t \in [0, 1]$. Do A là toán tử quạt, toán tử $(A - I\omega)$ mô tả không gian nội suy $(X, D(A^m))_{\theta, p}$.

Mệnh đề 1.1. *Cho* $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ *ta có:*

$(X, D(A))_{\theta,p} = \{x \in X : \varphi(t) = t^{1-\theta}\|Ae^{tA}x\| \in L_*^p(0,1)\}$ và chuẩn $\|\cdot\|_{(X,D(A))_{\theta,p}}$ và $x \mapsto \|x\| + \|\varphi\|_{L_*^p(0,1)}$ là tương đương.

Mệnh đề 1.2. *Cho* $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ *ta có:*

$(X, D(A^m))_{\theta,p} = \{x \in X : \varphi_m(t) = t^{m(1-\theta)}\|A^m e^{tA}x\| \in L_*^p(0,1)\}$ và chuẩn $\|\cdot\|_{(X,D(A^m))_{\theta,p}}$ và $x \mapsto \|x\| + \|\varphi_m\|_{L_*^p(0,1)}$ là tương đương.

Trong phần này ta sử dụng lý thuyết nội suy để kiểm tra chắc chắn rằng toán tử là quạt trong không gian hàm thích hợp.

Định lý 2.1. *Cho Y là không gian nội suy bất kì giữa X và D(A). Khi đó phần của A trong Y là toán tử:*

$A_Y : D(A_Y) \mapsto Y, D(A_Y) = \{y \in D(A) : Ay \in Y\}, A_Y y = Ay$ *là toán tử quạt trong Y.*

Cụ thể, $\forall \theta \in (0, 1)$, $1 \le p \le \infty$, *các phần của A trong* $D_A(\theta, p)$, $D_A(\theta)$, $[X, D(A)]_\theta$ *là toán tử quạt.*

Tương tự, $\forall k \in \mathbb{N}$, *phần của A trong* $D_A(\theta + k, p)$ *là toán tử quạt trong* $D_A(\theta + k, p)$

Định lý sau sử dụng định lý nội suy Stein để chứng minh sự sinh ra của nửa nhóm giải tích trong không gian L^p

Định lý 2.2. *Cho* (Ω, μ) *là* $\sigma-$*không gian độ đo, và cho*

$T(t) : L^2(\Omega) + L^\infty(\Omega) \to L^2(\Omega) + L^\infty(\Omega)$

là nửa nhóm sao cho hạn chế của nó tới $L^2(\Omega)$ *là nửa nhóm giải tích bị chặn trong* $L^2(\Omega)$ *và hạn chế của nó tới* $L^\infty(\Omega)$ *là nửa nhóm bị chặn trong* $L^\infty(\Omega)$.

Khi đó hạn chế của T(t) tới $L^p(\Omega)$ *là nửa nhóm giải tích bị chặn trong*

$L^p(\Omega), \forall p \in (2, +\infty)$.

Sau đây ta xét tính chính quy cho phương trình Parabolic

Cố định $T > 0$, đặt tập

$M_k = \sup\limits_{0 \le t \le T+1} \left\| t^k A^k e^{tA} \right\|_{L(X)}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (3.1) và cho $\alpha \in (0,1)$

$M_{k,\alpha} = \sup\limits_{0 \le t \le T+1} \left\| t^{k-\alpha} A^k e^{tA} \right\|_{L(D_A(\alpha,\infty),X)}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (3.2)

Cho $f : [0,T] \to X, u_0 \in X$. Xét phương trình Parabolic trừu tượng:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Trong phần này chúng tôi có kết quả về tính chính quy tối ưu cho phương trình (3.3) liên quan đến không gian nội suy $D_A(\theta, p)$.

Định nghĩa 3.1. *Cho* $T > 0, f : [0,T] \to X$ *là hàm liên tục và cho* $u_0 \in X$. *Khi đó:*

i) Hàm $u \in C^1([0,T], X) \cap C([0,T], D(A))$ *gọi là nghiệm chặt của phương trình (3.3) trong* $[0,T]$ *nếu* $u'(t) = Au(t) + f(t)$ *với mỗi* $t \in [0,T]$.

ii) Hàm $u \in C^1([0,T], X) \cap C([0,T], D(A)) \cap C([0,T], X)$ *gọi là nghiệm cổ điển của phương trình (3.3) trong* $[0,T]$ *nếu* $u'(t) = Au(t) + f(t)$ *với mỗi* $t \in [0,T], u(0) = u_0$.

Từ định nghĩa 3.1, phương trình (3.3) có nghiệm chặt thì

$u_0 \in D(A), Au_0 + f(0) \in \overline{D(A)}$ (3.4)

Và có nghiệm cổ điển thì $u_0 \in \overline{D(A)}$ (3.5)

Hơn nữa, nghiệm chặt cũng là nghiệm cổ điển.

Mệnh đề 3.2. *Cho* $f \in C([0,T],X), u_0 \in \overline{D(A)}$. *Nếu u là nghiệm cổ điển của (3.3) thì nó được cho bởi công thức biến thiên hằng số*

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds;\ \ 0 \le t \le T \quad (3.6)$$

Chứng minh. Cho u là nghiệm cổ điển của (3.3) trong $[0,T]$ và $t \in [0,T]$.

Từ $u \in C^1([0,T],X) \cap C([0,T],D(A)) \cap C([0,T],X)$

do đó $u(t) \in \overline{D(A)}, 0 \le t \le T$

Hàm $v(s) = e^{(t-s)A}u(s); 0 \le s \le t$ thuộc $C^1([0,T],X) \cap C([0,T],X)$

và $v(0) = e^{tA}u_0; v(t) = u(t), v'(s) = -Ae^{(t-s)A}u(s) + e^{(t-s)A}u'(s) = e^{(t-s)A}f(s), 0 < s < t$

Khi đó, cho $0 < 2\varepsilon < t, v(t-\varepsilon) - v(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} e^{(t-s)A} f(s)ds$

Vì vậy, cho $\varepsilon \to 0$ ta nhận được $v(t) - v(0) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds$

Mệnh đề 3.3. *Cho* $f \in L^\infty([0,T],X)$.

Khi đó $\forall \alpha \in (0,1), u \in C^\alpha([0,T],X) \cap C([0,T],D_A(\alpha,1))$ *và tồn tại hằng số C độc lập với f sao cho* $\|v\|_{C^{1-\alpha}([0,T],D_A(\alpha,1))} \le C\|f\|_{L^\infty([0,T],X)}$ (3.7)

Chứng minh. Áp dụng (3.1) với $k = 0, v$ thỏa mãn

$$\|v(t)\| \le M_0 \int_0^t \|f(s)\| ds \le M_0 T \|f\|_\infty; 0 \le t \le T \quad (3.8)$$

Từ $\|e^{tA}\|_{L(X)}$ và $\|e^{tA}\|_{L(X,D(A))}$ bị chặn trong $(0,T]$, bởi phép nội suy, có $K_{0,\alpha} > 0$ sao cho $\|e^{tA}\|_{L(X,D_A(\alpha,1))} \le K_{0,\alpha}t^{-\alpha}; 0 \le t \le T$

Tương tự, từ $K\|e^{tA}\|_{L(X)}$ và $\|t^2 Ae^{tA}\|_{L(X,D(A))}$ bị chặn trong $[0,T]$, bởi phép nội suy, có $K_{1,\alpha} > 0$ sao cho

$$\|e^{tA}\|_{L(X,D_A(\alpha,1))} \le K_{1,\alpha}t^{-\alpha-1}; 0 \le t \le T$$

Vì thế, $s \mapsto \|e^{(t-s)A}\|_{L(X,D_A(\alpha,1))} \in L^1(0,t)\ \forall t \in [0,T]$

Khi đó $v(t) \in D_A(\alpha,1)\ \forall \alpha \in (0,1)$ và

$$\left\| v(t) \right\|_{D_A(\alpha,1)} \le K_{0,\alpha} (1-\alpha)^{-1} T^{1-\alpha} \left\| f \right\|_{L^\infty([0,T],X)} \quad (3.9)$$

Hơn nữa, với $0 \le s \le t \le T$ có:

$$v(t) - v(s) = \int_0^s e^{(t-\sigma)A} - e^{(s-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma + \int_s^t e^{(t-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma$$

$$= \int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} A e^{\tau A} f(\sigma) d\sigma + \int_s^t e^{(t-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma$$

Có nghĩa là

$$\left\| v(t) - v(s) \right\|_{D_A(\alpha,1)} \le K_{1,\alpha} \int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \tau^{1-\alpha} d\tau \left\| f \right\|_\infty + K_{0,\alpha} \int_s^t (t-\sigma)^{-\alpha} d\sigma \left\| f \right\|_\infty$$

$$\le \left(\frac{K_{1,\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{K_{0,\alpha}}{1-\alpha} \right) (t-s)^{1-\alpha} \left\| f \right\|_\infty \quad (3.10)$$

Vì vậy v là $(1-\alpha)-$ liên tục Holder với giá trị trong $D_A(\alpha,1)$.

Đánh giá (3.7) suy ra từ (3.9). (3.10).

Bổ đề 3.4. *Cho $f \in C([0,T],X), u_0 \in \overline{D(A)}, u$ là nghiệm đủ tốt của phương trình (3.3). Các điều kiện sau là tương đương:*

i) $u \in C([0,T], D(A))$

ii) $u \in C^1([0,T], X)$

iii) u là nghiệm cổ điển của phương trình (3.3).

Hơn nữa, các điều kiện sau là tương đương

i) $u \in C([0,T], D(A))$

ii) $u \in C^1([0,T], X)$

iii) u là nghiệm chặt của phương trình (3.3).

Chúng tôi có kết quả sau cho tính chính quy của phương trình (3.3)

Cho u là nghiệm đủ tốt của phương trình (3.3), $u = u_1 + u_2$, ở đó:

$$\begin{cases} u_1(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} \left(f(s) - f(t) \right) ds; \quad 0 \le t \le T \\ u_2(t) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds; \quad 0 \le t \le T \end{cases} \quad (3.11)$$

Định lý 3.5. *Cho $0 < \alpha < 1, f \in C^\alpha([0,T], X), u_0 \in X, u$ là nghiệm đủ tốt của phương trình (3.3). Khi đó $u \in C^\alpha([\varepsilon,T], D(A)) \cap C^{1+\alpha}([\varepsilon,T], X), \forall \varepsilon \in (0,T)$ và:*

i) Nếu $u_0 \in \overline{D(A)}$ thì u là nghiệm cổ điển của phương trình (3.3).

ii) Nếu $u_0 \in D(A)$ và $Au_0 + f(0) \in \overline{D(A)}$ thì u là nghiệm chặt của phương trình (3.3) và tồn tại hằng số C sao cho $\|u\|_{C^1([0,T],X)} + \|u\|_{C([0,T],D(A))} \le C\left(\|f\|_{C^\alpha([0,T],X)} + \|u_0\|_{D(A)}\right)$ (3.12)

iii) Nếu $u_0 \in D(A)$ và $Au_0 + f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$ thì u' và Au thuộc vào $C^\alpha([0,T],X)$, u' thuộc vào $B([0,T],D_A(\alpha,\infty))$ và tồn tại hằng số C sao cho

$$\begin{aligned}&\|u\|_{C^{1+\alpha}([0,T],X)} + \|Au\|_{C^\alpha([0,T],X)} + \|u'\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))}\\ &\le C\left(\|f\|_{C^\alpha([0,T],X)} + \|u_0\|_{D(A)} + \|Au_0 + f(0)\|_{D_A(\alpha,\infty)}\right)\end{aligned} \quad (3.13)$$

Chứng minh. Từ bổ đề (3.4) để chứng minh i), ii) đủ để chỉ ra u thuộc vào $C((0,T],D(A))$ trong trường hợp $u_0 \in \overline{D(A)}$ và thuộc vào $C((0,T],D(A))$ trong trường hợp $u_0 \in D(A)$ và $Au_0 + f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$.

Từ mệnh đề 3.3 ta nhận được $u \in C^\alpha([\varepsilon,T],X), \forall \varepsilon \in (0,T)$ và $u \in C([0,T],X)$ nếu $u_0 \in \overline{D(A)}$. Vì vậy ta chỉ nghiên cứu Au.

Cho u_1, u_2 định nghĩa bởi 3.11. Khi đó $u_1(t) \in D(A), t \le 0, u_2(t) \in D(A), t \le 0$ và

$$\begin{cases} i)\ Au_1(t) = \int_0^t Ae^{(t-s)A}\big(f(s) - f(t)\big)ds,\ 0 \le t \le T \\ ii)\ Au_2(t) = Ae^{tA}u_0 + \left(e^{tA} - 1\right)f(t),\ 0 < t \le T \end{cases} \quad (3.14)$$

Nếu $u_0 \in D(A)$ thì (3.14.ii) cũng đúng cho $t = 0$

Ta chỉ ra Au_1 liên tục Holder trong $[0,T]$. Thật vậy:

Cho $0 \le s \le t \le T$:

$$\begin{aligned}Au_1(t) - Au_1(s) &= \int_0^s A\left(e^{(t-\sigma)A} - e^{(s-\sigma)A}\right)\big(f(\sigma) - f(s)\big)d\sigma + \left(e^{tA} - e^{(t-s)A}\right)\big(f(s) - f(t)\big)\\ &\quad + \int_s^t Ae^{(t-\sigma)A}\big(f(\sigma) - f(t)\big)d\sigma\end{aligned}$$

Vì vậy, từ $A\left(e^{(t-\sigma)A} - e^{(s-\sigma)A}\right) = \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} A^2 e^{\tau A} d\tau$

$$\begin{aligned}\|Au_1(t) - Au_1(s)\| &\le M_2 \int_0^s (s-\sigma)^\alpha \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \tau^{-2} d\tau d\sigma [f]_{C^\alpha} + 2M_0(t-s)^\alpha [f]_{C^\alpha} + M_1 \int_s^t (t-\sigma)^{\alpha-1} d\sigma [f]_{C^\alpha}\\ &\le M_2 \int_0^s d\sigma \int_{s-\sigma}^{t-\sigma} \tau^{-2} d\tau [f]_{C^\alpha} + \left(2M_0 + M_1\alpha^{-1}\right)(t-s)^\alpha [f]_{C^\alpha}\end{aligned}$$

$$\le \left(\frac{M_2}{\alpha(\alpha-1)} + 2M_0 + \frac{M_1}{\alpha} \right)(t-s)^\alpha [f]_{C^\alpha} \quad (3.15)$$

Do đó Au_1 là $\alpha-$ liên tục Holder trong $[0,T]$. Hơn nữa, Au_2 là $\alpha-$ liên tục Holder trong $[\varepsilon,T]$ Từ đó, nếu $u_0 \in \overline{D(A)}$ thì $u \in C((0,T],X)$ và $Au \in C((0,T],X)$. Vì vậy, bởi mệnh đề (3.4), u là nghiệm cổ điển của phương trình (3.3). Như vậy, i) đã được chứng minh.

Nếu $u_0 \in D(A)$ ta có

$$Au_2(t) = e^{tA}(Au_0 + f(0)) + e^{tA}(f(t) - f(0)) - f(t);\ 0 \le t \le T \quad (3.16)$$

Vì vậy, nếu $Au_0 + f(0) \in \overline{D(A)}$ thì Au_2 cũng liên tục tại $t=0$, do đó i) đã được chứng minh.

Trong trường hợp $Ax + f(0) \in D(\alpha,\infty)$, từ (3.16) với $0 \le s \le t \le T$ ta nhận được

$$\|Au_2(t) - Au_2(s)\| \le \left\|\left(e^{tA} - e^{sA}\right)(Au_0 + f(0))\right\| + \left\|\left(e^{tA} - e^{sA}\right)(f(s) + f(0))\right\| + e^{tA}(f(t) - f(s))$$

$$\le \int_s^t \|Ae^{\sigma A}\|_{L(D_A(\alpha,\infty),X)} d\sigma \|Au_0 + f(0)\|_{D_A(\alpha,\infty)} + s^\alpha \int_s^t \|Ae^{\sigma A} d\sigma\|_{L(X)} [f]_{C^\alpha}$$

$$\le \left(\frac{M_{1,\alpha}}{\alpha} \|Au_0 + f(0)\|_{D_A(0,\infty)} (t-s)^\alpha + \left(\frac{M_1}{\alpha} + M_0 + 1 \right)(t-s)^\alpha \right)[f]_{C^\alpha} \quad (3.17)$$

Vì vậy Au_2 cũng liên tục Holder và có đánh giá

$$\|u\|_{C^{1+\alpha}([0,T],X)} + \|Au\|_{C^\alpha([0,T],X)} \le C\left(\|Au\|_{C^\alpha([0,T],X)} + \|u_0\|_{D(A)} + \|Au_0 + f(0)\|_{D_A(\alpha,\infty)} \right)$$

Ta đánh giá $\|u'(t)\|_{D_A(\alpha,\infty)}$. Cho $0 \le t \le T$, bởi (3.14) ta có:

$$u'(t) = \int_0^t Ae^{(t-s)A}(f(s) - f(t))ds + e^{tA}(Au_0 + f(0)) + e^{tA}(f(t) - f(0))$$

Vì vậy, cho $0 < \xi \le 1$

$$\|\xi^{1-\alpha} Ae^{\xi A} u'(t)\|$$

$$\le \left\| \xi^{1-\alpha} \int_0^t A^2 e^{(t+\xi-s)A}(f(s) - f(t))ds \right\| + \left\| \xi^{1-\alpha} Ae^{(t+\xi)A}(Au_0 + f(0)) \right\|$$

$$+ \left\| \xi^{1-\alpha} Ae^{(t+\xi)A}(f(t) - f(0)) \right\|$$

$$\le M_2 \xi^{1-\alpha} \int_0^t (t-s)^\alpha (t+\xi-s)^{-2} ds [f]_{C^\alpha} + M_0 [Au_0 + f(0)]_{D_A(\alpha,\infty)}$$

$$+ M_1 \xi^{1-\alpha}(t+\xi)^{-1} t^\alpha [f]_{C^\alpha}$$

$$\leq M_2\int_0^\infty \sigma^\alpha(\sigma+1)^{-2}d\sigma[f]_{C^\alpha}+M_0\left[Au_0+f(0)\right]_{D_A(\alpha,\infty)}+M_1[f]_{C^\alpha} \quad (3.18)$$

Do đó $\|u'(t)\|_{D_A(\alpha,\infty)}$ bị chặn trong $[0,T]$.

Định lý 3.6. *Cho* $0<\alpha<1, f\in C([0,T],X)\cap B([0,T],D_A(\alpha,\infty)), u_0\in X, u$ *là nghiệm đủ tốt của phương trình (3.3). Khi đó*

$$u\in C^1([0,T],X)\cap C([0,T],D(A)),\ u\in B([\varepsilon,T],D_A(\alpha+1,\infty))\forall\varepsilon\in(0,T)$$

và:

i) Nếu $u_0\in\overline{D(A)}$ *thì u là nghiệm cổ điển của phương trình (3.3).*

ii) Nếu $u_0\in D(A)$ *và* $Au_0\in\overline{D(A)}$ *thì u là nghiệm chặt của phương trình (3.3).*

iii) Nếu $u_0\in D_A(\alpha+1,\infty)$ *thì u' và Au thuộc vào* $C([0,T],X)\cap B([0,T],D_A(\alpha,\infty))$*, Au thuộc vào* $C^\alpha([0,T],X)$ *và tồn tại hằng số C sao cho*

$$\|u'\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))}+\|Au\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))}+\|Au\|_{C([0,T],X)} \quad (3.19)$$
$$\leq C\left(\|f\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))}+\|u_0\|_{D_A(\alpha+1,\infty)}\right)$$

Chứng minh. Chứng minh hàm *v* là nghiệm chặt của

$$v'(t)=Av(t)+f(t),\quad 0<t\leq T, v(0)=0 \quad (3.20)$$

Và hơn nữa, *v', Av* thuộc vào $B([0,T],D_A(\alpha,\infty))$, *Av* thuộc vào $C^\alpha([0,T],X)$ và có *C* sao cho

$$\|v'\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))}+\|Av\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))}+\|Av\|_{C^\alpha([0,T],X)} \quad (3.21)$$
$$\leq C\|f\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))}$$

Cho *0, v(t)* thuộc vào *D(A)* và:

$$\|Av(t)\|\leq M_{1,\alpha}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}=\frac{T^\alpha M_{1,\alpha}}{\alpha}\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))} \quad (3.22)$$

Hơn nữa, cho $0<\xi\leq 1$

$$\left\|\xi^{1-\alpha}Ae^{\xi A}Av(t)\right\|\leq xi^{1-\alpha}\left\|\int_0^t A^2e^{(t+\xi-s)A}f(s)ds\right\|\leq M_{2,\alpha}\xi^{1-\alpha}\int_0^t(t-s)^\alpha(t+\xi-s)^{\alpha-2}ds\|f\|_{B(D_A(\alpha,\infty))}$$

$$\leq\frac{T^\alpha M_{2,\alpha}}{1-\alpha}\|f\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))} \quad (3.23)$$

Vì vậy *Av* bị chặn với giá trị trong $D_A(\alpha,\infty)$. Ta chỉ ra *Av* liên tục Holder với giá trị trong *X.*

Cho $0 \le s \le t \le T$, ta có:

$$\left\|Av(t)-Av(s)\right\| \le \left\|A\int_0^s A\left(e^{(t-\sigma)A}-e^{(s-\sigma)A}\right)f(\sigma)d\sigma\right\| + \left\|A\int_s^t e^{(t-\sigma)A}f(\sigma)d\sigma\right\|$$

$$\le M_{2,\alpha}\int_0^s d\sigma\int_{s-\sigma}^{t-\sigma}\tau^{\alpha-2}d\tau\|f\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))} + M_{1,\alpha}\int_s^t(\tau-\sigma)^{\alpha-1}d\sigma\|f\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))}$$

$$\le \frac{M_{2,\alpha}}{(1-\alpha)\alpha} + \frac{M_{1,\alpha}}{\alpha(t-s)^{\alpha}}\|f\|_{B([0,T],D_A(\alpha,\infty))} \quad (3.24)$$

Vì vậy *Av* là $\alpha -$ liên tục Holder trong *[0,T]*. Ước lượng (3.21) suy ra từ (3.22), (3.23), (3.24).

Hơn nữa, từ Bổ đề 3.4 ta có *v* là nghiệm chặt của (3.20).

Ta xét hàm $t \mapsto e^{tA}u_0$.

Nếu $u_0 \in \overline{D(A)}, t \mapsto e^{tA}u_0$ là nghiệm cổ điển của $\omega' = A\omega, t > 0, \omega(0) = \omega_0$

Nếu $u_0 \in D(A), Au_0 \in \overline{D(A)}$ thì nó là nghiệm chặt. Nếu $x \in D_A(\alpha+1,\infty)$ thì nó là nghiệm chặt, hơn nữa nó thuộc vào $B([0,T],D_A(\alpha+1,\infty)) \cap C^{\alpha}([0,T],D(A))$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi áp dụng các kết quả đạt được về nửa nhóm bị chặn của phương trình tiến hóa trong không gian nội suy. Các kết quả đó đã được ứng dụng cho tính chính quy cho phương trình Parabolic.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. K. Engel, R. Nagel (1999), "One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations",

Spinger Verlag, Berlin.

2. J. Goldstein (1985), "Semigroups of Operators and Applications", *Oxford University Press.*

3. A. Lunardi (1995), "Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems", *Birkh¨auser, Basel.*

4. A. Lunardi (1999), "Interpolation Theory", *Appunti, Scuola Normale Superiore, The .pdf file may be downloaded at the address http://math.unipr.it/_lunardi.*