# MỘT THUẬT TOÁN MỚI GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG

**Cao Thị Thu Trang**
*Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Phòng*
*Email: trangctt@dhhp.edu.vn*

*Ngày nhận bài: 22/3/2024*
*Ngày PB đánh giá: 10/4/2024*
*Ngày duyệt đăng: 29/5/2024*

**TÓM TẮT:** Trong bài báo này, tôi đề xuất và chứng minh sự hội tụ cho một thuật toán mới để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} Fix(S_i)$ của các ánh xạ: $S_i : H \to H,\ i = 1,2,...,N,\ N \in \mathbb{N}$, với $H$ là không gian Hilbert thực. Kết quả chính của bài báo là sự nghiên cứu mở rộng giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập $\Omega$, một tập ẩn, không được biết trước, đây là một yếu tố gây khó khăn khi xây dựng thuật toán giải. Tuy vậy, nghiệm của bài toán trên vừa là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đồng thời là điểm bất động chung của các ánh xạ $S_i, i = 1,2,...,N$, do đó thuật toán áp dụng được cho cả hai bài toán: bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán tìm điểm bất động. Điểm mới của thuật toán là chỉ sử dụng kỹ thuật tính toán dạng hiển, không cần sử dụng phép chiếu và kết quả hội tụ mạnh tôi đã chứng minh trong bài báo.

**Từ khóa:** *Bất đẳng thức biến phân, Tập điểm bất động, Tính toán song song, Quán tính.*

## A NEW ALGORITHM TO SOLVE VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS ON THE FIXED POINT SET

**ABSTRACT:** In this paper, I propose and prove the convergence of a new algorithm to solve the variational inequality problem on the fixed point set $\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} Fix(S_i)$, of the mappings $S_i : H \to H,\ i = 1,2,...,N,\ N \in \mathbb{N}$, where $H$ is the real Hilbert space. The main result of this article is the extended study of solving the variational inequality problem on $\Omega$, a hidden set, not known in advance, this is a factor causing difficulties when building a solution algorithm. However, the solution set of the above problem is both the solution of the variational inequality problem and the common fixed point of the mappings $S_i, i = 1,2,...,N$. Therefore, the algorithm is applicable to both problems: the variational inequality problem and the problem of finding fixed points. The new point of the algorithm is that it only uses explicit calculation techniques, does not need to use projection, and strong convergence results I have proven in the article.

**Keywords:** *Variational inequalities, Fixed point sets, Parallel computing, Inertial.*

## 1. GIỚI THIỆU:

Cho $C$ là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $H$. Ánh xạ $F: C \to H$ được gọi là ánh xạ giá. Bài toán bất đẳng thức biến phân ký hiệu là $VI(C, F)$ được định nghĩa như sau:

Tìm $x^* \in C$ sao cho $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \ \forall x \in C$. (1.1)

Bài toán bất đẳng thức biến phân lần đầu tiên được giới thiệu bởi Stampacchia và cộng sự [7] vào năm 1966 khi nghiên cứu các điều kiện biên của phương trình đạo hàm riêng, sau đó được các nhà khoa học nghiên cứu theo hai hướng chính: Hướng nghiên cứu các điều kiện tồn tại nghiệm và hướng đề xuất các thuật toán giải. Ban đầu, bất đẳng thức biến phân được coi như một công cụ để nghiên cứu bài toán cân bằng, và ngày nay đã trở thành một nhánh nghiên cứu riêng biệt vì tính ứng dụng thực tế cao [1,2,4,5,8], bởi nó bao gồm các lớp bài toán: Bài toán tối ưu, bài toán điểm bất động, bài toán bù phi tuyến,…

Trong thời gian gần đây, một số nghiên cứu mới đã mở rộng giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc ẩn, chúng ta thay $C$ bởi tập điểm bất động của một họ các ánh xạ không giãn hoặc nửa co, ta được bài toán mới là ***bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động*** [12], ký hiệu $VIF(\Omega, F)$:

Tìm $x^* \in \Omega$ sao cho $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$. (1.2)

Ở đây, $\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} Fix(S_i)$, $Fix(S_i) = \{x \in H: \ S_i(x) = x\}$, $S_i, i = 1, 2, ..., N$ là các ánh xạ không giãn hoặc tựa co.

Bài toán $VIF(\Omega, F)$ đã có rất nhiều ứng dụng thực tế như: Mô hình xử lý ảnh, mô hình tối ưu mạng truyền thông, mô hình cân bằng mạng giao thông,… [4,5,8,14]. Hướng nghiên cứu các thuật giải cho bài toán $VIF(\Omega, F)$ là tương đối khó khăn vì tập điểm bất động $\Omega$ là tập ẩn, ta không thể thực hiện phép chiếu thông thường [1] lên $\Omega$ để tìm lời giải cho bài toán (1.2), do đó cần kết hợp các kỹ thuật tính toán xấp xỉ [8], lai ghép [6,11], tính toán song song [3],… để đưa ra phương pháp giải mới.

## 2. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

Để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, đầu tiên ta phải nhắc đến công trình của Yamada [12], tác giả đã sử dụng thuật toán lai ghép đường dốc và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp về nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$. Kế thừa các kết quả của Yamada, Ding [6] năm 2007 đã đề xuất thuật toán ba bước nới lỏng để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$ và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp. Tiếp đó năm 2008, Yen Cherng Lin [13] đã đề xuất và chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh bởi thuật toán lai ghép độ dốc giảm dần, áp dụng cho bài toán này …

Các kết quả của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động đã được ứng dụng vào rất nhiều mô hình thực tế, chẳng hạn như mô hình xử lý ảnh [5], nhóm tác giả đã khôi phục một bức ảnh được làm mờ Gaussian và thêm nhiễu ngẫu nhiên bằng thuật toán phân chia xấp xỉ hai bước tiến - lùi, hoặc kết quả của P. Jailoka, [8] tác giả đã sử dụng thuật toán xấp xỉ liên kết tiến - lùi để áp dụng vào vấn đề tương tự.

Bởi các ứng dụng quan trọng của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, trong bài báo này, tôi chọn nghiên cứu, đề xuất và chứng minh sự hội tụ cho thuật toán mới giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, được xây dựng từ kỹ thuật tính toán song song [3] kết hợp kỹ thuật quán tính [8]. Các kết quả được trình bày trong không gian Hilbert thực $H$.

**3. Nội dung nghiên cứu**

Nội dung chính của bài báo là thuật toán giải bài toán $VIF(\Omega, F)$. Trước hết ta giới thiệu về tính chất thông thường của ánh xạ giá $F$ và các ánh xạ $S_i$, $i = \overline{1,N}$ qua hai định nghĩa sau:

**Định nghĩa 3.1.** Cho ánh xạ $F: H \to H$, $F$ được gọi là

i, $\beta-$đơn điệu mạnh nếu $\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq \beta \| x - y \|^2, \ \forall x, y \in H;$

ii, $L-$liên tục Lipschitz nếu $\| F(x) - F(y) \| \leq L \| x - y \|, \ \forall x, y \in H.$

**Định nghĩa 3.2.** Cho các ánh xạ $S_i: H \to H, i = \overline{1,N}$. $S_i$ được gọi là

i, $\beta_i$- tựa co trên $H$ với $\beta_i \in \left[0,1\right)$ nếu:

$$\left\|S_i x - x^*\right\|^2 \leq \left\|x - x^*\right\|^2 + \beta_i \left\|x - S_i x\right\|^2, \forall x \in H, x^* \in Fix\left(S_i\right),$$

ii, Nửa đóng tại 0 nếu: $\left\{x_k\right\}$ hội tụ yếu tới $\bar{x}$ và $\left\{\left(I - S_i\right)\left(x_k\right)\right\}$ hội tụ mạnh đến $0$ thì $\bar{x} \in Fix(S_i)$.

**3.1. Thuật toán 1:**

**Bước khởi tạo:** Chọn $x^0, x^1 \in H$ bất kì và các tham số:

$$\begin{cases} a \in (0,1), \{\lambda_k\} \subset [\bar{a}, a] \subset \left(0, \dfrac{2\beta}{L^2}\right), \sqrt{1 - 2\lambda^k \beta + \left(\lambda^k\right)^2 L^2} < 1 - a, \\ \gamma_{k,i} \in (\bar{b}, b) \subset (0, 1 - \max\{\beta_i : i = 1,2,...,N\}), \zeta^k \in (0,1), \sum\limits_{k=1}^{\infty} \zeta^k = \infty, \lim\limits_{k \to \infty} \zeta^k = 0, h^k = \zeta^k \lambda^k. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Bước 1:** Nếu $x_k \neq x_{k-1}$, chọn hệ số bất kỳ $\theta_k$ sao cho: $0 < \theta_k \leq \dfrac{\zeta^k}{\left\|x^k - x^{k-1}\right\|}$.

Ngược lại, nếu $x^k = x^{k-1}$, chọn $\theta^k = \zeta^k$. Tính: $w^k = x^k + \theta^k (x^k - x^{k-1})$; (3.2)

**Bước 2:** Tính

$u_i^k = \left(1 - \gamma_{k,i}\right) w^k + \gamma_{k,i} S_i w^k$. Đặt $t^k = u_{i_0}^k$; $i_0 = \arg\max \left\{\left\|u_i^k - w^k\right\|, i = \overline{1,N}\right\}$; (3.3)

**Bước 3.** Tính $x^{k+1} = t^k - h^k F\left(t^k\right)$. Đặt $k = k + 1$, quay lại Bước 1. (3.4)

Sau đây là ba bổ đề sử dụng để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp trong Thuật toán 1.

**Bổ đề 3.1.** [9, remark 4.2] Cho ánh xạ $S: H \to H$ là $\theta-$tựa co, tập điểm bất động $Fix\left(S\right) \neq \varnothing$ và $\alpha \in \left[0, 1 - \theta\right]$. Khi đó:

$$\left\|S_\alpha x-x^*\right\|^2 \le \left\|x-x^*\right\|^2-\alpha\left(1-\theta-\alpha\right)\left\|Sx-x\right\|^2, \forall x^* \in Fix\left(S\right), x \in H,$$

ở đây $S_\alpha=\left(1-\alpha\right)I+\alpha S$ và $I$ là ánh xạ đồng nhất.

**Bổ đề 3.2.** [10, remark 4.4] Cho $\left\{a_k\right\}$ là một dãy số thực dương. Giả sử rằng với mọi số tự nhiên $m$ tồn tại một số tự nhiên $p$ sao cho $p \ge m$ và $a^p \le a^{p+1}$. Cho $k_0$ là một số tự nhiên thỏa mãn $a^{k_0} \le a^{k_0+1}$ và với mọi $k \ge k_0$ đặt:

$$\tau\left(k\right)=max\{i \in \mathbb{N}: k_0 \le i \le k,\ a^i \le a^{i+1}\},$$

khi đó $0 \le a^{\tau(k)} \le a^{\tau(k)+1}$ với mọi $k \ge k_0$. Hơn nữa dãy $\left\{\tau\left(k\right)\right\}_{k \ge k_0}$ là không giảm và tiến đến $+\infty$ khi $k \to \infty$.

**Bổ đề 3.3.** [9, Lemma 2.6] Cho $\left\{s_k\right\}$ là một dãy số thực không âm và $\left\{p_k\right\}$ là một dãy số thực. Cho $\left\{\alpha_k\right\}$ là một dãy số dương trong khoảng $\left(0,1\right)$ sao cho $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k=\infty$. Giả sử rằng $s_{k+1} \le \left(1-\alpha_k\right)s_k+\alpha_k p_k,\ k \in \mathbb{N}.$ Nếu dãy $\left\{p_k\right\}$ thỏa mãn $\limsup_{i\to\infty} p_k \le 0$ thì $\lim_{k\to\infty} s_k=0$.

**3.2. Sự hội tụ.**

Định lý sau chỉ ra sự hội tụ của dãy lặp trong Thuật toán 1.

**Định lý 3.1**. Cho $F: H \to H$ là ánh xạ $\beta-$Đơn điệu mạnh và và $L-$liên tục Lipschitz, $S_i: H \to H$ là các ánh xạ $\beta_i-$tựa co và nửa đóng tại 0, với mọi $i=\overline{1,N}$. Dưới điều kiện (3.1) và $\Omega \ne \varnothing$, dãy $\{x^k\}$ trong Thuật toán 1 hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất $x^*$ của Bài toán (1.2).

*Chứng minh:*

Từ giả thiết $F$ là ánh xạ $\beta-$đơn điệu mạnh và $L-$liên tục Lipschitz, ta có

$$\begin{aligned}\left\|t^k-\lambda^k F\left(t^k\right)-\left[x^*-\lambda^k F\left(x^*\right)\right]\right\|^2 &= \left\|t^k-x^*\right\|^2-2\lambda^k\left\langle F\left(t^k\right)-F\left(x^*\right), t^k-x^*\right\rangle \\ &\quad +\left(\lambda^k\right)^2\left\|F\left(t^k\right)-F\left(x^*\right)\right\|^2 \\ &\le \left(1-2\lambda^k\beta+\left(\lambda^k\right)^2 L^2\right)\left\|t^k-x^*\right\|^2.\end{aligned} \qquad (3.5)$$

Do đó

$$\left\|t^k-\lambda^k F\left(t^k\right)-\left[x^*-\lambda^k F\left(x^*\right)\right]\right\| \le \delta^k\left\|t^k-x^*\right\|, \qquad (3.6)$$

trong đó $\delta^k=\sqrt{1-2\lambda^k\beta+\left(\lambda^k\right)^2 L^2}$. Từ (3.1) và (3.2), với mọi $x \in H$ ta có

$$
\begin{aligned}
\left\|w^k - x\right\| &= \left\|x^k + \theta^k\left(x^k - x^{k-1}\right) - x\right\| \\
&\le \left\|x^k - x\right\| + \left\|\theta^k\left(x^k - x^{k-1}\right)\right\| \qquad (3.7) \\
&\le \left\|x^k - x\right\| + \zeta^k.
\end{aligned}
$$

Từ Bước 2 và Bổ đề 3.1, với mỗi $\bar{x} \in \Omega$,

$$
\begin{aligned}
\left\|t^k - \bar{x}\right\|^2 &= \left\|u_{i_0}^k - \bar{x}\right\|^2 \\
&= \left\|\left(1-\gamma_{k,i_0}\right)w^k + \gamma_{k,i_0} S_{i_0} w^k - \bar{x}\right\|^2 \qquad (3.8) \\
&\le \left\|w^k - \bar{x}\right\|^2 - \gamma_{k,i_0}\left(1-\gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}\right)\left\|S_{i_0} w^k - w^k\right\|^2.
\end{aligned}
$$

Kết hợp Bước 3 và (3.6), (3.7), (3.8), ta có

$$
\begin{aligned}
\left\|x^{k+1} - x^*\right\| &= \left\|t^k - \zeta^k \lambda^k F\left(t^k\right) - x^*\right\| \\
&\le \left(1-\zeta^k\right)\left\|t^k - x^*\right\| + \zeta^k \left\|\left[t^k - \lambda^k F\left(t^k\right)\right] - x^*\right\| \\
&\le \left(1-\zeta^k\right)\left\|t^k - x^*\right\| + \zeta^k \left\|\left[t^k - \lambda^k F\left(t^k\right)\right] - \left[x^* - \lambda^k F\left(x^*\right)\right]\right\| + \zeta^k \lambda^k \left\|F\left(x^*\right)\right\| \\
&\le \left[1-\zeta^k\left(1-\delta^k\right)\right]\left\|t^k - x^*\right\| + \zeta^k \lambda^k \left\|F\left(x^*\right)\right\| \\
&\le \left[1-\zeta^k\left(1-\delta^k\right)\right]\sqrt{\left\|w^k - x^*\right\|^2 - \gamma_{k,i_0}\left(1-\gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}\right)\left\|S_{i_0} w^k - w^k\right\|^2} \\
&\quad + \zeta^k \lambda^k \left\|F\left(x^*\right)\right\| \\
&\le \left[1-\zeta^k\left(1-\delta^k\right)\right]\left\|w^k - x^*\right\| + \zeta^k \lambda^k \left\|F\left(x^*\right)\right\| \\
&\le \left[1-\zeta^k\left(1-\delta^k\right)\right]\left(\left\|x^k - x^*\right\| + \zeta^k\right) + \zeta^k \lambda^k \left\|F\left(x^*\right)\right\| \\
&= \left[1-\zeta^k\left(1-\delta^k\right)\right]\left\|x^k - x^*\right\| + \zeta^k\left[1-\zeta^k\left(1-\delta^k\right)\right] + \zeta^k \lambda^k \left\|F\left(x^*\right)\right\|.
\end{aligned}
$$

Sử dụng điều kiện $a \in (0,1), \delta_k := \sqrt{1-2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2} < 1-a$ của (3.1) ta được

$$
\begin{aligned}
\left\|x^{k+1} - x^*\right\| &\le \left[1-\zeta^k\left(1-\delta^k\right)\right]\left\|x^k - x^*\right\| + \zeta^k\left[1-\zeta^k\left(1-\delta_k\right)\right] + \zeta^k \lambda^k \left\|F\left(x^*\right)\right\| \\
&\le \left(1-a\zeta^k\right)\left\|x^k - x^*\right\| + a\zeta^k \frac{1-a\zeta^k + \lambda^k \left\|F\left(x^*\right)\right\|}{a} \\
&\le \max\left\{\left\|x^k - x^*\right\|, M\right\} \\
&\le \max\left\{\left\|x^0 - x^*\right\|, M\right\}
\end{aligned}
$$

với $M = \sup\left\{\dfrac{1-a\zeta^k + \lambda^k \left\|F\left(x^*\right)\right\|}{a} : k = 1,2,...\right\} < +\infty$ được suy ra từ điều kiện (3.1).

Vì vậy dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Từ điều kiện $\lim_{k\to\infty}\zeta_k = 0$, (3.7) và (3.8) ta suy ra các dãy $\{w^k\},\{t^k\}$ đều bị chặn. Áp dụng bất đẳng thức

$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle, \forall x,y\in H,$ với $x = \left[t^k - \lambda^k F(t^k)\right] - \left[x^* - \lambda^k F(x^*)\right]$ và $y = \lambda^k F(x^*)$ ta thu được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1}-x^*\|^2 &= \left\|\left(1-\zeta^k\right)\left(t^k - x^*\right) + \zeta^k\left[t^k - \lambda^k F(t^k) - x^*\right]\right\|^2\\
&\le \left(1-\zeta^k\right)\|t^k - x^*\|^2 + \zeta^k\left\|t^k - \lambda^k F(t^k) - x^*\right\|^2\\
&= \left(1-\zeta^k\right)\|t^k - x^*\|^2 + \zeta^k\left\|\left[t^k - \lambda^k F(t^k) - \left(x^* - \lambda^k F(x^*)\right)\right] - \lambda^k F(x^*)\right\|^2\\
&\le \left(1-\zeta^k\right)\|t^k - x^*\|^2 + \zeta^k\left\|\left[t^k - \lambda^k F(t^k) - \left(x^* - \lambda^k F(x^*)\right)\right]\right\|^2\\
&\quad -2\zeta^k\lambda^k\left\langle F(x^*), x^{k+1}-x^*\right\rangle\\
&\le \left[1-\zeta^k\left(1-\left(\delta^k\right)^2\right)\right]\|t^k - x^*\|^2 - 2\zeta^k\lambda^k\left\langle F(x^*), x^{k+1}-x^*\right\rangle. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Kết hợp (3.7), (3.8) và (3.9) ta được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1}-x^*\|^2 &\le \left[1-\zeta^k\left(1-\left(\delta^k\right)^2\right)\right]\|t^k - x^*\|^2 - 2\zeta^k\lambda^k\left\langle F(x^*), x^{k+1}-x^*\right\rangle\\
&\le \left[1-\zeta^k\left(1-\left(\delta^k\right)^2\right)\right]\left\|w^k - \bar{x}\right\|^2 - \gamma_{k,i_0}\left(1-\gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}\right)\left\|S_{i_0}w^k - w^k\right\|^2\\
&\quad -2\zeta^k\lambda^k\left\langle F(x^*), x^{k+1}-x^*\right\rangle\\
&\le \left[1-\zeta^k\left(2\lambda^k\beta - \left(\lambda^k\right)^2L^2\right)\right]\|x^k - x^*\|^2 + \zeta^k\left(2\lambda^k\beta - \left(\lambda^k\right)^2L^2\right)\Gamma^k\\
&\quad -\gamma_{k,i_0}\left(1-\gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}\right)\left[1-\zeta^k\left(2\lambda^k\beta - \left(\lambda^k\right)^2L^2\right)\right]\left\|S_{i_0}w^k - w^k\right\|^2, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

trong đó

$$\Gamma^k = \frac{\zeta^k\left[1-\zeta^k\left(2\lambda^k\beta - \left(\lambda^k\right)^2L^2\right)\right]\left(2\|x^k - x^*\|^2 + \left(\zeta^k\right)^2\right)}{\lambda^k\left(2\beta - \lambda^k L^2\right)} - \frac{2\left\langle F(x^*), x^{k+1}-x^*\right\rangle}{2\beta - \lambda^k L^2}.$$

Từ dãy $\{x^k\}$ bị chặn và điều kiện (3.1), ta có

$\Gamma = \sup\left\{\Gamma^k : k = 1,2,...\right\} < +\infty.$

Do đó:

$$\left\|x^{k+1}-x^*\right\|^2 \le \left[1-\zeta^k\left(2\lambda^k\beta-\left(\lambda^k\right)^2 L^2\right)\right]\left\|x^k-x^*\right\|^2+\zeta^k\left(2\lambda^k\beta-\left(\lambda^k\right)^2 L^2\right)\Gamma$$
$$-\gamma_{k,i_0}\left(1-\gamma_{k,i_0}-\beta_{i_0}\right)\left[1-\zeta^k\left(2\lambda^k\beta-\left(\lambda^k\right)^2 L^2\right)\right]\left\|S_{i_0}w^k-w^k\right\|^2. \quad (3.11)$$

Tới đây, ta áp dụng Bổ đề 3.3 bằng cách đặt $a^k=\left\|x^k-x^*\right\|^2$. Ta xem xét hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** Tồn tại số $k_0$ sao cho $a^{k+1}<a^k$ với mọi $k\ge k_0$. Khi đó $\lim\limits_{k\to\infty}a^k=A<+\infty.$ Chuyển qua giới hạn biểu thức (3.11) khi $k\to\infty$, sử dụng $\lim\limits_{k\to\infty}\varsigma^k=0$ và điều kiện (3.1) ta thu được $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|S_{i_0}w^k-w^k\right\|=0$. Từ điều kiện $\gamma_{k,i}\in\left(\bar{b},b\right)\subset\left(0,1-\min\left\{\beta_i:i=\overline{1,N}\right\}\right)$ với mọi $k\in\mathbb{N}, i=\overline{1,N}$, ta có

$$0\le\bar{b}\left\|w^k-S_iw^k\right\|\le\gamma_{k,i}\left\|w^k-S_iw^k\right\|\le b\left\|w^k-S_{i_0}w^k\right\|\to 0,$$

suy ra $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|w^k-S_iw^k\right\|=0$ với mọi $i=\overline{1,N}$. Chọn dãy $\left\{x^{k_j}\right\}$ là dãy con của $\left\{x^k\right\}$ sao cho

$$\liminf_{k\to\infty}\left\langle F\left(x^*\right),x^{k+1}-x^*\right\rangle=\lim_{j\to\infty}\left\langle F\left(x^*\right),x^{k_j+1}-x^*\right\rangle.$$

Vì dãy $\left\{x^{k_j+1}\right\}$ bị chặn nên tồn tại một dãy con $\left\{x^{k_{j_h}}\right\}$ sao cho $\left\{x^{k_{j_h}+1}\right\}\rightharpoonup\bar{x}$ khi $h\to\infty$. Từ $S_i$ là nửa đóng tại $0$ với mọi $i=1,2,...,N$ ta thu được $\bar{x}\in\bigcap\limits_{i=1}^{N}Fix\left(S_i\right)$. Điều này dẫn đến: $\liminf\limits_{k\to\infty}\left\langle F\left(x^*\right),x^{k+1}-x^*\right\rangle=\lim\limits_{h\to\infty}\left\langle F\left(x^*\right),x^{k_{j_h}+1}-x^*\right\rangle=\left\langle F\left(x^*\right),\bar{x}-x^*\right\rangle\ge 0,$ hay $x^\star$ là nghiệm của bài toán $VI(\Omega,F)$. Từ điều kiện (3.1) và (3.10) ta có: $\limsup\limits_{k\to\infty}\Gamma^k\le 0.$ Kết hợp với Bổ đề 3.3, ta có $x^k\to x^*, khi\ k\to\infty.$

**Trường hợp 2:** Không tồn tại số $k_1$ sao cho $a^{k+1}<a^k$ với mọi $k\ge k_1$. Vậy phải tồn tại số $k_0$ sao cho $a^{k_0}<a^{k_0+1}$. Áp dụng Bổ đề 3.2, ta sử dụng dãy con $\left\{a^{\tau(k)}\right\}$ của $\left\{a^k\right\}$ như sau: $\tau\left(k\right)=\max\left\{i\in\mathbb{N}:k_0\le i\le k,\ a^i\le a^{i+1}\right\},\ \forall k\ge k_0.$

Khi đó, ta có $\tau\left(k\right)\nearrow+\infty,\ 0\le a^k\le a^{\tau(k)+1},\ a^{\tau(k)}\le a^{\tau(k)+1},\ \forall k\ge k_0.$ (3.12)

Do $\left\{a^{\tau(k)}\right\}$ là dãy tăng và bị chặn, nên tồn tại giới hạn $\lim\limits_{k\to\infty}a^{\tau(k)}=M<+\infty.$ Từ tính chất bị chặn của $\left\{x^{\tau(k)}\right\}$ tồn tại dãy con hội tụ yếu đến $\bar{x}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử

$x^{\tau(k)} \rightharpoonup \overline{x}$. Từ (3.11) và (3.12) ta có

$$\begin{aligned} a^{\tau(k)} &\le a^{\tau(k)+1} \\ &= \left\| x^{\tau(k)+1} - x^* \right\|^2 \\ &\le \left[ 1 - \zeta^{\tau(k)} \left( 2\lambda^{\tau(k)}\beta - \left(\lambda^{\tau(k)}\right)^2 L^2 \right) \right] a^{\tau(k)} + \zeta^{\tau(k)} \left( 2\lambda^{\tau(k)}\beta - \left(\lambda^{\tau(k)}\right)^2 L^2 \right) \Gamma \\ &\quad - \gamma_{\tau(k),i_0} \left( 1 - \gamma_{\tau(k),i_0} - \beta_{i_0} \right) \left[ 1 - \zeta^{\tau(k)} \left( 2\lambda^{\tau(k)}\beta - \left(\lambda^{\tau(k)}\right)^2 L^2 \right) \right] \left\| S_{i_0} w^{\tau(k)} - w^{\tau(k)} \right\|^2. \end{aligned}$$

Cho $k \to \infty$ và sử dụng $\lim\limits_{k\to\infty} a_{\tau(k)} = M$, ta được $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| S_{i_0} w^{\tau(k)} - w^{\tau(k)} \right\| = 0,$

do đó $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| S_i w^{\tau(k)} - w^{\tau(k)} \right\| = 0,\ \forall i = \overline{1,N}.$

Vì $S_i$ là nửa đóng nên $\overline{x} \in \Omega$ Tương tự trường hợp 1, ta cũng có

$\limsup\limits_{k\to\infty} \Gamma^{\tau(k)} \le 0$. (3.13)

Từ (3.10) ta có

$$\begin{aligned} a^{\tau(k)} &\le a^{\tau(k)+1} \\ &= \left\| x^{\tau(k)+1} - x^* \right\|^2 \\ &\le \left[ 1 - \zeta^{\tau(k)} \left( 2\lambda^{\tau(k)}\beta - \left(\lambda^{\tau(k)}\right)^2 L^2 \right) \right] a^{\tau(k)} + \zeta^{\tau(k)} \left( 2\lambda^{\tau(k)}\beta - \left(\lambda^{\tau(k)}\right)^2 L^2 \right) \Gamma^{\tau(k)}. \end{aligned}$$

Do đó: $0 \le a^{\tau(k)} \le \Gamma^{\tau(k)},\ \forall k \ge k_0,$ kết hợp với (3.13), ta được $\limsup\limits_{k\to\infty} a^{\tau(k)} = 0,$ suy ra $\lim\limits_{k\to\infty} a^{\tau(k)} = 0.$ Từ (3.12), $a^k \to 0$ khi $k \to \infty,$ hay $x^k \to x^*$ khi $k \to \infty,$ ta có điều phải chứng minh.

**4. KẾT LUẬN**

Thuật toán được đề xuất trong bài báo không cần sử dụng phép chiếu, mà chỉ sử dụng các kỹ thuật tính toán dạng hiển góp phần làm cải thiện tốc độ tính toán trên máy tính. Ngoài ra thuật toán của tôi áp dụng được cho các lớp bài toán rộng hơn lớp bài toán bất đẳng thức biến phân, chẳng hạn như với $N = 1$, chọn $S$ là ánh xạ đồng nhất, khi đó Bài toán (1.2) quay về bất đẳng thức biến phân thông thường.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO:**

**Tiếng Việt**

1. Phạm Ngọc Anh (2015), 'Các phương pháp tối ưu và ứng dụng', *NXB Thông tin và Truyền thông, Hà Nội.*

2. Nguyễn Văn Hiền, Lê Dũng Mưu và Nguyễn Hữu Điển (2018), 'Giáo trình Giải tích lồi ứng dụng', *NXB Đại học quốc gia Hà Nội*.

**Tiếng Anh**

3. P.N. Anh, N.X. Phuong, (2018), ‘A parallel extragradient-like projection method for unrelated variational inequalities and fixed point problems’, *J. Fixed Point Theory Appl.* **20(2)**, 1-17.

4. A. Beck, M. Teboulle, (2009), ‘A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems’, *SIAM J. Imaging Sciences* **2**, 183-202.

5. P.L. Combettes, V.R. Wajs, (2005), ‘Signal recovery by proximal forward-backward splitting, Multiscale Model’, *Simul.* **4**, 1168-1200.

6. X.P. Ding, Y.C. Lin, J.C. Yao, (2007), ‘Three-step relaxed hybrid steepest-descent methods for variational inequalities’, *Appl. Math. Mech.* **28**, 1029-1036.

7. Ph. Hartman, G. Stampacchia (1966), ‘On some non linear elliptic differential functional equations’, Acta Math., **115**, p. 271-310.

8. P. Jailoka, S. Suantai, A. Hanjing, (2021), ‘A fast viscosity forward-backward algorithm for convex minimization problems with an application in image recovery’, *Carpathian J. Math.* **37(3)**, 449-461.

9. P.E. Maing'e (2008), ‘A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems’, *SIAM J. Control Optim.,* **47,** 1499-1515.

10. S. Saejung, P. Yotkaew, (2012), ‘Approximation of zeros of inverse strongly monotone operators in Banach spaces’, *Nonlinear Analysis,* **75**, 724-750.

11. M.H. Xu, T.H. Kim, (2003), ‘Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalities’, *J. Optim. Theory Appl.* **119**, 185-201.

12. I. Yamada, (2001), ‘The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings’, *Stud. Comput. Math.* **8**, 473-504.

13. Yen-Cherng Lin (2008), ‘Finite-step relaxed hybrid steepest-descent methods for variational inequalities’, *J. Inequal. Appl.* **12**, 598-632.

14. L.C. Zeng, J.C. Yao, (2008), *Two step relaxed hybrid steepest-descent methods for variational inequalities.* J. Inequal. Appl. **7,** 598-632.