TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC KHÁNH HÒA
tapchikhoahoc@ukh.edu.vn

# MỘT CÁCH TIẾP CẬN GIẢNG DẠYHỌC PHẦN KHÔNG GIAN TOPO

**Lưu Xuân Thắng**

*Trường Đại học Khánh Hòa*

***Tóm tắt:***

*Không gian topo là một nội dung quan trọng của Giải tích hiện đại. Xét trong chương trình Toán học bậc đại học, nó liên quan mật thiết đến nhiều khái niệm trong đó có sự hội tụ và hàm liên tục. Đó là những khái niệm quan trọng được trình bày trong các học phần như Giải tích hàm một biến số, Giải tích hàm nhiều biến số cũng như Giải tích phức. Do đó, hầu hết các kết quả của không gian này là tổng quát hóa trên các không gian cụ thể. Trong bài viết này, cách tiếp cận trong giảng dạy học phần Không gian topo theo hướng từ không gian các số thực sẽ được phân tích. Các ví dụ điển hình và một số thảo luận cũng được trình bày.*

***Từ khóa:*** *Topo tổng quát, giảng dạy không gian topo, phương pháp giảng dạy*

## 1. Mở đầu

Theo [7], topo tổng quát được định hình một cách hoàn chỉnh vào nửa đầu thế kỷ XX. Nó là kết quả của một loạt các ý tưởng của những nhà toán học. Những người thuộc phong trào đi tìm những gì cơ bản nhất. Các khái niệm giới hạn và liên tục được tìm hiểu bởi các nhà toán học Hy Lạp từ khi họ cố gắng làm cho các khái niệm Số học được rõ ràng. Tuy nhiên, cho đến khi Cauchy (1821) và Abel (1823) xuất hiện thì các khái niệm về dãy và chuỗi hội tụ, khái niệm về hàm liên tục mới được đưa ra. Riemann (1851) người có quan điểm về bài toán mở rộng [7] trong bài giảng hoàn chỉnh Về các giả thuyết phục vụ cho cơ sở hình học. Ông đã vạch ra một chương trình đầy tham vọng. Đó là nghiên cứu một đối tượng mang tính phổ quát với số chiều bất kỳ như các không gian hàm và các tập. Tuy nhiên, chương trình này không thành công nếu chúng ta không có hiểu biết sâu hơn về đường thẳng thực nhờ đại diện là Dedekin và hàm số là Riemann, Weierstrass. Những đối tượng được phát biểu cả ngôn ngữ cụ thể và trừu tượng. Sau đó, Cantor (1873) người tạo ra ngôn ngữ này và đã mở ra cánh cửa để bước vào thế giới mới. Một thời kỳ đẹp đẽ và tráng lệ bắt đầu. Mặc dù ở phía ngược lại, những nhà toán học khác lại hướng đến những ý tưởng mới mẻ. Trào lưu này tại Pháp có Poincaré, Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue và tại Đức là Klein và Mittage-Leffler. Điều này nhanh chóng đưa việc nghiên cứu hàm trên đường thẳng thực và sáng tạo ra giải tích hàm gồm Ascoli, Volterra và Hilbert. Đó là bước đầu tiên trong quá trình hiện thực hóa chương trình Riemann. Nhưng lại một lần nữa cần có một ngôn ngữ cũng như nền tảng toán học phù hợp để nghiên cứu. Và không gian metric được định nghĩa bởi Fréchet. Nó cung cấp công cụ thiết yếu để nghiên cứu liên tục đều và hội tụ đều. Đồng thời, nó cũng thuận tiện cho việc nghiên cứu cấu trúc topo. Cuối cùng, Hausdoff thành công trong việc tìm ra các tiên đề. Và một hệ tiên đề đơn giản là nền móng của topo tổng quát ngày nay. Rõ ràng từ tiến trình lịch sử trên, chương trình Toán giải tích bậc đại học xây dựng nội dung và trình tự phù hợp với sự phát triển đó. Tức là, khi học đến không gian topo, người học đã hoàn tất các học phần Phép tính vi tích phân hàm một biến số cũng như nhiều biến số. Tuy nhiên, vì nhiều lí do khác nhau như thời lượng dành cho chương trình; ý tưởng của người viết hay đối tượng người đọc nên một số tài liệu về nội dung này có những cách tiếp cận khác nhau. Cụ thể, nội dung không gian topo sẽ được trình bày ngay sau khi giới thiệu không gian metric và các tính chất liên quan như trong [2], [3]. Cách tiếp cận này dựa vào việc nắm các kết quả trên không gian metric trước vì dễ kiểm chứng. Sau đó bằng con đường tổng quát hóa. Tác giả đã xây dựng các kiến thức liên quan đến không gian topo. Một con đường ngược lại, đó là nội dung của không gian topo và các tính chất liên quan sẽ được trình bày dưới một ngôn ngữ tổng quát. Sau đó, nội dung của không gian metric sẽ được trình bày như [4], [6] và [9].

Ngoài ra, một cách tiếp cận khác cũng được sử dụng làm nhẹ tính trừu tượng của không gian topo bằng cách trình bày topo trên đường thẳng thực mà các tác giả ở [7], [10] đã làm. Cách tiếp cận này có ưu điểm rõ rệt là các kiến thức ở các học phần trước đó được tái hiện và là nền tảng để phát biểu các kết quả trừu tượng hơn. Song trên tất cả, nếu nhìn nhận một cách kỹ càng, chúng ta có thể thấy rằng nếu kết hợp hai cách tiếp cận của các tác giả ở [2] và [7] đã làm sẽ có một cách tiếp cận xuyên suốt. Trong đó, từ các kết quả trên không gian đầy đủ R và metric thông thường sẽ là nền tảng để phát biểu các kết quả tương tự trên không gian metric bất kỳ. Sau đó, từ đây với việc xây dựng topo từ các hình cầu mở, ngay lập tức các khái niệm và tính chất của không gian topo cũng dần hiện rõ. Cách tiếp cận này còn có ưu điểm là phù hợp với tiến trình lịch sử phát triển của Giải tích toán học như đã trao đổi ở trên. Cách làm này đã được trình bày một phần trong [1]. Cấu trúc của phần tiếp theo sẽ là trình bày cách tiếp cận nội dung không gian topo lần lượt qua không gian các số thực và không gian metric. Và cuối cùng là một số trao đổi.

## 2. Cách tiếp cận

Như đã trình bày ở trên, trong phần này, xin phép sẽ trình bày nội dung không gian topo dựa trên không gian các số thực và không gian metric. Việc trình bày chi tiết từng kiến thức của các không gian này không thuộc nội dung của bài báo này. Thay vào đó, xin chỉ trình bày con đường tiếp cận thông qua những nội dung điển hình. Đầu tiên, Mục 2.1 sẽ là topo trên đường thẳng thực.

### *2.1. Topo trên đường thẳng thực*

Đường thẳng thực với những tập mở là những khoảng mở được xem là không gian topo đầu tiên trong chương trình Toán học giảng dạy ở bậc đại học. Ở một góc nhìn khác, nếu xem khoảng cách của hai số thực là một metric thì đây cũng là không gian metric đầy đủ đầu tiên mà người học được tiếp cận. Dù phần lớn các kết quả trên đó thường được trình bày với ngôn ngữ gần với ngôn ngữ của không gian metric với metric thông thường. Trước hết, xin được nhắc lại khái niệm quan trọng đầu tiên. Đó là sự hội tụ của một dãy số thực. Các khái niệm, tính chất và cả các chứng minh trong 2.1 có thể xem thêm trong [11], [12] hoặc [13].

Định nghĩa 1. Dãy số thực $(a_n)$ được gọi là hội tụ về a nếu và chỉ nếu với mỗi ε dương tồn tại số nguyên dương n0 sao cho với mọi số tự nhiên n lớn hơn n0 thì $|a_n - a| < \varepsilon$..

Khi đó, để chỉ dãy $(a_n)$ hội tụ về a người ta còn ký hiệu $a_n \to a$ khi n dần ra vô cùng hoặc lim $a_n$ = a.

Định nghĩa trên còn được viết lại một cách hình thứcnhư sau: an → a nếu và chỉ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists n0(\varepsilon) \in N\ \forall n \in N, n > n0 \to |a_n - a| < \varepsilon$ . Việc hiểu định nghĩa theo cách viết trên là cần thiết vì trong nhiều trường hợp các chứng minh đều xuất phát từ đây. Tiếp theo là ví dụ về một dãy hội tụ.

**Ví dụ 1**. Cho dãy $(a_n)$ được xác định như sau $a_n = 1/n$ với mỗi $n \in N$. Khi đó, $(a_n)$ hội tụ về 0.

Sau đây là một kết quả thường được sử dụng để các chứng minh gọn gàng hơn. Cụ thể

**Ví dụ 2**. Nếu dãy $a_n \to a$ thì dãy $|a_n - a|$ hội tụ về 0.

Về tính duy nhất của giới hạn dãy số được phát biểu như sau

**Ví dụ 3**. Cho $(a^n)$ là một dãy số thực. Chứng minh rằng nếu dãy an hội tụ về a thì giới hạn đó là duy nhất. Nội dung này được trình bày trong hầu hết các tài liệu về Giải tích hàm một biến. Ở đây, việc hiểu chứng minh cũng không khó khăn. Tuy nhiên, vẫn xin phép được trình bày ý tưởng vì điều này được sử dụng trong một không gian trừu tượng hơn là không gian metric. Cụ thể, theo cách chứng minh tính duy nhất. Ta có thể giả sử rằng an → a và an → a' . Sau đó, chỉ ra rằng a = a' . Thật vậy, vì $0 \le |a - a'| \le |a - an| + |an - a'|$ . Cho $n \to \infty$, khi đó $|a - a'| = 0$. Tức là a = a'. Ví dụ tiếp sau đây là về tính liên tục của hàm giá trị tuyệt đối.

**Ví dụ 4**. Cho dãy $a_n \to a$ và $b_n \to b$. Chứng minh rằng dãy $|a_n - b_n|$ hội tụ về $|a - b|$.

Dựa vào bất đẳng thức tam giác cho trường hợp bốn biến sẽ chứng minh được bất đẳng thức sau

$||a_n - b_n| - |a - b|| \le |a_n - a| + |b_n - b|$. Sau đó, cho $n \to \infty$, ta có điều phải chứng minh.

Tiếp theo, ta xét định nghĩa của một dãy bị chặn.

Định nghĩa 2. Dãy $(a_n)$ được gọi là bị chặn trong R nếu và chỉ nếu tồn tại một số dương M sao cho $|a_n| \le M, \forall n \in N$.

Và định nghĩa về dãy cơ bản hay còn gọi là dãy Cauchy.

Định nghĩa 3. Dãy $(a_n)$ được gọi là dãy Cauchy nếu và chỉ nếu với mỗi dương, tồn tại một số dương $n_0$ sao cho $|a_m - a_n| < \varepsilon, \forall m,n > n_0$.

Mối quan hệ giữa dãy Cauchy là dãy hội tụ được cho bởi kết quả sau đây.

Ví dụ 5. Mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy.

Về ý tưởng chứng minh gồm hai bước. Thứ nhất làchọn $n_0$ và còn lại là chỉ ra $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Dựa vào giả thiết $(a_n)$ là dãy hội tụ. Khi đó, $\forall\ \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \in N, \forall n \in N, n > n_1 \to |a_n - a| < \varepsilon_1$ . Sau đó, áp dụng tương tự với dãy $(a_m)$, ta cũng có $\forall\ \varepsilon_2 > 0, \exists n_2 \in N, \forall m \in N, m > n_2 \to |a_m - a| < \varepsilon_2$. Kết hợp với kết luận, ta chỉ cần chọn $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ và $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$ . Việc trình bàychi tiết có thể xem [12], [13].

Như chúng ta đã biết, một dãy Cauchy trong R là một dãy hội tụ. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát thì câu trả lời này chỉ đúng khi không gian đang xét là không gian đầy đủ.

Tiếp theo, giữa dãy Cauchy và dãy bị chặn có mối quan hệ sau.

Ví dụ 6. Mọi dãy Cauchy đều là dãy bị chặn.

Vì (an) là dãy Cauchy nên ta có $\varepsilon = 1$, $\exists k \in N, n,m > k \to |a_n - a_m| < 1$. Cụ thể, chọn $n = k+1 = l$ thì suy ra $|a_l - a_m| < 1$. Suy ra, $a_l - 1 < a_m < a_l + 1$. Đặt $\alpha = \max\{a_1,a_2,a_3,...,a_l,a_l+1\}$ và $\beta = \min\{a_1,a_2,a_3,...,a_l,a_l-1\}$. Rõ ràng $\beta < a_n < \alpha$, $\forall n \in N$. Đặt $M = \max\{|\beta|, |\alpha|\}$. Khi đó, suy ra $|a_n| < M$, $\forall n \in N$.

Từ kết quả này và kết quả của Ví dụ 5 dẫn đến kếtquả mọi dãy hội tụ đều bị chặn. Tất nhiên, ta có thể sử dụng cách chứng minh trong Ví dụ 6 để có ngay kết quả. Chiều ngược lại, một dãy bị chặn không hẳn là một dãy hội tụ. Cụ thể, có thể chọn dãy $(a_n)$ với $a_n = (-1)^n$.

Sau sự hội tụ của một dãy số thực, nội dung tiếp theo là hàm liên tục. Xin được nhắc lại định nghĩa hàm liên tục tại một điểm.

Định nghĩa 4. Hàm $f : R \to R$ liên tục tại điểm $x_0$ nếu và chỉ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|x - x_0| < \delta$ kéo theo $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Hàm f được gọi là hàm liên tục nếu nó liên tục tại mọi điểm. Sau đây là một phát biểu tương đương về hàm f liên tục tại điểm $x_0$.

Định nghĩa 5. Hàm $f : R \to R$ liên tục tại điểm $x_0$ nếu và chỉ nếu với mỗi dãy $x_n$ hội tụ về $x_0$ thì $f(x_n)$ hội tụ về $f(x_0)$.

Dựa vào định nghĩa này, rõ ràng nếu xem phép toán lim như một ánh xạ thì giữa lim và ánh xạ f ở đây đảm bảo tính chất giao hoán. Ví dụ $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Hay một cách tổng quát hơn theo định nghĩa 4, kết quả trên được viết lại $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$

Do đó, để kiểm tra tính liên tục của hàm f tại $x_0$, người ta còn dùng tiêu chuẩn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

Tính chất giao hoán là một tính chất quan trọng của các phép toán xét trong cấu trúc đại số nào đó. Và chính điều này, giúp giải tích phát triển một số khái niệm hoặc công cụ nhằm đạt được tính chất này. Ta có thể lấy câu hỏi về đẳng thức sau như một ví dụ điển hình.

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx.$$

Để trả lời câu hỏi đó, khái niệm hội tụ đều được đề cập. Trong một ngữ cảnh khác, nếu hàm $f_n$ hội tụ điểm thì người ta phải xây dựng khái niệm mới. Đó là tích phân Lebesgue. Sau đây là một ví dụ về hàm liên tục tại một điểm.

Ví dụ 7. Hàm $f : R \to R$ với $f(x) = 2x$ liên tục tại điểm $x = 3$.

Ta có $|f(x) - f(3)| = |2x - 6| = 2|x - 3|$. Do đó, chỉ cần chọn $\delta = \varepsilon/2$ ta có điều phải chứng minh.

Một cách tiếp cận khác đó là sử dụng tính chất 1. Khi đó, rõ ràng

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x) = 2\lim_{x\to 3}(x) = 6 = f(3).$$

Vậy hàm f liên tục tại $x = 3$. Và cách làm này thường được sử dụng trong các bài tập cụ thể.

Trong phần tiếp theo, một khái niệm mạnh hơn khái niệm hàm liên tục được đề cập. Đó là hàm liên tục đều. Sau đây là khái niệm

Định nghĩa 6. Hàm $f : X \subset R \to R$ là hàm liên tục đều trên X nếu và chỉ nếu với mỗi dương, tồn tại $\delta$ dương sao cho với mọi $x,y \in X$ và $|x - y| < \delta$ thì $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Qua đó, dễ thấy một hàm liên tục đều thì hàm đó cũng liên tục điểm. Điều ngược lại nhìn chung là không có. Sự khác biệt giữa khái niệm hàm liên tục và hàm liên tục đều là ở chỗ chọn $\delta$. Trong khi, ở Định nghĩa 4, $\delta$ được chọn phụ thuộc vào $x_0$ và $\varepsilon$ thì ở Định nghĩa 6 $\delta$ được chọn hoàn toàn độc lập với $x_0$. Để rõ hơn, quay trở lại hàm f được định nghĩa trong Ví dụ 7. Đó là hàm $f(x) = 2x$.

Giả sử, xét tính liên tục của hàm f tại $x_0 = 1$ và lấy $= 0.1$. Khi đó, để $|f(x) - f(x_0)| < 0.1$ thì $\delta = 0.05$.

Tương tự, khi $x_0 = 0.1$ và lấy $\varepsilon = 0.1$ thì $\delta$ phải chọn vẫn là 0.05. Tức là sự lựa chọn $\delta$ hoàn toàn độc lập với vị trí của $x_0$. Những hàm f như vậy chính là hàm liên tục đều.

Để rõ hơn, xét hàm g được định nghĩa như sau: $g : (0;2) \to R$ với $g(x) = 1/x$. Giả sử, xét tính liên tục tại $x_0 = 1$ và lấy $\varepsilon = 0.1$. Khi đó, để $|g(x) - g(x_0)| < 0.1$ thì $\delta = 1/11$. Tuy nhiên, khi $x_0 = 0.1$ và lấy $\varepsilon = 0.1$ thì $\delta$ phải chọn lại là 1/1010. Tức là sự lựa chọn $\delta$ phụ thuộc với vị trí của $x_0$. Rõ ràng, khi $x_0$ càng gần 0 thì tính ổn định của g càng trở nên yếu hơn. Những hàm g như trên chỉ là hàm liên tục mà không là hàm liên tục đều trên khoảng (0;2).

Việc nghiên cứu hàm liên tục đều là vì nó sẽ có những tính chất mà ở hàm liên tục không thể có được [14]. Cụ thể, hàm f liên tục đều sẽ biến một dãy Cauchy thành một dãy Cauchy. Trong khi đó hàm liên tục lại không có tính chất này. Ví dụ: xét hàm g ở trên và dãy 1/n trong (0;2). Bên cạnh đó, hàm liên tục đều còn biến một tập bị chặn thành một tập bị chặn. Đối với hàm liên tục thì điều này cũng không có tính chất này. Để minh họa có thể lấy hàm g trên (0;2). Khi đó, rõ ràng g(x) dần ra vô cùng khi x dần về 0. Tuy nhiên, có một điều quan trọng là từ một hàm liên tục ta sẽ có một hàm liên tục đều nếu thu hẹp hoặc mở rộng ánh xạ đó trên tập đóng và bị chặn. Cụ thể, ta xin phát biểu lại kết quả sau đây

Mệnh đề 1. Cho $a < b$ là các số thực, và cho hàm $f : [a; b] \to R$ là hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó $f$ là hàm liên tục đều.

Nếu quan sát lại quá trình từ đầu, rõ ràng từ sự hội tụ của một dãy số thực đã hình thành nên khái niệm liên tục của một hàm. Vì về cơ bản, ảnh của một dãy hội tụ qua ánh xạ liên tục là một dãy hội tụ. Mở rộng khái niệm hội tụ qua hàm sẽ dẫn đến khái niệm hội tụ điểm và hội tụ đều. Sau đây là là các định nghĩa

Định nghĩa 7. Cho dãy hàm $f_n : R \to R, n \in N$ và hàm $f : R \to R$. Dãy hàm $f_n$ được gọi là hội tụ điểm đến hàm $f$ nếu và chỉ nếu với mỗi $x \in R$ và với mỗi dương, tồn tại số nguyên dương $n_0$ sao cho với mọi số dương $n$ và $n > n_0$ thì $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Sau đây là một ví dụ về dãy hàm hội tụ điểm.

Ví dụ 8. Cho $f_n : [0;1] \to R$ xác định bởi $f_n(x) = x^n$, và hàm $f : [0;1] \to R$ được xác định bởi $f(x) = 1$ khi $x = 1$ và $f(x) = 0$ khi $0 \leq x < 1$. Khi đó, rõ ràng theo Định nghĩa 7 thì hàm $f_n$ hội tụ điểm đến $f$ .

Để rõ hơn, giả sử rằng với $x = 1/2$ và $\varepsilon = 0.1$. Khi đó, ần chỉ ra $n_0$ để $|f_n(1/2) - f(1/2)| = (1/2)^n - 0 < 0.1$

Từ đây chỉ ra rằng $n_0 = 4$ là giá trị cần tìm. Tương tự, khi $x = 1/8$ và $\varepsilon$ như trên thì $n_0 = 2$. Qua đây cho ta thấy rằng giá trị của $n_0$ không chỉ phụ thuộc vào $\varepsilon$ mà còn phụ thuộc vào giá trị của $x_0$.

Dãy hàm $f_n$ ở trên là một dãy hàm liên tục. Dãy này hội tụ điểm về hàm $f$ . Thế nhưng, lúc này hàm $f$ lại không là hàm liên tục. Tức là hội tụ điểm không đảm bảo tính liên tục của hàm qua phép toán giới hạn. Điều này là do hội tụ điểm không có tính giao hoán của hai phép toán giới hạn. Cụ thể, $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Tuy nhiên, kết quả này sẽ được cải thiện nếu như hội tụ điểm được thay bằng hội tụ đều. Sau đây là khái niệm

Định nghĩa 8. Cho dãy hàm $f_n : R \to R, n \in N$ và hàm $f : R \to R$. Dãy hàm $f_n$ được gọi là hội tụ đều đến hàm $f$ nếu và chỉ nếu với mỗi $\varepsilon$ dương, tồn tại số nguyên dương $n_0$ sao cho với mọi số dương $n$ và $n > n_0$ thì $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in R$.

Xét ví dụ về dãy hàm hội tụ đều.

Ví dụ 9. Cho $f_n : [0;1] \to R$ xác định bởi $f_n(x) = x/n$ , và hàm $f : [0;1] \to R$ được xác định bởi $f(x) = 0$. Khi đó, rõ ràng theo định nghĩa 8 thì hàm $f_n$ hội tụ đều đến $f$.

Cụ thể, việc chọn $n_0$ hoàn toàn độc lập với $x_0$. Thật vậy, giả sử rằng với $\varepsilon = 0.1$. Khi đó, cần chỉ ra $n_0$ để $|f_n(x) - f(x)| = |x/n - 0| < 0.1$. Vì $x/n < 1/n$ với mọi $x \in [0;1]$ nên $n_0 = 11$ là giá trị cần tìm. Tuy nhiên, nếu chúng ta mở rộng tập xác định của hàm $f_n$ và $f$ lên tập $R$ thì ngay lập tức dãy hàm $f_n$ chỉ là hội tụ điểm đến $f$ .

Qua các Định nghĩa 7 về dãy hàm hội tụ điểm , Định nghĩa 8 về dãy hàm hội tụ đều và các Ví dụ 8, 9 dễ thấy rằng một dãy hàm $f_n$ hội tụ đều đến $f$ thì $f_n$ sẽ hội tụ điểm đến $f$ . Chiều ngược lại, nhìn chung không đúng. Ở một góc nhìn rộng hơn, hai loại hội tụ này là do topo sinh bởi hai metric khác nhau trên R.

Điều đặc biệt, các kết quả trên R sẽ được mở rộng trên không gian tổng quát hơn. Đó là không gian met- ric. Nơi mà khoảng cách giữa hai điểm trên đường thẳng thực $x$ và $y$ là $|x - y|$ được thay bằng khoảng cách trừu tượng $d(x,y)$. Ở đó, với khoảng cách mới này, các tính chất của $|x - y|$ vẫn được giữ nguyên. Theo mạch ấy, các kết quả về từ dãy hội tụ, dãy Cauchy cho đến hàm liên tục, sự hội tụ của dãy hàm trong không gian metric được hình thành một cách tương tự. Và thật thú vị là cách chứng minh các tính chất ấy cũng không có quá nhiều khác biệt. Đó là nội dung của phần tiếp theo.

### *2.2. Không gian metric*

Quan sát từ kết quả của khoảng cách giữa hai số thực trên R là $|x - y|$, dễ thấy rằng nó có các tính chất sau đây

i. $|x - y| \geq 0$, với mọi $x,y \in X$; $|x - y| = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

ii. $|x - y| = |y - x|$ với mọi $x,y \in X$

iii. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ với mọi $x,y,z \in X$

Bằng cách thay $|x - y|$ bằng khoảng cách trừu tượng $d(x,y)$, với tập $X$ khác rỗng, không gian metric được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 9. Ánh xạ $d : X \times X \to R$ là một metric (khoảng cách) trên $X$ nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau đây:

i. $d(x,y) \geq 0$, với mọi $x,y \in X$; $d(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

ii. $d(x,y) = d(y,x)$ với mọi $x,y \in X$.

iii. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ với mọi $x,y,z \in X$.

Khi đó tập $X$ cùng metric $d$ đã cho được gọi là một không gian metric và kí hiệu là $(X,d)$. Như đã nói ở trên, không khó để kiểm tra ví dụ sau đây là một không gian metric.

Ví dụ10. Xét X = R, và $d(x,y) = |x - y|$ với mọi $x,y \in X$. Khi đó, (X,d) là một không gian metric.

Khoảng cách là một khái niệm quan trọng nhằm xây dựng định nghĩa của giới hạn. Điều này đã được chỉ rõ trong phần topo trên đường thẳng thực. Giờ đây, khoảng cách được định nghĩa trong những không gian trừu tượng hơn. Song mục tiêu cũng là để có thể kế thừa các tính chất có sẵn trên R. Phần sau đây sẽ là các định nghĩa và tính chất tương ứng trên không gian X và metric d. Thật ra, ở đây họ chỉ thay không gian R bằng X và khoảng cách trị tuyệt đối $|x - y|$ bằng metric d(x,y).

Định nghĩa 10. Dãy $(x_n)$ hội tụ đến $x_0$ trong không (X,d) nếu và chỉ nếu với mỗi ε dương, tồn tại số nguyên $n_0$, sao cho với mọi số nguyên n và $n \geq n_0$ thì $d(x_n,x_o) < \varepsilon$.

Một cách hình thức của định nghĩa trên có thể viết lại như sau. Dãy $(x_n)$ hội tụ về $x_0$ nếu và chỉ nếu $\forall\ \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N : \forall n \in N, n \geq n_o \rightarrow d(x_n,x_o) < \varepsilon$ . Một ví dụ về dãy hội tụ trong không gian metric chính là ví dụ 1. Sau đây, là một số ví dụ khác.

Ví dụ 11. Xét không gian $R^k$ và metric Euclid d. Khi đó dãy $(x_n)$ trong $R^k$ hội tụ về $x_0$ khi và chỉ khi $d(x_n,x_0) < \varepsilon$. Tức là $d(x_n,x_0) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Điều này suy ra

Vậy sự hội tụ của một dãy trong $R^k$ với metric thông thường chính là sự hội tụ theo tọa độ của dãy đó. Đặc biệt với k = 1 thì đây là sự hội tụ của một dãy số thực thông thường

Ví dụ 12. Xét không gian các hàm liên tục trên đoạn [a,b], kí hiệu là $C_{[a,b]}$ và metric

$$d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| .$$

Khi đó dãy $(x_n)$ (dãy hàm) hội tụ về $x_0$ trong $C_{[a,b]}$ tức là $d(x_n,x_0) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Hay

$$d(x_n,x_0) = \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| \rightarrow 0$$

Khi $n \rightarrow \infty$. Từ đó suy ra với mỗi ε dương, tồn tại số nguyên dương $n_0$ sao cho với mọi số nguyên $n \geq n_0$ : $|x_n(t) - x_0(t)| <$ , $\forall t \in [a,b]$. Đây chính là định nghĩa của sự hội tụ đều của một dãy hàm trên tập [a,b] trong 8. Như vậy sự hội tụ trong không gian metric $C_{[a,b]}$ chính là sự hội tụ đều.

Từ Ví dụ 2, ta sẽ có kết quả tương ứng sau đây.

Ví dụ 13. Dãy $(a_n)$ hội tụ về a trong không gian (X,d) thì dãy $d(a_n,a)$ hội tụ về 0.

Tiếp theo, từ Ví dụ 3 ta cũng có một kết quả về tính duy nhất của giới hạn của một dãy hội tụ trong không metric X.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng trong không gian metric (X,d) nếu dãy $(x_n)$ hội tụ đến $x_0$ thì giới hạn $x_0$ là duy nhất

Việc chứng minh tương tự như trong Ví dụ 3. Giả sử rằng $x_n \rightarrow x_0$ và $x_n \rightarrow x_1$. Ta sẽ chứng minh $x_0 = x_1$. Để làm được điều này, chúng ta sử dụng biến đổi như sau: $0 \leq d(x_0,x_1) \leq d(x_0,x_n)+ d(x_n,x_1)$. Nhờ điều này, việc chứng minh đối với người học thì khó khăn sẽ giảm đi.

Tính duy nhất của giới hạn của một dãy trong R cũng như trong không gian metric X được đảm bảo là do tính tách được của topo tương ứng trên không gian đó (xem [5], [7], [9]). Cụ thể, trên R với metric thông thường thì topo được sinh ra bởi metric đó là tách được. Ở đây, tính tách được hiểu là với hai điểm bất kỳ x,y thì luôn có hai khoảng mở rời nhau lần lượt chứa x và y. Nếu topo thông thường được thay bằng topo tầm thường. Đó là T = {Ø, R} thì rõ ràng một dãy hội tụ có thể có nhiều điểm giới hạn. Đối với không gian metric, với hai điểm bất kỳ x,y. Khi đó, hai lân cận để tách chúng lần lượt là B( x,d(x,y)/2) và B ( y,d(x,y)/2 với B được định nghĩa như trong Định nghĩa 20. Điều này sẽ được làm sáng tỏ khi sang phần không gian topo.

Một cách tương tự từ Ví dụ 4 trên R ta sẽ có kết quả trên không gian metric X bất kỳ như sau.

Ví dụ 15. Cho dãy $x_n \rightarrow x$ và dãy $y_n \rightarrow y$ trong X. Chứng minh rằng dãy $d(x_n,y_n) \rightarrow d(x,y)$.

Việc chứng minh bài toán này là dựa vào kỹ thuật đã trình bày ở ví dụ 4. Cụ thể, sử dụng bất đẳng thức $|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y_n,y)$ ta sẽ có kết quả.

Trong mạch kiến thức như vậy, liệu kết quả về phép toán giới hạn của một tổng hay một tích trong không gian metric tổng quát có như trên R? Câu trả lời là không. Điều này là do sự đẹp đẽ của không gian các số thực. Ở đó, R không chỉ mang cấu trúc của không gian metric mà nó còn mang cấu trúc đại số. Cụ thể, ở đây (R, +, ×) là một không gian vector. Chính vì vậy mà các kết quả về giới hạn của một tổng hay một tích không còn trong không gian metric tổng quát. Tuy nhiên, kết quả về hàm liên tục tại một điểm, hàm liên tục và hàm liên tục đều chính là sự tổng quát hóa từ các Định nghĩa 4, 6 trên R. Cụ thể, ta có như sau.

Định nghĩa 11. Cho $(X,d_X)$ và $(Y,d_Y)$ là các không gian metric. Hàm $f : (X,d_X) \rightarrow (Y,d_Y)$ là hàm liên tục tại điểm $x_0$ nếu và chỉ nếu với mỗi ε dương, tồn tại δ dương sao cho với bất kỳ x thuộc X và $d_X(x,x_0) < \delta$ kéo theo $d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$.

Ví dụ về hàm liên tục tại một điểm xin xem ví dụ 7. Khi đó, khái niệm hàm liên tục trên một tập $E \subset X$ là hàm liên tục tại mọi điểm $x \in E$. Một cách hình thức có thể viết như sau $(\forall x \in E)(\forall \ \varepsilon > 0)(\delta > 0) : (d_X(x,y) < \delta) \rightarrow (d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon)$.

Mở rộng từ Định nghĩa 6, chúng ta có định nghĩa hàm liên tục đều trên không gian metric.

Định nghĩa 12. Hàm $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ là hàm liên tục đều trên $E \subset X$ nếu và chỉ nếu với mỗi ε dương, tồn tại δ dương sao cho với bất kỳ x,y thuộc E và $d_X(x,y) < \delta$ kéo theo $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Theo hai định nghĩa 11, 12, rõ ràng hàm liên tục đều chính là hàm liên tục. Chiều ngược lại nhìn chung không đúng. Trong không gian các số thực, hàm liên tục sẽ là hàm liên tục đều nếu xét trên tập compact. Cụ thể, trong R tập compact chính là tập đóng và bị chặn. Tuy nhiên, trong không gian vô hạn chiều thì tập compact được hiểu là tập đóng và hoàn toàn bị chặn. Thật ra, khái niệm liên tục đều được hình thành cho ánh xạ từ không gian nhóm topo vào không gian metric hay ngược lại. Một ví dụ khác về khái niệm liên tục đều được định hình trên tập hợp có cấu trúc đều. Mà không gian metric và các nhóm topo là hai ví dụ quan trọng của các cấu trúc đều như vậy (xem [7], [14]).

Trở lại tính chất của một dãy hội tụ. Ngoài tính duy nhất của giới hạn thì trong không gian metric cũng có một kết quả tương tự như không gian R. Trước tiên, dãy Cauchy trong không gian metric được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 13. Một dãy $(x_n)$ là dãy Cauchy trong không gian metric (X,d) nếu và chỉ nếu với mỗi ε dương, tồn tại số nguyên dương $n_0$ sao cho với mọi số nguyên dương $m,n > n_0$ thì $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Định nghĩa trên hoàn toàn giống Định nghĩa 3 trên R và chúng ta chỉ thay $|x_m - x_n|$ bởi $d(x_m, x_n)$. Và sau đây là một kết quả mà chứng minh của nó hoàn toàn giống cách tiếp cận đã nêu trong Ví dụ 5. Kết quả đó được cho bởi ví dụ sau.

Ví dụ 16. Mọi dãy hội tụ trong không gian metric đều là dãy Cauchy. Điều ngược lại chỉ đúng trong trường hợp không gian metric đó là một không đầy đủ. Vấn đề đặt ra là liệu một dãy Cauchy có bị chặn trong không gian metric hay không? Câu trả lời là có. Tuy nhiên, để nói về điều này. Người ta cần một khái niệm về dãy bị chặn. Một khái niệm được tổng quát hóa nhờ khái niệm dãy bị chặn trong R. Trở lại với vấn đề dãy số thực bị chặn trong định nghĩa 2. Khi đó, (an) được gọi là dãy bị chặn khi tồn tại số $M > 0$ sao cho $|a_n| < M$, $\forall n \in N$. Nói cách khác, $-M < a_n < M$, $\forall n \in N$. Suy ra, $a_n \in (-M, M)$, $\forall n \in N$. Đến đây, ta trở lại khái niệm hình cầu mở trên R.

Định nghĩa 14. Cho $a \in R$ và r là một số dương bất kỳ. Khi đó, $B(a,r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$ được gọi là hình cầu mở tâm a, bán kính r.

Trường hợp $a = 0$ và $r = 1$ thì $B(0, 1)$ được gọi là hình cầu đơn vị. Tương tự, khái niệm hình cầu đóng và mặt cầu lần lượt được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 15. Cho $a \in R$ và r là một số dương bất kỳ. Khi đó, $B(a,r) = \{x \in R : |x - a| \leq r\}$

được gọi là hình cầu đóng tâm a, bán kính r.

Và mặt cầu

Định nghĩa 16. Cho $a \in R$ và r là một số dương bất kỳ. Khi đó, $S(a,r) = \{x \in R : |x - a| = r\}$ được gọi là mặt cầu tâm a, bán kính r.

Khi đó, một dãy bị chặn có thể định nghĩa lại như sau. Dãy $(a_n)$ được gọi là bị chặn trong R nếu và chỉ nếu tồn tại hình cầu sao cho $a_n \in B(0,M)$, $\forall n \in N$. hình cầu trong trường hợp này có thể là một $B(a,N)$ với tâm a và bán kính N nào đó chứ không nhất thiết là $B(0,M)$. Bằng ngôn ngữ như vậy, chúng ta có thể trở lại trả lời câu hỏi về tính bị chặn và dãy Cauchy.

Ví dụ 17. Mọi dãy Cauchy trong không gian metric đều bị chặn.

Cách chứng minh hoàn toàn như ở Ví dụ 6.

Qua phần này, người học có thể thấy rằng từ những hiểu biết về không gian số thực, các khái niệm và tính chất trên không gian metric được hình thành một cách tương tự. Vì tính tổng quát của không gian metric nên hiển nhiên các kết quả trên không gian này cần phải phát biểu dưới dạng tổng quát hơn. Ví dụ như các kết quả là trên không gian metric không đầy đủ với số chiều vô hạn và không gian nền không phải là không gian vec- tor. Bằng cách này các kiến thức trên không gian metric sẽ có được chất liệu hết sức phong phú để người học có thể hiểu và thao tác dễ dàng. Mà cụ thể như những gì chúng ta đã trình bày ở trên

Mặt khác, từ định nghĩa hình cầu mở, chúng ta dễ dàng định nghĩa dãy bị chặn trong không gian metric. Và cũng từ đây, hầu hết các kiến thức trong không gian metric có thể định nghĩa lại theo ngôn ngữ tập mở. Và đó chính là con đường mà các giáo trình đã xây dựng nên không gian topo dựa trên chất liệu là không gian metric. Một cách sâu hơn là con đường này có thể đi đến topo trên đường thẳng thực nơi mà mọi khái niệm, tính chất trở nên rất rõ ràng. Phần tiếp theo sẽ làm rõ điều này thông qua một số ví dụ điển hình.

### *2.3. Không gian topo*

Trước tiên, khái niệm tập mở trên R được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 17. Một tập A con của R được gọi là tập mở nếu nó rỗng, hoặc nếu với mỗi $x \in A$, tồn tại một khoảng mở chứa x, và được chứa trong A.

Nói cách khác, một tập mở trong R là hợp của các khoảng mở. Rõ ràng mỗi khoảng mở (a,b) là một tập mở. Từ định nghĩa trên, dễ dàng kiểm chứng các tiên đề sau.

Tiên đề 1.

$O_1$ : Hợp bất kỳ các tập mở là mở;

$O_2$ : Giao hữu hạn các tập mở là mở;

$O_3$ : Đường thẳng R và tập rỗng Ø là các tập mở.

Trên cơ sở đó khái niệm lân cận của một tập, một điểm được xây dựng. Cụ thể

Định nghĩa 18. Nếu tập A là một tập con khác rỗng của R, một lân cận mở của A là một tập mở chứa A; một lân cận của A là bất kỳ tập mở chứa một lân cận mở của A. Khi $A = \{x\}$, chúng ta gọi là lân cận của điểm x.

Từ định nghĩa này các khái niệm khác lần lượt được xây dựng. Trong đó, Định nghĩa 1 về dãy hội tụ trong R có thể được phát biểu lại như sau

Định nghĩa 19. Dãy $(a_n)$ được gọi là hội tụ đến a nếu và chỉ nếu với bất kỳ một lân cận của a đều chứa vô số điểm của dãy $(a_n)$.

Qua đó, chúng thấy rằng định nghĩa dãy hội tụ trong không gian metric cũng được phát biểu tương tự khái niệm trên. Cũng từ đây các tính chất và các khái niệm khác trong R được chứng minh ở dưới một ngôn ngữ khác mà người ta gọi là ngôn ngữ topo. Sau đây, ta sẽ thấy một hình ảnh tương tự như trong R. hình cầu mở, đóng, mặt cầu và các tập mở được hình thành một cách tương tự. Và trên ngôn ngữ này, các khái niệm khác dần được phát biểu. Những khái niệm này còn có hiệu lực đối với không gian tổng quát hơn là không gian topo.

Từ các Định nghĩa 14, 15 và 16 trong R, các định nghĩa tương tự trong không gian metric được phát biểu.

Định nghĩa 20. Cho $a \in X$ và r là một số dương bất kỳ. Khi đó, $B(a,r) = \{x \in R : d(a,x) < r\}$ được gọi là hình cầu mở tâm a, bán kính r.

Định nghĩa hình cầu đóng

Định nghĩa 21. Cho $a \in X$ và r là một số dương bất kỳ. Khi đó,

$B(a,r) = \{x \in R : d(a,x) \leq r\}$ được gọi là hình cầu đóng tâm a, bán kính r. Và mặt cầu

Định nghĩa 22. Cho $a \in X$ và r là một số dương bất kỳ. Khi đó, $S(a,r) = \{x \in R : d(a,x) = r\}$

được gọi là mặt cầu tâm a, bán kính r.

Từ Định nghĩa 21 hình cầu đóng trong không gian metric X, khi xét trên R và metric thông thường $d(x,y) = |x - y|$ thì nó trở thà hình cầu đóng trên

R. Một cách tương tự, khi xét trên $R_2$ metric Euclid thông thường. Khi đó, hình đóng được định nghĩa $B(a,r) = \{(x,y) \in R^2 : x$ $y^2 \leq r^2\}$.

Nhờ đó dễ thấy hình cầu đóng đơn vị sẽ $B(0, 1) = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Về hình ảnh nó chính là hình tròn tâm bán kính 1. Trong khi đó, vẫn trên $R_2$ metric $d(x,y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ hình cầu đóng đơn vị sẽ là

$B(0, 1) = \{(x,y) \in R_2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1$

Về hình ảnh nó chính là hình vuô tâm O, độ dài cạnh bằng 2. Bốn đỉnh hình vuông lần lượt là $A(-1, 1)$,B(- $-1)$,$C(1, -1)$ và $D(1, 1)$.

Tuy nhiên, khi xét với metric khác. dụ như $d(x,y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Khi hình cầu đóng đơn vị của nó là $B(0, 1) = \{(x$ $\in R_2 : \{|x| + |y| \leq 1\}$.

Về mặt hình ảnh thì nó cũng là hì vuông với tâm O, độ dài cạnh là căn bậc hai hai. Bốn đỉnh của hình vuông lần lượt là A(- 0),$B(0, -1)$,$C(1, 0)$ và $D(0, 1)$.

Qua đó, ta thấy rằng trên cùng n không gian có thể có nhiều metric. Mỗi metric có một hình cầu đóng không nhất thiết giố nhau. Tuy nhiên, trên R thì cả ba hình cầu t đều là $[-1, 1]$.

Đến đây, khái niệm tập mở trong khô gian metric được định nghĩa dựa trên khái ni đã được định nghĩa tương tự trên R.

Định nghĩa 23. Một tập A con c (X,d) được gọi là tập mở nếu nó rỗng, ho nếu với mỗi $x \in A$, tồn tại một hình cầu chứa x, và được chứa trong A.

Từ định nghĩa này dễ dàng kiểm chứng đ các tiên đề sau

Tiên đề 2.

$O_1$ : Hợp bất kỳ các tập mở là mở; C Giao hữu hạn các tập mở là mở; $O_3$ : X và rỗng Ø là các tập mở.

Nếu quan sát kỹ rõ ràng Tiên đề 2 không k gì Tiên đề 1. Vì thật ra đây cũng chính là hệ tiên của một topo. Việc chứng minh các tiên đề không phức tạp. Ví dụ ta tìm hướng chứng min đầu tiên. Giả sử có họ các tập mở $A_{\alpha \in I}$ . Gọi M $\cup_\alpha A_\alpha$, khi đó nếu $A_\alpha$ là tập rỗng với mỗi α thì ta ngay điều phải chứng minh. Ngược lại, lấy kỳ $x \in M$ , tồn tại $\alpha \in I$ sao cho $x \in A_{\alpha k}$. $A_{\alpha k}$ là tập mở nên tồn tại hình cầu mở để x $B(x,r) \subset A_{\alpha k}$. Tức là $x \in B(x,r) \subset M$ vì $A_{\alpha}$ M . Ý $O_2$ chứng minh với hai tập. Sau đó sử dụ phương pháp quy nạp. Lưu ý rằng trong ý $O_2$ thì từ hữu hạn không thể bỏ đi. Ý $O_3$ sử dụng định nghĩa tập mở đối với cả X và ∅.

Sau đây là một ví dụ khác về chứng minh tập mở.

Ví dụ 18. Bất kỳ hình cầu mở đều là tập mở.

Rõ ràng, hình cầu mở bất kỳ là khác rỗng. Lấy bất kỳ $x \in B(a,r)$, cần chỉ ra có một hình cầu chứa x và chứa trong $B(a,r)$. Đặt $r_1 = r - d(x,a)$, khi đó $x \in B(x,r_1) \subset B(a,r)$.

Từ định nghĩa tập mở người ta phát biểu định nghĩa về tập đóng như sau

Định nghĩa 24. Một tập $A \subset X$ là tập đóng trong không gian metric X nếu và chỉ nếu phần bù của nó $A^c$ là tập mở.

Kết hợp với Tiên đề 2 và phương pháp đối ngẫu. Tính chất của một topo có thể phát biểu lại như sau

Tiên đề 3.

O1 : Giao bất kỳ các tập đóng là đóng;

O2 : Hợp hữu hạn các tập đóng là đóng;

O3 : Tập X và tập rỗng ∅ là các tập đóng.

Việc chứng minh các tiên đề trên chủ yếu sử dụng kết quả đã có ở ví dụ 18 và tiên đề 2. Cụ thể, với O1. Giả sử rằng ta có một họ các tập đóng $A\alpha\in I$ . Khi đó, cần chứng minh $\cap_{\alpha\in I} A_\alpha$ là tập đóng. Muốn vậy, ta chỉ cần chứng minh$(\cap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c$ là tập mở. Ta lại có $(\cap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha\in I} A^c_\alpha$. Mà, $A^c$ là các tập mở. Theo tiên đề 2, ta có kết quả cần chứng minh.

Ngoài ra, từ khái niệm lân cận trong R qua định nghĩa 18, ta có khái niệm lân cận trong không gian metric.

Định nghĩa 25. Nếu tập A là một tập con khác rỗng của X, một lân cận mở của A là một tập mở chứa A; một lân cận của A là bất kỳ tập mở chứa một lân cận mở của A. Khi A = {x}, chúng ta gọi là lân cận của điểm x.

Sau đây là khái niệm về điểm trong của một tập. Trên cơ sở đó, phần trong của một tập sẽ được định nghĩa. Cũng từ đây một tính chất đặc trưng mới của tập mở sẽ được hình thành. Xin được bắt đầu bằng định nghĩa điểm trong của một tập.

Định nghĩa 26. Điểm x được gọi là điểm trong của tập A nếu A là một lân cận của x.

Để đơn giản ta có thể lấy ví dụ trong R với metric thông thường.

Ví dụ 19. Xét khoảng $A = (-4, 8)$ thì bất kỳ điểm nào trong A là điểm trong của A. Trong khi đó, $B = [-4, 8)$ thì $x = -4$ không là điểm trong của B.

Sau đây, khái niệm phần trong của một tập được xây dựng. Nó hoàn toàn có thể dựa vào không gian metric hoặc thậm chí là không gian tập số thực

Định nghĩa 27. Tập hợp tất cả các điểm trong của A được gọi là phần trong của tập A.

Phần trong của tập A thường được kí hiệu intA hoặc $A^\circ$. Để rõ hơn ta có thể lấy ví dụ như sau.

Ví dụ 20. Cho $C = [-4, 8)$, $D = [-4, 8]$,$E = (-4, 8]$,$F = (-4, 8)$ khi đó phần trong của các tập C,D,E,F đều là $(-4, 8)$.

Hoặc ví dụ sau đây.

Ví dụ 21. Cho N là tập các số tự nhiên. Khi đó, phần trong của nó là tập rỗng.

Ngoài ra, ta có kết quả được phát biểu qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 22. Với bất kỳ tập A, A0 là tập mở lớn nhất chứa trong A.

Trước hết giả sử B là tập mở bất kỳ chứa trong A.

Sau đó, chứng minh $B \subset A^0$. Thật vậy, lấy $x \in B$ rõ ràng x là điểm trong của B. Mà $B \subset A$ nên x cũng là điểm trong của A. Nói cách khác, $B \subset A^0$. Và do có kết quả trên nên phần trong cũng chính là đặc trưng của tập mở.

Ví dụ 23. Tập A là tập mở nếu và chỉ nếu $A = A^0$.

Kể từ đây, người học có thể chứng minh kết quả sau dựa vào kiến thức có được trên không gian metric hoặc thậm chí là không gian topo. Tuy nhiên, ở đây chỉ sử dụng cách chứng minh trên không gian topo vì chúng có thể áp dụng cho cả hai không gian trên. Cụ thể,

Ví dụ 24. Cho $A,B \subset X$. Khi đó,

i. Nếu $A \subset B$ thì $A^0 \subset B^0$.

ii. $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^\circ$.

Ta thấy rằng $A^0 \subset A$ mà $A \subset B$ nên $A^0 \subset B$. Mặt khác, $B^0$ là tập mở lớn nhất chứa trong B. Do đó, $A^0 \subset B^0$. Ý i. được chứng minh. Với ý ii., rõ ràng $A^0 \subset A$ và $B^0 \subset B$. Do đó, $A^0 \cap B^0 \subset A \cap B$. Mà $(A \cap B)^0$ là tập mở lớn nhất chứa trong $A \cap B$ nên ta có được $A^0 \cap B^0 \subset (A \cap B)^0$. Ngược lại, $A \cap B \subset A$ và $A \cap B \subset B$ nên có điều phải chứng minh.

Tiếp theo là khái niệm điểm dính của một tập.

Định nghĩa 28. Điểm dính của tập con A của X là điểm x thuộc X sao cho mỗi lân cận của x có phần giao với A khác rỗng.

Tập tất cả các điểm dính của A được gọi là bao đóng của A và kí hiệu A. Do đó, để nói x không là điểm dính của A nghĩa là nó là điểm trong của Ac . Nói cách khác bao đóng của tập A là phần bù của phần trong của Ac. Khi đó, ta có đặc trưng sau

Ví dụ 25. Tập A là tập đóng nếu và chỉ nếu A = A.

Việc chứng minh kết quả trên là không khó. Từ kết quả của Ví dụ 24 và đối ngẫu của nó, ta có kết quả sau đây.

Ví dụ 26. Cho $A,B \subset X$. Khi đó,

i. Nếu $A \subset B$ thì $A \subset B$.

ii. $A \cup B = A \cup B$.

Cách chứng minh hoàn toàn dựa vào định nghĩa bao đóng.

Đến đây, ngoài việc sự hội tụ của một dãy đã định nghĩa lại bằng ngôn ngữ topo. Chúng ta đã hình thành nên một số khái niệm topo dựa vào kết quả trên không gian metric. Tuy nhiên, còn một khái niệm quan trọng là hàm liên tục tại một điểm chúng ta cần được phát biểu bằng ngôn ngữ này. Và có thể nói đây là một trong những khái niệm quan trọng của topo. Vì chúng được dùng để giải quyết nhiều bài tập cũng như giúp người học thấy rõ được tính liên tục của một hàm là do topo trên tập đó quyết định. Cũng vì điều này mà định nghĩa 11 về hàm liên tục trên không gian metric được phát biểu lại như sau.

Định nghĩa 29. Cho $(X,d_X)$ và $(Y,d_Y)$ là các không gian metric. Hàm $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ là hàm liên tục tại điểm $x_0$ nếu và chỉ nếu với mỗi $\varepsilon$ dương, tồn tại $\delta$ dương sao cho với bất kỳ $x \in BX(x0,\delta)$ kéo theo $f(x) \in BY(f(x0), \varepsilon)$.

Bằng cách sử dụng ngôn ngữ topo, định nghĩa 29 được phát biểu lại như sau.

Định nghĩa 30. Cho $(X, T_1)$ và $(Y, T_2)$ là các không gian topo. Hàm $f : (X, T_1) \to (Y, T_2)$ là hàm liên tục tại điểm $x_0$ nếu và chỉ nếu với mỗi lân cận V của $f(x_0)$ tồn tại một lân cận v của x0 sao cho $f(v) \subset V$.

Từ đây khái niệm và tính chất khác trên không gian topo tổng quát sẽ được hình thành. Tất nhiên, các yếu tố như tính tách được của không gian cũng như khái niệm như lưới, lọc và đa lọc sẽ dần được trình bày thêm sau khi đã các kiến thức về không gian metric được trang bị.

### 3. Một số trao đổi

Trong học tập và giảng dạy Toán học thường sử dụng hai con đường nhận thức để giúp người học tiếp cận một vấn đề. Thứ nhất, con đường từ tư duy cụ thể đến tư duy trừu tượng. Với con đường này người học sẽ dễ dàng hình thành các khái niệm tổng quát, các tính chất phức tạp dựa trên những khái niệm cụ thể và các tính chất đơn giản hơn. Con đường thứ hai là ngược lại. Trước tiên, người ta trình bày các kết quả tổng quát trên những không gian trừu tượng. Sau đó, bằng những bước đi cụ thể, các kiến thức tổng quát dần sáng tỏ. Thật khó để nói rằng con đường nào trong hai con đường trên sẽ hiệu quả hơn ở những lớp học có năng lực khác nhau. Thế nhưng, với học phần Không gian topo, nếu sử dụng con đường thứ nhất thông qua các ví dụ ở trên sẽ có một vài ưu điểm sau. Thứ nhất, nó giúp người học sử dụng được những kiến thức đã được học trong học phần Giải tích 1, 2 để làm sáng tỏ các kiến thức trừu tượng. Thứ hai, cách tiếp cận giúp người học tiếp thu kiến thức qua từng giai đoạn. Từ đơn giản như trên không gian hàm một biến cho đến không gian metric. Và từ không gian metric mới bước tiếp đến không gian topo. Thứ ba, khi học đến không gian topo, người học đã trải qua việc sử dụng các công cụ để chứng minh trong từng không gian. Do đó, các kỹ năng chứng minh trong bài toán trên các không gian đang xét sẽ được nâng lên theo trình tự thời gian. Ngoài ra, việc giảng dạy theo cách tiếp cận này còn có thể giúp giảng viên có thể điều chỉnh ngôn ngữ trong quá trình chứng minh nếu sinh viên cảm thấy vấn đề còn khó hay quá mới mẻ. Và trên hết, cách tiếp này phù hợp với tiến trình lịch sử của môn học. Tuy nhiên, như chúng tôi có trao đổi ở trên. Việc giảng dạy theo cách tiếp cận này sẽ mất thời gian hơn các cách tiếp cận mà các tác giả ở phần giới thiệu đã chọn. Thứ hai, đối với những sinh viên có học lực tốt thì việc trình bày qua nhiều bước đơn giản có thể gây mất hứng thú cho họ. Và cuối cùng, cách trình bày từ đơn giản đến phức tạp sẽ khiến người học khó thấy một bức tranh đẹp đẽ và hoàn hảo ngay từ đầu.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


1. Đ. Đ. Áng; Nhập môn Giải tích, Nhà xuất bản Giáo dục, Tp. HCM, 1998.
2. Đ. Đ. Trọng, P. H. Quân, Đ. H. Tâm, Đ. N. Thanh; Giáo trình giải tích hàm, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Tp. HCM, Tp. HCM, 2011.
3. N. Định, N. Hoàng; Hàm số biến số thực, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Hà Nội, 2004.
4. J. Dieudonne; Foundations of modern analysis, Aca-demic press, New York, 1969.
5. John L. Kelley; General topology, Springer, New York, 1955.
6. N. Bourbaki; Topological vector space, Springer, Berlin, 1987.
7. G. Choquet; Topology, Academic press, New York, 1966.
8. J. Dugundji; Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
9. J. Munkres; Topology, Prentice Hall, Inc., New Jer-sey, 2000.

10. S. Lipschutz; Theory and problems of general topol-ogy, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
11. J. Stewart; Calculus early transcendental, Thomson, Australia, 2008.
12. W. A. J. Kosmala; A friendly introduction to anal-ysis, Pearson Prentice Hall, London, 2004.
13. L. Brand; Advanced calculus, John Wiley & Son, Inc., New York, 1960.
14. T. Tao; Analysis I, II, Hindustan book agency, New Delhi, 2006.

# AN APPROACH TO TEACHING TOPOLOGICAL SPACES.

**Luu Xuan Thang**

*University of Khanh Hoa*

***Abstract:***

*General topology has formed a coherent doctrine only for the first half of the 20th century; it is outcome of a movement of ideas which goes back to antiquity. One that ultimately led to a vast transformation and generalization of the understanding of such basic objects as functions, and such notions as continuity, differentiability, and integrability. Almost results in topological spaces are generalized from concrete spaces. In this paper, an approach to teaching topological spaces from the real line will be investigated. And some examples are also presented.*

***Keyword:*** *General topology, teaching topological space, teaching methodology.*