SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP HAI BƯỚC ĐẾN ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA HAI ÁNH XẠ *G*-KHÔNG GIÃN TIỆM CẬN TRONG KHÔNG GIAN BANACH VỚI ĐỒ THỊ

Cao Phạm Cẩm Tú[1] và Nguyễn Trung Hiếu[2*]

[1]Sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp

[2]Trường Đại học Đồng Tháp

[*]Tác giả liên hệ: ngtrunghieu@dthu.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 21/02/2020; Ngày nhận chỉnh sửa: 30/3/2020; Ngày duyệt đăng: 23/4/2020

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một dãy lặp hai bước mới cho hai ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach với đồ thị. Tiếp theo đó, chúng tôi chứng minh một số kết quả về sự hội tụ yếu và hội tụ mạnh của dãy lặp này đến điểm bất động chung của hai ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach lồi đều với đồ thị. Các kết quả này là sự mở rộng của một số kết quả chính trong nghiên cứu của Wattanawweekul (2018). Đồng thời, chúng tôi cũng đưa ra ví dụ để minh họa cho sự hội tụ của dãy được giới thiệu và cũng chứng tỏ rằng dãy lặp được giới thiệu hội tụ đến điểm bất động chung của hai ánh xạ G-không giãn tiệm cận nhanh hơn những dãy lặp được nghiên cứu trong bài báo của Wattanaweekul trên.

Từ khóa: *Ánh xạ G-không giãn tiệm cận, điểm bất động chung, không gian Banach với đồ thị.*

CONVERGENCE OF A TWO-STEP ITERATION PROCESS TO COMMON FIXED POINTS OF TWO ASYMPTOTICALLY G-NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES WITH GRAPHS

Cao Pham Cam Tu[1], and Nguyen Trung Hieu[2*]

[1]Student, Dong Thap University

[2]Dong Thap University

**Corresponding author: ngtrunghieu@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 21/02/2020; Received in revised form: 30/3/2020; Accepted: 23/4/2020

Abstract

In this paper, we introduce a new two-step iteration scheme for two asymptotically G-nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces with graphs. We then prove some weak and strong convergence results to common fixed points of two asymptotically G-nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces with graphs. These results are the extension of some major results reported by Wattanawweekul (2018). In addition, we give an example to illustrate for the convergence of the introduced iteration process and show that the convergence of this process to common fixed points of two asymptotically G-nonexpansive mappings is faster than those presented by Wattanawweekul (2018).

Keywords: *Asymptotically G-nonexpansive mapping, common fixed point, Banach spaces with graph.*

1. Giới thiệu

Trong lí thuyết điểm bất động, vấn đề xây dựng dãy lặp và ứng dụng vào nghiên cứu điểm bất động của ánh xạ không giãn được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Bên cạnh đó, nhiều tác giả cũng quan tâm nghiên cứu mở rộng ánh xạ không giãn theo nhiều hướng tiếp cận khác nhau. Năm 1972, Goebel và Kirk (1972) đã giới thiệu một mở rộng của ánh xạ không giãn và được gọi là ánh xạ không giãn tiệm cận. Sau đó, lớp ánh xạ không giãn tiệm cận được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu theo hướng thiết lập điều kiện tồn tại điểm bất động cũng như chứng minh sự hội tụ của những dãy lặp khác nhau đến điểm bất động. Ngoài ra, một số tác giả cũng sử dụng những kĩ thuật khác nhau để mở rộng khái niệm ánh xạ không giãn tiệm cận. Năm 2018, sử dụng ý tưởng được trình bày bởi Jachymski trong bài báo của Jachymski (2008) là kết hợp giữa lí thuyết điểm bất động và lí thuyết đồ thị, Sangago *và cs.* (2018) đã giới thiệu lớp ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận trong không gian Banach với đồ thị, đồng thời một số tính chất về điểm bất động và kết quả hội tụ cho lớp ánh xạ này cũng được thiết lập. Kể từ đó, việc thiết lập sự hội tụ của những dãy lặp khác nhau đến điểm bất động chung của những ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận trong không gian Banach với đồ thị được một số tác giả quan tâm. Năm 2018, sử dụng dãy lặp Ishikawa, Wattanataweekul (2018) đã giới thiệu dãy lặp hai bước cho hai ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận như sau:

$u_1 \in \Omega$ và

$$\begin{cases} v_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_n g^n u_n \\ u_{n+1} = (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n f^n v_n \end{cases} \tag{1.1}$$

với $n \in \mathbb{N}^*, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1],$ Ω là tập lồi trong không gian Banach *X* và $f, g : \Omega \to \Omega$ là hai ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận, đồng thời một số kết quả hội tụ của dãy lặp (1.1) cũng được thiết lập. Đến đây, một vấn đề tự nhiên được đặt ra là tiếp tục xây dựng những dãy lặp mà hội tụ đến điểm bất động chung nhanh hơn dãy lặp (1.1). Do đó, trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một dãy lặp hai bước mới cho hai ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận và chứng minh một số kết quả về hội tụ của dãy lặp được đề xuất đến điểm bất động chung của hai ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận trong không gian Banach lồi đều với đồ thị. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Cho không gian Banach thực *X* và X^* là không gian liên hợp của *X*. Khi đó, dãy $\{u_n\} \subset X$ được gọi là *hội tụ mạnh* (*hội tụ theo chuẩn*) đến $u \in X$ nếu $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \| = 0.$ Dãy $\{u_n\} \subset X$ được gọi là *hội tụ yếu* đến $u \in X$ nếu $\lim_{n\to\infty} \| fu_n - fu \| = 0$ với mọi $f \in X^*.$

Cho Ω là một tập con khác rỗng của không gian Banach thực *X*. Kí hiệu $G = (V(G), E(G))$ là đồ thị định hướng với $V(G)$ tập hợp các đỉnh của đồ thị *G* sao cho $V(G)$ trùng với Ω, $E(G)$ tập hợp các cạnh của đồ thị *G* mà $(u,u) \in E(G)$ với $u \in \Omega$ và *G* không có cạnh song song.

Định nghĩa 1.1 (Suparatulatorn *và cs.*, 2018, Định nghĩa 4)**.** Cho $G = (V(G), E(G))$ là đồ thị định hướng. Khi đó, G được gọi là có *tính bắc cầu* nếu với $u, v, w \in V(G)$ sao cho $(u,v), (v,w) \in E(G)$ thì $(u,w) \in E(G).$

Định nghĩa 1.2 (Sangago *và cs.*, 2018, Định nghĩa 3.1)**.** Cho *X* là không gian Banach thực và Ω là tập khác rỗng của *X*, $G = (V(G), E(G))$ là đồ thị định hướng sao cho $V(G) = \Omega.$ Khi đó, ánh xạ $f : \Omega \to \Omega$ được gọi là *G-không giãn tiệm cận* nếu

(1) f bảo toàn cạnh của *G*, tức là với $(u,v) \in E(G)$ ta có $(fu, fv) \in E(G).$

(2) Tồn tại dãy $\{\lambda_n\}, \lambda_n \geq 1$ với $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$ sao cho $\| f^n u - f^n v \| \leq \lambda_n \| u - v \|$ với $(u,v) \in E(G)$ và $n \geq 1$.

Định nghĩa 1.3 (Sangago *và cs.*, 2018, Định nghĩa 1.3). Cho *X* là không gian định chuẩn, Ω là tập con khác rỗng của *X*, $G = (V(G), E(G))$ là đồ thị định hướng sao cho $V(G) = \Omega$. Khi đó, Ω được gọi là có *tính chất G* nếu với $\{u_n\}$ là dãy trong Ω sao cho $(u_n, u_{n+1}) \in E(G)$ với $n \in \mathbb{N}^*$ và $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến $u \in \Omega$ thì tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $(u_{n(k)}, u) \in E(G)$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Định nghĩa 1.4 (Suparatulatorn *và cs.*, 2018, Định nghĩa 6). Cho *X* là không gian Banach. Khi đó, *X* được gọi là *thỏa mãn điều kiện Opial* nếu với $\{u_n\}$ là dãy trong *X* và $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến u thì $\limsup_{n\to\infty} \| u_n - u \| < \limsup_{n\to\infty} \| u_n - v \|$ với $v \in X, u \neq v$.

Bổ đề 1.5 (Sangago *và cs.*, 2018, Định nghĩa 1.4). *Cho X là không gian Banach,* Ω *là tập con khác rỗng của X,* Ω *có tính chất G,* $f : \Omega \to \Omega$ *là ánh xạ G-không giãn tiệm cận với dãy hệ số* $\{\lambda_n\}$ *sao cho* $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - 1) < \infty$, $\{u_n\}$ *là dãy hội tụ mạnh đến* $u \in \Omega$, $(u_n, u_{n+1}) \in E(G)$ *và* $\lim_{n\to\infty} \| fu_n - u_n \| = 0$. *Khi đó,* $fu = u$.

Bổ đề 1.6 (Suparatulatorn *và cs.*, 2018, Bổ đề 3). *Giả sử*

(1) X là không gian Banach thỏa mãn điều kiện Opial.

(2) $\{u_n\}$ *là dãy trong X sao cho* $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|$ *và* $\lim_{n\to\infty} \| u_n - v \|$ *tồn tại với* $u, v \in X$.

(3) $\{u_{n(k)}\}$ *và* $\{v_{n(k)}\}$ *là dãy con của* $\{u_n\}$ *sao cho* $\{u_{n(k)}\}$ *hội tụ yếu đến* u, $\{v_{n(k)}\}$ *hội tụ yếu đến* v.

Khi đó, $u = v$.

Định nghĩa 1.7 (Jachymski, 2018, Định nghĩa 2.3). Cho ánh xạ $f : X \to X$. Khi đó, f được gọi là *G-liên tục* nếu $\{u_n\}$ là dãy trong *X* sao cho u_n hội tụ mạnh đến u và $(u_n, u_{n+1}) \in E(G)$ thì $fu_n \to fu$.

Mệnh đề 1.8 (Wattanataweekul, 2018, Mệnh đề 3.2). *Giả sử*

(1) X là không gian Banach với đồ thị định hướng G, Ω *có tính chất G.*

(2) $f : \Omega \to \Omega$ *là ánh xạ G-không giãn tiệm cận.*

Khi đó, f *là G-liên tục.*

Định nghĩa 1.9 (Dung và Hieu, 2020, Định nghĩa 3.1). Cho *X* là không gian vectơ và *D* là tập con khác rỗng của $X \times X$. Khi đó, *D* được gọi là *lồi theo tọa độ* nếu với $(p,u), (p,v), (u,p), (v,p) \in D$ và $t \in [0,1]$ ta có $t(p,u) + (1-t)(p,v) \in D$ và $t(u,p) + (1-t)(v,p) \in D$.

Định nghĩa 1.10 (Shahzad và Al-Dubiban, 2006, tr. 534). Cho ánh xạ $f : \Omega \to \Omega$. Khi đó, f được gọi là *G-nửa compact* nếu với $\{u_n\}$ là dãy trong Ω với $(u_n, u_{n+1}) \in E(G)$ và $\lim_{n\to\infty} \| fu_n - u_n \| = 0$ thì tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ mạnh đến $q \in \Omega$ khi $k \to \infty$.

Bổ đề 1.11 (Dung và Hieu, 2018, Bổ đề 2.4). *Cho X là không gian Banach lồi đều và* $r > 0$. *Khi đó, tồn tại một hàm lồi, tăng ngặt và liên tục* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *sao cho* $\varphi(0) = 0$ *và*

$$\| tu + (1-t)v \|^2 \leq t \| u \|^2 + (1-t) \| v \|^2 - t(1-t)\varphi(\| u - v \|)$$

với mọi $t \in [0,1]$ và $u, v \in B_r = \{u \in X : \| u \| \leq r\}$.

Bổ đề 1.12 (Wattanataweekul, 2018, Bổ đề 2.11)**.** *Cho* $\{a_n\},\{b_n\}$ *và* $\{\gamma_n\}$ *là dãy số thực không âm thỏa mãn*

$$a_{n+1} \le (1+\gamma_n)a_n + b_n \ \forall n \ge 1 \quad \text{với} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n < \infty$$

và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. *Khi đó,* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *tồn tại.*

2. Kết quả chính

Trong mục này, ta luôn xét $G=(V(G),E(G))$ là đồ thị định hướng, có tính chất bắc cầu với $V(G)=\Omega, E(G)$ là tập lồi theo tọa độ và giả sử $f,g:\Omega\to\Omega$ là hai ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận với hệ số tiệm cận lần lượt là σ_n,μ_n sao cho $Fix(f)\cap Fix(g)\ne\varnothing$ với $Fix(f), Fix(g)$ lần lượt là tập điểm bất động của hai ánh xạ $f,g.$ Đặt $\lambda_n=\max\{\sigma_n,\mu_n\}.$ Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-1)<\infty.$ Bằng việc mở rộng dãy lặp (1.2) trong nghiên cứu của Wattanataweekul (2018), chúng tôi giới thiệu dãy lặp $\{u_n\}$ cho hai ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận trong không gian Banach với đồ thị như sau:

$$u_1 \in \Omega \text{ và với } n\in\mathbb{N}^*,$$
$$\begin{cases} v_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_n g^n u_n \\ u_{n+1} = (1-\alpha_n)g^n v_n + \alpha_n f^n v_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[0,1].$ Trước hết, chúng tôi chứng minh một số tính chất của dãy lặp (2.1).

Mệnh đề 2.1. *Giả sử*

(1) X là không gian định chuẩn.

(2) Ω *là tập con lồi, khác rỗng trong X.*

(3) Với mỗi $p\in Fix(f)\cap Fix(g), \{u_n\}$ *là dãy được xác định bởi (2.1) thỏa mãn* $(u_1,p),(p,u_1)\in E(G).$

Khi đó,

$$(u_n,p),(v_n,p),(p,u_n),(p,v_n),(v_n,u_n),(u_n,u_{n+1})\in E(G)$$

với $n\in\mathbb{N}^*.$

Chứng minh. Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh

$$(u_n,p)\in E(G) \text{ với } n\in\mathbb{N}^*. \tag{2.2}$$

Theo giả thiết, ta có $(u_1,p)\in E(G).$ Suy ra (2.2) đúng với $n=1.$

Giả sử (2.2) đúng với $n=k\ge1$, tức là $(u_k,p)\in E(G).$ Ta cần chứng minh

$$(u_{k+1},p)\in E(G).$$

Vì f,g bảo toàn cạnh nên f^k,g^k bảo toàn cạnh. Kết hợp g^k bảo toàn cạnh và $(u_k,p)\in E(G),$ ta có $(g^k u_k,p)\in E(G).$ Ta lại có

$$\begin{aligned}(v_k,p) &= ((1-\beta_k)u_k + \beta_k g^k u_k, p) \\ &= (1-\beta_k)(u_k,p) + \beta_k(g^k u_k,p).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Do $(u_k,p),(g^k u_k,p)\in E(G)$ và $E(G)$ lồi theo tọa độ nên từ (2.3), ta có $(v_k,p)\in E(G).$ Kết hợp f^k,g^k bảo toàn cạnh với $(v_k,p)\in E(G),$ ta được $(f^k v_k,p),(g^k v_k,p)\in E(G).$ Ta cũng có

$$\begin{aligned}(u_{k+1},p) &= ((1-\alpha_k)g^k v_k + \alpha_k f^k v_k, p) \\ &= (1-\alpha_k)(g^k v_k,p) + \alpha_k(f^k v_k,p).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Khi đó, từ (2.4), $(g^k v_k,p),(f^k v_k,p)\in E(G)$ và $E(G)$ lồi theo tọa độ, ta có $(u_{k+1},p)\in E(G).$

Do đó theo nguyên lý quy nạp, ta có $(u_n,p)\in E(G)$ với $n\in\mathbb{N}^*.$ Tiếp theo, vì g^n bảo toàn cạnh và $(u_n,p)\in E(G)$ nên $(g^n u_n,p)\in E(G).$ Ta có

$$\begin{aligned}(v_n,p) &= ((1-\beta_n)u_n + \beta_n g^n u_n, p) \\ &= (1-\beta_n)(u_n,p) + \beta_n(g^n u_n,p).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Kết hợp (2.5) với $(u_n,p),(g^n u_n,p)\in E(G)$ và $E(G)$ lồi theo tọa độ, ta có $(v_n,p)\in E(G)$ với $n\in\mathbb{N}^*.$

Lập luận tương tự như trên, ta chứng minh được $(p,u_n),(p,v_n)\in E(G)$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

Vì $(v_n,p),(p,u_n),(u_n,p),(p,u_{n+1})\in E(G)$ và G có tính chất bắc cầu nên

$$(v_n,u_n),(u_n,u_{n+1})\in E(G) \text{ với } n\in\mathbb{N}^*. \qquad \square$$

Mệnh đề 2.2. *Giả sử*

(1) X là không gian Banach lồi đều.

(2) Ω là tập con lồi, bị chặn, đóng, khác rỗng trong X.

(3) Với mỗi $p\in Fix(f)\cap Fix(g)$, $\{u_n\}$ là dãy được xác định bởi (2.1) thỏa mãn $(u_1,p),(p,u_1)\in E(G)$,

$$0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\le\limsup_{n\to\infty}\alpha_n<1 \text{ và}$$
$$0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n\le\limsup_{n\to\infty}\beta_n<1.$$

Khi đó,

(1) $\lim_{n\to\infty}\|u_n-p\|$ tồn tại.

(2) $\lim_{n\to\infty}\|f^nv_n-g^nv_n\|=\lim_{n\to\infty}\|g^nu_n-u_n\|=\lim_{n\to\infty}\|f^nu_n-u_n\|=0.$

(3) $\lim_{n\to\infty}\|fu_n-u_n\|=\lim_{n\to\infty}\|gu_n-u_n\|=0.$

Chứng minh (1). Lấy $p\in Fix(f)\cap Fix(g)$, theo Mệnh đề 2.1, ta có

$$(u_n,p),(v_n,p),(v_n,u_n),(u_n,u_{n+1})\in E(G).$$

Vì Ω là tập bị chặn nên tồn tại $r>0$ sao cho $\|u\|\le r$ với mọi $u\in\Omega$. Khi đó $u_n,v_n\in B_r=\{u\in\Omega:\|u\|\le r\}$. Do đó, theo Bổ đề 1.11, tồn tại hàm lồi, tăng ngặt, liên tục $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ sao cho $\varphi(0)=0$ và

$$\begin{aligned}&\|v_n-p\|^2\\ &=\|(1-\beta_n)u_n+\beta_ng^nu_n-p\|^2\\ &\le(1-\beta_n)\|u_n-p\|^2+\beta_n\|g^nu_n-p\|^2-\beta_n(1-\beta_n)\varphi(\|g^nu_n-u_n\|).\end{aligned}\quad(2.6)$$

Do g là G-không giãn tiệm cận nên từ (2.6) ta có

$$\begin{aligned}&\|v_n-p\|^2\\ &\le(1-\beta_n)\|u_n-p\|^2+\beta_n\lambda_n^2\|u_n-p\|^2-\beta_n(1-\beta_n)\varphi(\|g^nu_n-u_n\|)\\ &=[1+\beta_n(\lambda_n^2-1)]\|u_n-p\|^2-\beta_n(1-\beta_n)\varphi(\|g^nu_n-u_n\|).\end{aligned}\quad(2.7)$$

Lập luận tương tự như trên, theo Bổ đề 1.11 và f,g là ánh xạ G-không giãn tiệm cận, kết hợp với (2.7) ta có

$$\begin{aligned}&\|u_{n+1}-p\|^2\\ &\le(1-\alpha_n)\|g^nv_n-p\|^2+\alpha_n\|f^nv_n-p\|^2\\ &\quad-\alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\|f^nv_n-g^nv_n\|)\\ &\le(1-\alpha_n)\lambda_n^2\|v_n-p\|^2+\alpha_n\lambda_n^2\|v_n-p\|^2\\ &\quad-\alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\|f^nv_n-g^nv_n\|)\\ &=\lambda_n^2\|v_n-p\|^2-\alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\|f^nv_n-g^nv_n\|)\\ &=\lambda_n^2[1+\beta_n(\lambda_n^2-1)]\|u_n-p\|^2-\lambda_n^2\beta_n(1-\beta_n)\varphi(\|g^nu_n-u_n\|)\\ &\quad-\alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\|f^nv_n-g^nv_n\|)\\ &=[1+(\lambda_n^2-1)(1+\lambda_n^2\beta_n)]\|u_n-p\|^2-\lambda_n^2\beta_n(1-\beta_n)\varphi(\|g^nu_n-u_n\|)\\ &\quad-\alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\|f^nv_n-g^nv_n\|)\\ &\le\|u_n-p\|^2+(\lambda_n^2-1)(1+\lambda_n^2\beta_n)\|u_n-p\|^2-\beta_n(1-\beta_n)\varphi(\|g^nu_n-u_n\|)\\ &\quad-\alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\|f^nv_n-g^nv_n\|).\end{aligned}\quad(2.8)$$

Vì $\{\beta_n\},\{\lambda_n\}$ và Ω bị chặn nên tồn tại hằng số $M>0$ sao cho $(1+\lambda_n^2\beta_n)\|u_n-p\|^2\le M$ với $n\ge1$. Khi đó, từ (2.8), ta được

$$\begin{aligned}&\|u_{n+1}-p\|^2\\ &\le\|u_n-p\|^2+M(\lambda_n^2-1)-\beta_n(1-\beta_n)\varphi(\|g^nu_n-u_n\|)\\ &\quad-\alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\|f^nv_n-g^nv_n\|).\end{aligned}\quad(2.9)$$

Từ (2.9), ta có

$$\|u_{n+1}-p\|^2\le\|u_n-p\|^2+M(\lambda_n^2-1).$$

Vì $0\le\lambda_n^2-1\le2\lambda_n(\lambda_n-1)$ với $\lambda_n\ge1$ và $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-1)<\infty$ nên $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^2-1)<\infty$. Theo Bổ đề 1.12, ta được $\lim_{n\to\infty}\|u_n-p\|$ tồn tại.

(2). Từ (2.9), ta có

$$\begin{aligned}&\| u_{n+1} - p \|^2 \\ &\leq \| u_n - p \|^2 + M(\lambda_n^2 - 1) - \alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\| f^n v_n - g^n v_n \|).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&\alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\| f^n v_n - g^n v_n \|) \\ &\leq \| u_n - p \|^2 - \| u_{n+1} - p \|^2 + M(\lambda_n^2 - 1). \quad (2.10)\end{aligned}$$

Vì $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, tồn tại số thực $\delta > 0$ và số nguyên n_0 sao cho $\alpha_n(1-\alpha_n) \geq \delta > 0$ với $n \geq n_0$. Từ (2.10) với bất kì số tự nhiên $m \geq n_0$, ta có

$$\begin{aligned}&\sum_{n=n_0}^{m} \delta\varphi(\| f^n v_n - g^n v_n \|) \\ &\leq \sum_{n=n_0}^{m} \alpha_n(1-\alpha_n)\varphi(\| f^n v_n - g^n v_n \|) \\ &= \sum_{n=n_0}^{m} \| u_n - p \|^2 - \sum_{n=n_0}^{m} \| u_{n+1} - p \|^2 + M\sum_{n=n_0}^{m}(\lambda_n^2 - 1) \\ &= \| u_{n_0} - p \|^2 - \| u_{m+1} - p \|^2 + M\sum_{n=n_0}^{m}(\lambda_n^2 - 1) \\ &\leq \| u_{n_0} - p \|^2 + M\sum_{n=n_0}^{m}(\lambda_n^2 - 1). \quad (2.11)\end{aligned}$$

Vì $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^2 - 1) < \infty$ nên từ (2.11) ta được $\sum_{n=n_0}^{m} \delta\varphi(\| f^n v_n - g^n v_n \|) < \infty$. Suy ra

$$\sum_{n=n_0}^{m} \varphi(\| f^n v_n - g^n v_n \|) < \infty .$$

Do đó $\lim_{n\to\infty} \varphi(\| f^n v_n - g^n v_n \|) = 0$. Sử dụng tính chất của φ, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| f^n v_n - g^n v_n \| = 0. \quad (2.12)$$

Tiếp theo, từ (2.9), ta có

$$\begin{aligned}&\beta_n(1-\beta_n)\varphi(\| g^n u_n - u_n \|) \\ &\leq \| u_n - p \|^2 - \| u_{n+1} - p \|^2 + M(\lambda_n^2 - 1). \quad (2.13)\end{aligned}$$

Lập luận tương tự như chứng minh trên, từ (2.13), ta được $\sum_{n=n_0}^{m} \varphi(\| g^n u_n - u_n \|) < \infty$. Do đó $\lim_{n\to\infty} \varphi(\| g^n u_n - u_n \|) = 0$. Sử dụng tính chất của φ, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| g^n u_n - u_n \| = 0. \quad (2.14)$$

Tiếp theo, từ $v_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_n g^n u_n$, ta có

$$\begin{aligned}&\| v_n - u_n \| \\ &= \| (1-\beta_n)u_n + \beta_n g^n u_n - u_n \| \\ &= \beta_n \| g^n u_n - u_n \|. \quad (2.15)\end{aligned}$$

Từ (2.14) và (2.15), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| v_n - u_n \| = 0. \quad (2.16)$$

Theo Mệnh đề 2.1, ta có $(v_n, u_n) \in E(G)$. Do đó

$$\begin{aligned}&\| f^n u_n - u_n \| \\ &\leq \| f^n u_n - f^n v_n \| + \| f^n v_n - g^n v_n \| \\ &\quad + \| g^n v_n - g^n u_n \| + \| g^n u_n - u_n \| \\ &= 2\lambda_n \| v_n - u_n \| + \| f^n v_n - g^n v_n \| + \| g^n u_n - u_n \|.\end{aligned}$$
(2.17)

Từ (2.12), (2.14) và (2.16), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| f^n u_n - u_n \| = 0 . \quad (2.18)$$

(3). Vì $(v_n, u_n) \in E(G)$ nên

$$\begin{aligned}&\| u_{n+1} - u_n \| \\ &= \| (1-\alpha_n)g^n v_n + \alpha_n f^n v_n - u_n \| \\ &\leq \| g^n v_n - u_n \| + \alpha_n \| f^n v_n - g^n v_n \| \\ &\leq \| g^n v_n - g^n u_n \| + \| g^n u_n - u_n \| + \alpha_n \| f^n v_n - g^n v_n \| \\ &\leq \lambda_n \| v_n - u_n \| + \| g^n u_n - u_n \| \\ &\quad + \alpha_n \| f^n v_n - g^n v_n \| . \quad (2.19)\end{aligned}$$

Kết hợp (2.19) với (2.12), (2.14) và (2.16), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| u_{n+1} - u_n \| = 0. \quad (2.20)$$

Vì $(u_n, u_{n+1}) \in E(G)$ nên

$$
\begin{aligned}
& \| u_{n+1} - f^n u_{n+1} \| \\
& \le \| u_{n+1} - u_n \| + \| f^n u_n - f^n u_{n+1} \| + \| f^n u_n - u_n \| \\
& \le \| u_{n+1} - u_n \| + \lambda_n \| u_n - u_{n+1} \| + \| f^n u_n - u_n \| \\
& = (1+\lambda_n) \| u_{n+1} - u_n \| + \| f^n u_n - u_n \|. \quad (2.21)
\end{aligned}
$$

Kết hợp (2.21) với (2.18) và (2.20), ta được

$$\lim_{n\to\infty} \| u_{n+1} - f^n u_{n+1} \| = 0.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
& \| u_{n+1} - f u_{n+1} \| \\
& \le \| u_{n+1} - f^{n+1} u_{n+1} \| + \| f u_{n+1} - f^{n+1} u_{n+1} \| \\
& \le \| u_{n+1} - f^{n+1} u_{n+1} \| + \lambda_1 \| u_{n+1} - f^n u_{n+1} \|.
\end{aligned}
$$

Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức trên khi $n \to \infty$, ta được $\lim_{n\to\infty} \| f u_n - u_n \| = 0.$

Tương tự

$$
\begin{aligned}
& \| u_{n+1} - g^n u_{n+1} \| \\
& \le \| u_{n+1} - u_n \| + \| g^n u_n - g^n u_{n+1} \| + \| g^n u_n - u_n \| \\
& \le \| u_{n+1} - u_n \| + \lambda_n \| u_n - u_{n+1} \| + \| g^n u_n - u_n \| \\
& = (1+\lambda_n) \| u_{n+1} - u_n \| + \| g^n u_n - u_n \|.
\end{aligned}
$$

(2.22)

Kết hợp (2.22) với (2.14) và (2.20), ta được $\lim_{n\to\infty} \| u_{n+1} - g^n u_{n+1} \| = 0.$ Ta có

$$
\begin{aligned}
& \| u_{n+1} - g u_{n+1} \| \\
& \le \| u_{n+1} - g^{n+1} u_{n+1} \| + \| g u_{n+1} - g^{n+1} u_{n+1} \| \\
& \le \| u_{n+1} - g^{n+1} u_{n+1} \| + \lambda_1 \| u_{n+1} - g^n u_{n+1} \|.
\end{aligned}
$$

Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức trên khi $n \to \infty$, ta được $\lim_{n\to\infty} \| g u_n - u_n \| = 0.$ □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập và chứng minh kết quả về sự hội tụ yếu của dãy lặp (2.1) đến điểm bất động chung của hai ánh xạ G-không giãn tiệm cận trong không gian Banach lồi đều với đồ thị.

Định lí 2.3. *Giả sử*

(1) X là không gian Banach lồi đều và thỏa mãn điều kiện Opial.

(2) Ω là tập con lồi, bị chặn, đóng, khác rỗng trong X và Ω có tính chất G.

(3) $\{u_n\}$ là dãy được xác định bởi (2.1) thỏa mãn $(u_1, p), (p, u_1) \in E(G)$ với mỗi $p \in Fix(f) \cap Fix(g)$,

$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \le \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ *và*

$0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \le \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1.$

Khi đó, $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến điểm bất động chung của f và g.

Chứng minh. Vì X là không gian Banach lồi đều nên X có tính chất phản xạ. Hơn nữa, từ Mệnh đề 2.2, ta có $\lim_{n\to\infty} \| u_n - p \|$ tồn tại. Vì vậy $\{u_n\}$ bị chặn. Do đó, tồn tại dãy con hội tụ yếu của $\{u_n\}$. Giả sử $\{u_{n(k)}\}, \{v_{n(k)}\}$ là hai dãy con của $\{u_n\}$ lần lượt hội tụ yếu đến u, v. Theo Mệnh đề 2.2, ta có

$$
\begin{aligned}
& \lim_{k\to\infty} \| f u_{n(k)} - u_{n(k)} \| \\
& = \lim_{k\to\infty} \| g u_{n(k)} - u_{n(k)} \| \\
& = 0. \quad (2.23)
\end{aligned}
$$

Vì $(u_n, u_{n+1}) \in E(G)$ và G có tính chất bắc cầu nên

$$(u_{n(k)}, u_{n(k+1)}) \in E(G). \quad (2.24)$$

Từ (2.23) và (2.24), theo Bổ đề 1.5, ta được $fu = gu = u$ hay $u \in Fix(f) \cap Fix(g)$. Tương tự như trên, ta chứng minh được $v \in Fix(f) \cap Fix(g)$. Vì $u, v \in Fix(f) \cap Fix(g)$ nên $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|$ và $\lim_{n\to\infty} \| u_n - v \|$ tồn tại. Theo Bổ đề 1.6, ta được $u = v$. Do đó $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến điểm bất động chung của f và g. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập và chứng minh kết quả về sự hội tụ mạnh của dãy lặp (2.1) đến điểm bất động chung của hai ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận trong không gian Banach lồi đều với đồ thị.

Định lí 2.4. *Giả sử*

(1) X là không gian Banach lồi đều.

(2) Ω là tập con lồi, bị chặn, đóng, khác rỗng trong X, Ω có tính chất G.

(3) Một trong hai ánh xạ f, g là G-nửa compact.

(4) $\{u_n\}$ là dãy được xác định bởi (2.1) thỏa mãn $(u_1, p), (p, u_1) \in E(G)$ với mỗi $p \in Fix(f) \cap Fix(g)$,

$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \le \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ *và*

$0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \le \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1.$

Khi đó, $\{u_n\}$ hội tụ mạnh đến điểm bất động chung của f và g.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 2.2, ta có $\lim_{n\to\infty} \| u_n - fu_n \| = \lim_{n\to\infty} \| u_n - gu_n \| = 0.$ Hơn nữa, $\{u_n\}$ là dãy trong Ω và $(u_n, u_{n+1}) \in E(G).$ Kết hợp với giả thiết một trong hai ánh xạ f, g là *G*-nửa compact, suy ra tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ mạnh đến $q \in C.$ Do đó

$$\lim_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - fu_{n(k)} \| = \lim_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - gu_{n(k)} \| = 0.$$

Khi đó, sử dụng Mệnh đề 1.8, ta được f và g là *G*-liên tục. Kết hợp với (2.24), ta được

$$\lim_{k\to\infty} \| fu_{n(k)} - fq \| = \lim_{k\to\infty} \| gu_{n(k)} - gq \| = 0.$$

Ta có

$$\| q - fq \|$$
$$\le \| q - u_{n(k)} \| + \| u_{n(k)} - fu_{n(k)} \| + \| fu_{n(k)} - fq \|,$$

$$\| q - gq \|$$
$$\le \| q - u_{n(k)} \| + \| u_{n(k)} - gu_{n(k)} \| + \| gu_{n(k)} - gq \|.$$

Do đó $\lim_{k\to\infty} \| q - fq \| = \lim_{k\to\infty} \| q - gq \| = 0.$ Suy ra $fq = gq = q$ hay $q \in Fix(f) \cap Fix(g).$ Theo Mệnh đề 2.2, ta có $\lim_{n\to\infty} \| u_n - q \|$ tồn tại nên $\{u_n\}$ hội tụ mạnh đến $q \in Fix(f) \cap Fix(g).$ □

Cuối cùng, chúng tôi đưa ra ví dụ minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp (2.1) đến điểm bất động chung của hai ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận. Đồng thời, ví dụ này cũng chứng tỏ rằng dãy lặp (2.1) hội tụ đến điểm bất động chung nhanh hơn dãy lặp trong bài báo của Wattanataweekul (2018).

Ví dụ 2.5. Cho $X = \mathbb{R}$ là không gian Banach với chuẩn giá trị tuyệt đối, $\Omega = [0,2], G = (V(G), E(G))$ là đồ thị định hướng với $V(G) = \Omega$ và $(x, y) \in E(G)$ khi và chỉ khi $0,75 < x \ne y < 1,70$ hoặc $x = y \in \Omega.$ Xét hai ánh xạ f, g xác định bởi

$$fx = \begin{cases} \frac{5}{8}\arcsin(x-1) + 1 & \text{nếu } x \ne \sqrt{3} \\ 0 & \text{nếu } x = \sqrt{3}, \end{cases} \quad \text{và}$$

$$gx = \begin{cases} x^{\ln x} & \text{nếu } x \ne \sqrt{2} \\ 2 & \text{nếu } x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Với $(x, y) \in E(G),$ ta có $0,75 < x, y < 1,70.$ Suy ra $(fx, fy), (gx, gy) \in E(G).$ Suy ra f, g bảo toàn cạnh. Hơn nữa, với $(x, y) \in E(G)$ và $1 \le \lambda_n \le 1,36$ ta chứng minh được

$\| f^n x - f^n y \| \le \lambda_n \| x - y \|$ và

$\| g^n x - g^n y \| \le \lambda_n \| x - y \|.$

Do đó f, g là ánh xạ *G*-không giãn tiệm cận. Ta có $Fix(f) \cap Fix(g) = \{1\} \ne \varnothing.$ Chọn $u_1 = 1,4$ ta có $(p, u_1), (u_1, p) \in E(G)$ với $p \in Fix(f) \cap Fix(g).$ Chọn $\alpha_n = \frac{n+1}{5n+3},$

$\beta_n = \dfrac{n+4}{10n+7}$. Khi đó, dãy lặp $\{u_n\}$ được xác định bởi (2.1) có dạng dưới đây hội tụ đến điểm bất động chung $p = 1$.

$$u_1 = 1{,}4 \text{ và}$$

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{9n+3}{10n+7}u_n + \dfrac{n+4}{10n+7}g^n u_n \\ u_{n+1} = \dfrac{4n+2}{5n+3}g^n v_n + \dfrac{n+1}{5n+3}f^n v_n. \end{cases} \quad (2.25)$$

Tuy nhiên, với $x = \sqrt{3}, y = 1$ và $u = \sqrt{2}$, $v = 1$, ta tính được

$$| fx - fy | > \lambda_1 | x - y |, \ | gu - gv | > \lambda_1 | u - v |.$$

Do đó, f, g không là ánh xạ không giãn tiệm cận. Vì vậy, những kết quả về sự hội tụ đến điểm bất động chung của hai ánh xạ không giãn tiệm cận sẽ không áp dụng cho hai ánh xạ này. Hơn nữa, với cách chọn hai ánh xạ f, g như trên thì dãy lặp $\{x_n\}$ được giới thiệu trong nghiên cứu của Wattanataweekul (2018) có dạng dưới đây cũng hội tụ đến điểm bất động chung $p = 1$.

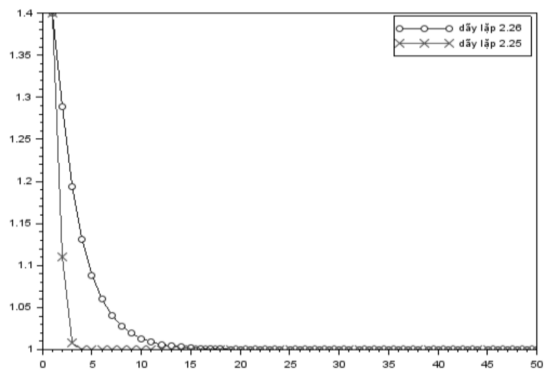
$$x_1 = 1{,}4 \text{ và}$$

$$\begin{cases} y_n = \dfrac{9n+3}{10n+7}x_n + \dfrac{n+4}{10n+7}g^n x_n \\ x_{n+1} = \dfrac{4n+2}{5n+3}y_n + \dfrac{n+1}{5n+3}f^n y_n. \end{cases} \quad (2.26)$$

Tuy nhiên, sự hội tụ của dãy lặp (2.25) đến điểm bất động chung $p = 1$ nhanh hơn sự hội tụ của dãy lặp (2.26) và được minh họa bởi bảng số liệu và hình ảnh minh họa dáng điệu sau.

Bảng 1. Số liệu hội tụ của dãy lặp (2.25) và (2.26)

n	x_n (dãy 2.26)	u_n (dãy 2.25)
1	1,4	1,4
2	1,2887079	1,1097846
3	1,1940112	1,0077474
4	1,130939	1,0003408
5	1,0886472	1,0000094
6	1,0601816	1,0000002
7	1,0409866	1,
…	…	…
46	1,	1,



Hình 1. Dáng điệu hội tụ của dãy lặp (2.25) và (2.26) đến 1 với n=50

Lời cảm ơn: Bài báo này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên mã số SPD2019.02.15./.

Tài liệu tham khảo

N. V. Dung and N. T. Hieu (2020), "Convergence of a new three-step iteration process to common fixed points of three *G*-nonexpansive mappings in Banach spaces with directed graphs", *Rev. R. Acad. Cienc. Exacts Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, 114: 140, pp. 1-24.

N. V. Dung and N. T. Hieu (2019), "A new hybrid projection algorithm for equilibrium problems and asymptotically quasi ϕ-nonexpansive mappings in Banach spaces", *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, (3), pp. 2017-2035.

K. Goebel and W. A. Kirk (1972), "A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, (1), pp. 171-174.

J. Jachymski (2008), "The contraction principle for mappings on a metric space with a graph", *Proc. Amer. Math. Soc.*, (4), pp. 1359-1373.

M. G. Sangago, T. W. Hunde and H. Z. Hailu (2018), "Demiclodeness and fixed points of G-asymptotically nonexpansive mapping in Banach spaces with graph", *Fixed Point Theory*, (3), pp. 313-340.

N. Shahzad and R. Al-Dubiban (2006), "Approximating common fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces", *Georgian Math. J.*, (3), pp. 529-537.

R. Suparatulatorn, W. Cholamjiak, S. Suantai (2018), "A modified S-iteration process for *G*-nonexpansive mappings in Banach spaces with graphs", *Numer Algor*, (2), pp. 479-490.

M. Wattanataweekul (2018), "Approximating common fixed points for two *G*-asymptotically nonexpansive mappings with directed graphs", *Thai J. Math.*, (3), pp. 817-830.