MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ VÀNH SEP

Lê Đức Thoang
Trường Đại học Phú Yên

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 20/04/2025
Ngày phản biện: 24/04/2025
Ngày duyệt đăng: 20/06/2025
**Tác giả chính: leducthoang@pyu.edu.vn*
DOI:https://doi.org/10.70879/azCdnqt2Y

Title:
Some results on sep rings.

Từ khóa:
nửa hoàn chỉnh, PF phải, nhúng cốt yếu
Keywords:
semiperfect, pseudo Frobenius, essential embeddable

***TÓM TẮT**: Một vành R được gọi là SEP phải nếu mọi R-môđun phải đơn được nhúng cốt yếu vào một R-môđun phải xạ ảnh. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh rằng vành R là PF phải khi và chỉ R là nửa hoàn chỉnh, SEP phải và* $E(R_R)$ *là xạ ảnh, đồng thời cũng thu được một số kết quả về vành SEP.*

***ABSTRACT**: A ring R is called right SEP if every simple right R-module is essentially embedded in a projective right R-module. In this paper, we prove that a ring R is right PF if and only if R is semiperfect, right SEP with is projective, some results on SEP rings are also obtained.*

1. Giới thiệu vấn đề nghiên cứu

Trong bài báo này, chúng ta luôn giả thiết vành R đã cho là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi R-môđun được xét là môđun unita. Ta viết M_R (hay M) để chỉ M là một R-môđun phải, kí hiệu $N \subseteq M$ để chỉ N là môđun con của M. Môđun con $N \subseteq M$ được gọi là cốt yếu trong M, nếu với mọi $A \subseteq M$, $N \cap A = 0$ thì phải có $A = 0$, kí hiệu $N \subseteq^{ess} M$; Môđun con $N \subseteq M$ được gọi là đối cốt yếu trong M, nếu với mọi $A \subseteq M$, $N + A = M$ thì phải có $A = M$, kí hiệu $N \subseteq^{sm} M$. Môđun con N được gọi là một hạng tử trực tiếp của M, nếu có môđun con $A \subseteq M$ thỏa mãn $A \cap N = 0, A + N = M$, khi đó ta viết $M = N \oplus A$, M được gọi là môđun không không phân tích được nếu M không có hạng tử trực tiếp khác không.

Môđun U_R được gọi là nội xạ, nếu với mỗi đồng cấu $f : A \longrightarrow U$ và mỗi đơn cấu $g : A \longrightarrow B$ của những R-môđun A, B bất kỳ, đều tồn tại đồng cấu $h : B \longrightarrow U$ sao cho $hg = f$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Môđun P_R được gọi là xạ ảnh nếu với mỗi đồng cấu $f : P \longrightarrow B$ và mỗi toàn cấu $g : A \longrightarrow B$ của những R-môđun A, B bất kỳ, tồn tại một đồng cấu $h : P \longrightarrow A$ sao cho $hg = f$, tức biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Khái niệm môđun là một mở rộng khái niệm không gian véc tơ, khi xét vành R thay cho trường vô hướng. Các khái niệm môđun nội xạ và xạ ảnh đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết môđun.

Nếu R-môđun phải Q là nội xạ và tồn tại đơn cấu cốt yếu $\alpha : M \longrightarrow Q$ ($\operatorname{Im}\alpha \subseteq^{ess} Q$), thì ta gọi Q là bao nội xạ của M, kí hiệu $Q = E(M)$. Nếu R-môđun phải P là xạ ảnh và tồn tại toàn cấu đối cốt yếu $p : P \longrightarrow M$ ($\operatorname{Ker} p \subseteq^{sm} P$) thì P được gọi là phủ xạ ảnh của M. Bao nội xạ của một môđun bất kỳ luôn tồn tại duy nhất sai khác một đẳng cấu, tuy nhiên phủ xạ ảnh của một môđun không phải lúc nào cũng có và nếu có là duy nhất sai khác một đẳng cấu.

Môđun A được gọi là đơn nếu A không có môđun con thực sự, hay nói cách khác A chỉ có hai môđun con tầm thường là 0 và A, môđun B được gọi là nửa đơn nếu B là tổng trực tiếp của các môđun con đơn. Ta gọi tổng tất cả các môđun con đơn của R-môđun phải M là đế của môđun M và kí hiệu là $soc(M)$; tổng của tất cả các môđun con đối cốt yếu của R-môđun phải M được gọi là căn của M, kí hiệu là $rad(M)$. Ta viết $J = J(R)$ để chỉ căn của vành R, ta có $J(R) = rad(R_R) = rad({}_R R)$ là một iđêan hai phía của vành R.

Vành R được gọi là địa phương nếu vành thương R/J là một thể, điều đó tương đương với R có duy nhất một iđêan phải (hoặc trái) cực đại; R được gọi là vành nửa địa phương nếu vành thương R/J là Artin nửa đơn.

Phần tử $e \in R$ được gọi là lũy đẳng nếu $e^2 = e$, lũy đẳng $e \in R$ được gọi là lũy đẳng địa phương nếu $eRe \cong End(eR)$ là vành địa phương. Hai phần tử lũy đẳng $e, f \in R$ gọi là trực giao nếu $ef = fe = 0$, ta gọi lũy đẳng $e \in R$ là nguyên thủy nếu eR (Re) là một môđun không phân tích được. Một tập các lũy đẳng $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset R$ được gọi là trực giao nếu e_i, e_j là trực giao với mọi $i \neq j$. Tập các lũy đẳng nguyên thủy trực giao $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset R$ được gọi là đầy đủ nếu $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1$.

Với I là một iđêan của R, phần tử lũy đẳng của vành thương $e + I \in R/I$ được gọi là nâng được theo modulo I, nếu tồn tại $f^2 = f \in R$ thỏa mãn $e - f \in I$. Vành R được gọi là vành nửa hoàn chỉnh nếu vành thương $R/rad(R)$ là vành nửa địa phương và mọi lũy đẳng của $R/rad(R)$ nâng được theo modulo $rad(R)$. Sau đây là một số đặc trưng của vành nửa hoàn chỉnh.

Định lý 1.1. [NY, Theorem B.9] *Các điều kiện sau đây là tương đương đối với vành R:*

1) *R là nửa hoàn chỉnh;*
2) *R/J là nửa đơn và mọi iđêan phải (trái) không chứa trong J đều chứa một lũy đẳng khác không ;*
3) *R không chứa một tập vô hạn các lũy đẳng trực giao và mọi iđêan phải (trái) không chứa trong J đều chứa một lũy đẳng khác không ;*
4) *R không chứa một tập vô hạn các lũy đẳng trực giao và mọi lũy đẳng nguyên thủy trong R đều là lũy đẳng địa phương ;*
5) *$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, trong đó e_i là các lũy đẳng địa phương và trực giao.*

Với vành nửa hoàn chỉnh R thì mọi R-môđun phải (trái) hữu hạn sinh đều có phủ xạ ảnh, tương đương với mọi R-môđun phải (trái) đơn đều có phủ xạ ảnh.

Khi nghiên cứu phân loại giữa môđun trung thành và vật sinh, tác giả Osofsky (xem [Osofsky]) đã định nghĩa một vành R là PF phải (pseudo Frobenius) nếu mọi R-mô đun phải trung thành đều là vật sinh (xem [BLO]). Hiện có nhiều đặc trưng của vành PF qua các điều kiện nội xạ và một số mở rộng của nó được đưa ra, sau đây là một số đặc trưng của vành PF.

Định lý 1.2. [NY, Theorem 1.56] *Các mệnh đề sau là tương đương đối một vành R:*

1) R là vành PF phải;

2) R là vành tự nội xạ phải và thỏa mãn $soc(R_R)$ là hữu hạn sinh và cốt yếu trong R_R;

3) R là vành nửa hoàn chỉnh, tự nội xạ phải và $soc(R_R) \subseteq^{ess} R_R$.

Từ Định lý 1.2 chúng ta thấy trên vành PF phải thì mỗi *R*-môđun phải đơn đều nhúng cốt yếu vào một môđun xạ ảnh. Đặt vấn đề ngược lại, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu đặc trưng vành PF phải qua điều kiện mỗi *R*-môđun phải đơn đều nhúng cốt yếu vào một môđun xạ ảnh.

Những khái niệm và kết quả cơ bản liên quan đến bài viết nhưng không được đề cập đến, chúng ta có thể tham khảo trong [AF] và [NY].

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

Lý thuyết vành QF (quasi Frobenius) có nguồn gốc từ lý thuyết biểu diễn nhóm hữu hạn, đó là lớp các vành Artin hai phía và mỗi iđêan một phía đều là một iđêan linh hóa tử hữu hạn sinh. Trên vành QF thì mỗi môđun trung thành đều là vật sinh. Sự phân loại giữa môđun trung thành và vật sinh trong phạm trù *R*-Mod (Mod_*R*), đã tạo ra các lớp vành tổng quát của vành QF. Năm 1966, tác giả Osofsky đã chứng tỏ tồn tại vành mà mọi môđun trung thành đều là vật sinh nhưng không phải là vành QF, và đã định nghĩa vành PF (pseudo Frobenius) phải (trái, tương ứng) là vành mà mọi *R*-môđun phải (trái, tương ứng) trung thành đều là vật sinh. Các vành PF được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, cấu trúc nội tại của vành PF cũng được mô tả, Định lý 1.2 là một trong các kết quả mô tả cấu trúc vành PF.

Các tác giả thường sử dụng phương pháp khảo sát tính chất nội tại (tính chất các phần tử, tính chất các iđêan,…) của vành để nghiên cứu cấu các lớp vành QF, PF. Ngoài ra, người ta cũng sử dụng phương pháp nghiên cứu tính chất của các lớp môđun trên vành để từ đó biết được cấu trúc của vành. Trong [JL], các tác giả đã đặc trưng lớp vành QF qua tính chất CEP. Trong bài báo này chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu cấu trúc vành PF qua tính chất của lớp môđun SEP (Định nghĩa 3.1) trên nó và thu được một số kết quả.

3. Kết quả nghiên cứu và bàn luận

Chúng tôi nêu định nghĩa về vành SEP, khái niệm vành SEP là một tổng quát hóa của khái niệm vành CEP (mọi *R*-môđun phải cyclic đều được nhúng cốt yếu vào một *R*-môđun xạ ảnh) đã được nghiên cứu trong [JL] và nhiều công trình khác.

Định nghĩa 3.1. Một vành *R* được gọi là *SEP phải* nếu mọi *R*-môđun phải đơn đều được nhúng cốt yếu vào một *R*-môđun xạ ảnh.

Như vậy, nếu *R* là vành SEP phải và *S* là một *R*-môđun phải đơn, thì tồn tại một mô đun xạ ảnh P_R và *R*-đơn cấu $f : S \longrightarrow P$ thỏa mãn $\operatorname{Im} f \subseteq^{ess} P$.

Hiển nhiên, mọi vành CEP đều là vành SEP, như vậy lớp các vành SEP là phong phú.

Ví dụ 3.2.

1) Xét vành đa thức $K[x]$ trên trường *K*, (x^2) là iđêan sinh bởi x^2. Khi đó, vành thương $R = K[x]/(x^2)$ là vành SEP. Thật vậy, các môđun đơn $K \cong K[x]/(x)$ nhúng cốt yếu được vào *R*.

2) Vành các số nguyên Z không là vành SEP. Thật vậy, các Z–môđun đẳng cấu với $\mathrm{Z}/p\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_p$, trong đó *p* là số nguyên tố. Dễ thấy, không tồn tại đơn cấu từ Z_p vào Z.

Mệnh đề sau đây cho ta một lớp các vành SEP.

Mệnh đề 3.3. *Giả sử R là vành PF phải, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là tập đầy đủ các lũy đẳng (nguyên thủy trực giao). Khi đó ta có:*

1) $R_R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR$, $soc(e_iR) \subseteq^{ess} e_iR$ với mọi $i = 1, \ldots, n$;

2) R là vành nửa hoàn chỉnh, SEP phải và trái.

Chứng minh:

1) Theo Định lý 1.2 ta có R là vành nửa hoàn chỉnh, tự nội xạ và $soc(R_R) \subseteq^{ess} R_R$. Áp dụng Định lý 1.1, ta có $R_R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR$. Vì R là tự nội xạ, các e_iR là không phân tích được nên suy ra các e_iR là đều và $soc(e_iR) \subseteq^{ess} e_iR$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.

2) Đánh số lại các lũy đẳng (nếu cần) để được $\{e_iR/e_iJ \mid i = 1, \ldots, k\}$ là tập đại diện các lớp đẳng cấu môđun đơn, và với $j > k$ thì tồn tại $i \in \{1, \ldots, k\}$ sao cho $e_jR \cong e_iR$ và $e_jR \cong e_iR \Leftrightarrow i = j$ với mọi $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ngoài ra, ta có $e_iR/e_iJ \cong e_jR/e_jJ$ khi và chỉ khi $e_iR \cong e_jR$ (xem [AF, Proposition 17.18]). Từ đó suy ra mọi R-môđun đơn đều nhúng cốt yếu trong một môđun xạ ảnh không phân tích được. Vậy R là vành SEP phải. Áp dụng [NY, Theorem 5.31] ta có $soc(Re_i) \subseteq^{ess} Re_i$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Lập luận tương tự như trên ta có R là vành SEP trái.

Tiếp theo, chúng ta nêu một ứng dụng đặc trưng vành PF phải qua điều kiện vành SEP phải. Kết quả Định lý Krull-Schmidt cần thiết trong phép chứng minh, để thuận tiện việc theo dõi, chúng ta nêu ra sau đây.

Bổ đề 3.4. *Giả sử R-môđun phải M có phân tích thành tổng trực tiếp các môđun không phân tích được $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$, trong đó vành các tự đồng cấu $End(M_i)$, $End(N_j)$ là vành địa phương, với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, với mọi $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Khi đó, $m = n$ và tồn tại phép thế σ của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ thỏa mãn $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Chứng minh: Xem [AF, Theorem 12.9].

Định lý 3.5. *Giả sử R là vành nửa hoàn chỉnh và SEP phải, P là một R-môđun phải xạ ảnh. Khi đó:*

1) $Soc(P) \subseteq^{ess} P$.

2) Nếu Q là một R-môđun phải xạ ảnh và thỏa mãn $Soc(Q) \cong Soc(P)$, thì $Q \cong P$.

Chứng minh:

1) Vì R là vành nửa hoàn chỉnh, ta có biểu diễn $R_R = e_1R \oplus e_2R \oplus \cdots \oplus e_nR$, trong đó $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là tập đầy đủ các lũy đẳng trực giao của R và $\mathrm{P} = \{e_1R, \ldots, e_kR\}$ ($k \le n$) là tập đại diện các lớp R-môđun xạ ảnh không phân tích được. Gọi $\mathrm{S} = \{S_1, \ldots, S_k\} = \{e_1R/e_1J, \ldots, e_kR/e_kJ\}$ là tập đại diện các lớp đẳng cấu R-môđun đơn. Với bất kỳ môđun đơn S_i, theo giả thiết tồn tại một R-môđun xạ ảnh P sao cho có đơn cấu $\phi_i : S_i \to P$ thỏa mãn $S \cong \phi(S_i) \subseteq^{ess} P$. Suy ra $\phi(S_i)$ là môđun đơn và P là môđun xạ ảnh không phân tích được, do đó $P \cong e_jR \in \mathrm{P}$ và $soc(P) \subseteq^{ess} P$. Hơn nữa, ta có $e_jR \cong e_iR$ khi và chỉ khi $e_jR/e_jJ \cong e_iR/e_iJ$. Như vậy ta có song ánh:

$$f : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{P}\ ,\ S_i \mapsto f(S_i) = e_jR .$$

Suy ra $soc(P) \subseteq^{ess} P$, với bất kỳ môđun xạ ảnh không phân tích được P.

Tiếp theo, ta xét P là mô đun xạ ảnh bất kỳ thỏa mãn $soc(P) \subseteq^{ess} P$. Vì R là vành nửa hoàn chỉnh nên tồn tại các tập chỉ số $A_i, i = 1, \ldots, k$ sao cho $P \cong \bigoplus_{i=1}^{k} (e_iR)^{(A_i)}$ (xem [AF, Proposition 27.10]).

Vì $soc\left(\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}(e_iR)^{(A_i)}\right)=\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}\left(soc(e_iR)\right)^{(A_i)}$ $\subseteq^{ess}\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}(e_iR)^{(A_i)}$, suy ra $Soc(P)\subseteq^{ess}P$.

2) Giả sử $Q=\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}(e_iR)^{(B_i)}$ thỏa mãn $Soc(Q)\cong Soc(P)$, ta có $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}\left(Soc(e_iR)\right)^{(B_i)}\cong\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}\left(Soc(e_iR)\right)^{(A_i)}$.

Áp dụng Bổ đề 3.4, ta có song ánh $\sigma: A_i\mapsto B_i$, $i=1,\ldots,k$. Từ đó suy ra $P\cong Q$.

Định lý sau đây cho ta đặc trưng vành PF qua điều kiện vành SEP.

Định lý 3.6. *Cho vành R bất kỳ, các phát biểu sau là tương đương:*

1) *R là PF phải;*
2) *R là nửa hoàn chỉnh, SEP phải và thỏa mãn $E(R_R)$ xạ ảnh.*

Chứng minh:

Với giả thiết 1), vành R là tự nội xạ nên $E(R_R)\cong R_R$ là xạ ảnh. Áp dụng Mệnh đề 3.3, ta được 1) $\Rightarrow$ 2).

Ngược lại, với giả thiết 2), áp dụng Định lý 3.5 ta có $soc(R_R)\subseteq^{ess}R_R$. Ngoài ra, do $R_R\subseteq^{ess}E(R_R)$, ta có $soc(E(R_R))\cong soc(R_R)$. Áp dụng Định lý 3.5 lần nữa ta được $E(R_R)\cong R_R$, và do đó R là vành tự nội xạ. Phép chứng minh 2) $\Rightarrow$ 1) được hoàn thành.

4. Kết luận

Bài báo đã đưa ra khái niệm vành SEP, các ví dụ và Mệnh đề 3.3 chứng tỏ lớp vành SEP phong phú để nghiên cứu, đặc trưng được lớp vành PF phải qua điều kiện vành SEP phải (Định lý 3.6).

Tài liệu tham hảo

1. [AF] F. W. Anderson and K. R. Fuller (1992), *Rings and categories of modules*, Second Edition, Graduate Text in Math., Vol. **13**, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
2. [HNK] Michiel Hazewinkel, Nadiya Gubareni and V. V. Kirichenko (2005), *Algebra, Rings and modules Volume 1*, Kluwer Academic Publishers.
3. [Kasch] F. Kasch (1982), Modules and rings, London Math. Soc. Mono. No. 17. New York: Academic Press.
4. [JL] S. K. Jain and S. R. Lospez-Permouth, *Rings whose cyclics Are Essentially Embeddable in projective modules,* J. of Algebra, Vol. **128**, No. 1 (1990).
5. [NY] W. K. Nicholson and M. F. Yousif (2003), *Quasi-Frobenius rings*, Cambridge Univ. Press.
6. [Osofsky] B. L. Osofsky (1966), *A generalization of quasi-Frobenius rings*, J. Algebra **4**, 373-387.