

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH LỚP 4 THÔNG QUA DẠY HỌC MÔN TOÁN

Phạm Thị Kim Châu

Khoa Giáo dục Tiểu học - Mầm non, Trường Đại học Đồng Tháp

Email: ptkchau1978@gmail.com

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 11/7/2022; Ngày nhận chỉnh sửa: 15/8/2022; Ngày duyệt đăng: 30/10/2022

Tóm tắt

Phát triển năng lực là một trong những nhiệm vụ quan trọng trong dạy học toán tiểu học. Bài viết đề xuất một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 4 thông qua dạy học môn Toán.

Từ khóa: *Phát triển năng lực, Toán 4, tư duy và lập luận.*

DEVELOPING 4TH GRADE STUDENTS' MATHEMATICAL REASONING COMPETENCIES THROUGH TEACHING MATHEMATICS

Pham Thi Kim Chau

Faculty of Primary and Pre-school Education, Dong Thap University

Email: ptkchau1978@gmail.com

Article history

Received: 11/7/2022; Received in revised form: 15/8/2022; Accepted: 30/10/2022

Abstract

Competency development is one of the important tasks in teaching mathematics in primary schools. The article proposes some measures to develop 4th grade students' mathematical reasoning competencies through teaching mathematics.

Keywords: *Competency development, Grade 4 mathematics, reasoning.*

1. Đặt vấn đề

Dạy học phát triển năng lực (NL) nói chung, phát triển năng lực tư duy (NLTD) và lập luận toán học (LLTH) nói riêng là mục tiêu quan trọng trong chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018. Toán 4 có nhiều cơ hội cho học sinh (HS) tập luyện các thao tác tư duy, tập dượt các suy luận logic và giải thích cũng như điều chỉnh cách thức giải quyết vấn đề (GQVĐ) về phương diện toán học. Bài viết quan tâm các biện pháp phát triển NLTD và LLTH cho HS lớp 4.

2. Quan niệm năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh lớp 4

Tư duy là một quá trình nhận thức, phản ánh những thuộc tính bản chất phát hiện ra tính quy luật của sự vật (Trần Ngọc Lan và Trương Thị Tố Mai, 2015). Quá trình tư duy toán học ở tiểu học thường được thực hiện bởi thao tác tư duy: Phân tích, so sánh, tổng hợp, cụ thể hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa, trừu tượng hoá, khái quát hoá.

Lập luận là trình bày có lí lẽ, hệ thống để chứng minh cho kết luận về vấn đề nào đó. Việc rút ra kết luận bằng các lập luận dựa trên cơ sở vận dụng các quy tắc suy luận (Phạm Đình Thực, 2009). Các suy luận thường sử dụng trong dạy học toán tiểu học gồm quy nạp, suy diễn và tương tự. Như vậy, *lập luận toán học là khả năng của mỗi cá nhân dựa vào những tiền đề cho trước, sử dụng ngôn ngữ toán học để đưa ra các kết luận đúng. Đó là kết quả của quá trình tư duy logic, bằng một chuỗi các suy luận để GQVĐ.*

Tư duy và lập luận toán học có quan hệ mật thiết với nhau, biện chứng lẫn nhau, tư duy diễn ra trong suy nghĩ và bộc lộ ra bên ngoài qua ngôn ngữ, qua lập luận. Lập luận là kết quả của quá trình tư duy và ngược lại tư duy để đưa ra lập luận. Cả tư duy và lập luận đều phải thông qua ngôn ngữ để thực hiện thao tác, hoạt động. Kế thừa các nghiên cứu nêu trên, chúng tôi quan niệm *NLTD và LLTH của HS lớp 4 là khả năng HS lớp 4 sử dụng các thao tác tư duy và suy luận toán học để giải thích, chỉ ra chứng cứ, lập luận, điều chỉnh cách thức giải quyết vấn đề nhằm đưa ra kết luận đúng trong những điều kiện cụ thể.*

3. Biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 4 thông qua dạy học môn Toán

3.1. Nhóm biện pháp 1: Tăng cường cho học sinh các thao tác tư duy trong các hoạt động dạy học

Theo quy luật lượng chất, khi tích lũy đủ về lượng sẽ chuyển thành chất. Lượng là số lần được tập luyện, HS có cơ hội được tập luyện thường xuyên thì sẽ dần chuyển hóa thành kĩ năng, kĩ xảo, thành NL. Một trong những cách tăng cường các thao tác tư duy và lập luận hiệu quả đó là sử dụng các phương pháp kích thích tư duy và LLTH của HS như: Dạy học tương tác; Sử dụng lời khuyên; khuyến khích HS biểu đạt tư duy bằng nhiều hình thức.

3.1.1. Dạy học tương tác

Từ những năm 1960, Viện Nghiên cứu Giáo dục Mỹ đã cho ra đời tháp học tập với các mức độ lưu giữ thông tin của người học như sau: Nghe (5%), đọc (10%), nghe nhìn (20%), thuyết trình (30%), thảo luận nhóm (50%), trải nghiệm (75%) và dạy lại cho người khác (90%) (Dẫn theo Nguyễn Hữu Châu và cs., 2007). Theo đó, nếu học không có sự tương tác thì khả năng lưu lại thông tin rất thấp. GV có thể tổ chức dạy học tương tác theo tiến trình: *Xác định cách giải quyết tình huống, giải quyết tình huống (khuyến khích làm việc nhóm), báo cáo kết quả.*

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau bằng cách nhanh nhất:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}; \quad B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8};$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16};$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}.$$

- *Xác định cách giải quyết tình huống:* HS quan sát hình thức các biểu thức, thảo luận sự tương đồng là các biểu thức được trình bày theo trật tự ngụ ý quy luật. Từ đó, HS bác bỏ cách tính thủ công theo kiểu quy đồng cộng kênh từng cặp phân số trong từng biểu thức, thống nhất cần tìm quy luật tính tổng nhanh.

- *Giải quyết tình huống:* Có nhiều cách tính tổng nhanh mà cách nào cũng mang lại đáp số đúng. Sau đây là một vài cách mà HS thường thực hiện. Cụ thể: HS phân tích, lập luận và trình bày cách tính tổng nhanh cho A, B, C:

$$\bullet \quad A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}; \quad 4 \times A = 2 + 1; \quad A = \frac{3}{4}$$

$$\bullet \quad B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8};$$

$$8 \times B = 4 + 2 + 1; B = \frac{7}{8}$$

$$\bullet C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16};$$

$$16 \times C = 8 + 4 + 2 + 1; C = \frac{15}{16}.$$

Với cách phân tích và tính toán như trên, HS tìm ra được kết quả của từng biểu thức mà chưa hiểu được ý nghĩa của nó. Dạy học không chỉ tổ chức cho HS tìm ra kết quả tính toán mà cần đảm bảo cho HS vừa khám phá cách GQVĐ vừa hiểu được ý nghĩa của kiến thức được khám phá. Ý nghĩa của cách tính tổng nhanh trong trường hợp này đó là thông qua phân bù của tổng. Cụ thể:

$$\bullet 2 \times A = 1 + \frac{1}{2}; 2 \times A - A = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\bullet B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8};$$

$$2 \times B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4};$$

$$2 \times B - B = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\bullet C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16};$$

$$2 \times C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8};$$

$$2 \times C - C = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

HS khảo sát các trường hợp cụ thể A, B, C kết hợp phân tích, so sánh:

Nhận xét: $\frac{1}{4}$ là số hạng cuối của A, $\frac{1}{8}$ là số hạng cuối của B, $\frac{1}{16}$ là số hạng cuối của C. Tổng hợp từ 3 trường hợp cụ thể như trên, HS khái quát cách tính tổng nhanh và áp dụng cho D như sau: Vì số hạng cuối của D là $\frac{1}{256}$ nên $D = 1 - \frac{1}{256}$. Vậy $D = \frac{255}{256}$.

Một cách phân tích, khái quát khác cũng có thể xem xét. Đó là: Từ các kết quả $A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{7}{8}$, $C = \frac{15}{16}$, khi tổng hợp, HS nhận thấy các tử số đều nhỏ hơn mẫu số 1 đơn vị, các mẫu số này trùng với

các mẫu số của số hạng cuối trong mỗi biểu thức. Tương tự, vì D có mẫu số của số hạng cuối là 256 nên tổng $D = 1 - \frac{1}{256}$. Vậy $D = \frac{255}{256}$. Với cách tư duy và lập luận trong trường hợp này chỉ khái quát được mẹo tính tổng nhanh, chưa phản ánh được ý nghĩa và bản chất của cách tính tổng nhanh cần hình thành. GV cần giải thích cho HS hiểu vấn đề này để HS điều chỉnh cách tiếp cận tính toán theo hướng thể hiện bản chất ý nghĩa kiến thức nêu trên.

- *Báo cáo kết quả: Đại diện các nhóm trình bày cách giải quyết của nhóm mình.*

Trong tình huống trên, sự tương tác thể hiện thông qua trả lời câu hỏi, trình bày ý kiến, quan điểm, thảo luận, tranh luận, thuyết phục người khác đồng tình hay bác bỏ, thu hút các thỏa thuận không ngoan để giải quyết... đó luôn là cơ hội để HS chỉ ra chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí trước khi kết luận. Từng bước HS được trau dồi khả năng lập luận logic, chặt chẽ, chính xác. Hoạt động tương tác nhóm trở thành quá trình học hỏi lẫn nhau, phát triển kĩ năng xã hội để học tập suốt đời chứ không chỉ đơn thuần khám phá kiến thức trong phạm vi bài học. Khi kết thúc sự tương tác, HS có được niềm vui của sự khám phá, trưởng thành về mặt tư duy và LLTH.

3.1.2. Sử dụng lời khuyên

Trong dạy học, thường xuyên sử dụng lời khuyên sẽ kích thích HS tư duy và lập luận; sự tự tin, hứng thú và phương pháp học tập tích cực của HS cũng được khuyến khích nhiều đến mức có thể. Một số lời khuyên có thể sử dụng gồm: Hãy tự tin vào bản thân. Tôi tin rằng bạn sẽ làm tốt. Bạn có thể liên tưởng đến giải pháp tuyệt vời khi biểu diễn chúng trên một sơ đồ/mô hình. Tôi tin rằng bạn đã khảo sát cẩn thận, hãy nêu những nhận xét tuyệt vời của bạn. Dự đoán/nhận xét của bạn rất hợp lí. Hãy nêu thêm các dự đoán/nhận xét hợp lí khác. Đó là một ý tưởng tuyệt vời. Hãy thử ngay phương án tuyệt vời của bạn. Hãy trình bày phương án tuyệt vời của bạn. Tôi tin rằng bạn sẽ tìm được phương án tuyệt vời khác. Tôi tin rằng bạn đã kiểm nghiệm cẩn thận, hãy trình bày cách kiểm nghiệm của bạn. Để có kết luận tuyệt vời này bạn đã dựa trên các căn cứ nào? Mỗi ý kiến nhận xét sẽ làm cho sản phẩm của bạn trở nên hoàn hảo hơn. Bạn có thể ghi nhớ tốt hơn khi dùng một công cụ nào đó hỗ trợ - chẳng hạn *Sơ đồ tư duy*. Bạn cần biết mình còn thiếu điều gì để thành công, hãy ghi ra những ưu nhược điểm của bạn, cách phát huy và cách hạn

chế chúng. Bạn chỉ thiếu một phương pháp học hiệu quả, hãy dành thời gian để tìm ra nó.

3.1.3. Thường xuyên khuyến khích học sinh biểu đạt tư duy và lập luận bằng nhiều hình thức

Tư duy và ngôn ngữ có quan hệ mật thiết với nhau. Tư duy chỉ tồn tại nhờ cái vỏ ngôn ngữ, ngôn ngữ là hiện thực trực tiếp của tư duy, ngôn ngữ được xem là phương tiện của tư duy, các sản phẩm của tư duy như khái niệm, phán đoán, suy luận cần được biểu đạt bằng ngôn ngữ (Trần Ngọc Lan và Trương Thị Tố Mai, 2015). Ngôn ngữ biểu đạt của tư duy gồm ngôn ngữ nói, viết, kí hiệu, hình thể, sơ đồ, biểu đồ... Chẳng hạn, HS viết hoặc nêu bài toán theo tranh, viết hoặc nêu phép tính thích hợp, tóm tắt bài toán bằng ngôn ngữ viết hoặc sơ đồ, sử dụng bản đồ tư duy trong các trường hợp hệ thống, củng cố kiến thức... Thông qua giao tiếp, khuyến khích HS biểu đạt lập luận bằng nhiều hình thức như ngôn ngữ toán học, ngôn ngữ thông thường. HS có thể biểu đạt cách GQVĐ với nhiều hình thức khác nhau: Biểu thức, bảng, mô hình trực quan... Việc biểu đạt tư duy và lập luận bằng nhiều hình thức sẽ là cơ hội tiếp cận vấn đề một cách linh hoạt. Do đó, cần khuyến khích HS biểu đạt tư duy bằng nhiều hình thức khác nhau để phát triển tư duy và lập luận cho HS.

3.2. Nhóm biện pháp 2: Tập luyện cho học sinh chỉ ra chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí trước khi kết luận

Chúng ta biết rằng trong tư duy có logic thì lập luận bộc lộ ra bên ngoài sẽ có căn cứ và định hướng được các hành động hiệu quả. Do đó, trong dạy học cần tạo cơ hội cho HS tập luyện chỉ ra chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí trước khi kết luận thông qua hoạt động kết nối giữa tiền đề và kết luận theo các quy tắc suy luận trong hoạt động hình thành kiến thức khái quát, trong hoạt động vận dụng kiến thức khái quát đã học.

3.2.1. Tập luyện cho học sinh chỉ ra chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí trước khi kết luận thông qua hoạt động dạy học hình thành kiến thức khái quát

a. Đối với hình thành khái niệm

GV có thể tổ chức cho HS khảo sát các sự vật hoặc hiện tượng cụ thể, nhận xét các dấu hiệu chung của các đối tượng khảo sát, khái quát hoá đặc điểm và giới thiệu khái niệm.

Ví dụ 2: Hình thành khái niệm hình thoi (Đỗ Đình Hoan và cs., 2020):



Hình 1.

- *Khảo sát các sự vật hoặc hiện tượng cụ thể.* Với hoa văn của phần gạch ốp như hình trên, yêu cầu HS thực hiện các công việc: Đặt tên các đỉnh của các hình (A, B, C, D, E...). Dự đoán tên các hình có trong hình trên (hình bình hành, hình thoi, hình tứ giác...). Liệt kê tên các hình (hình bình hành ABCD... Hình thoi ABCD... Hình tứ giác ABCD...). Nêu tính chất các cặp cạnh đối diện của mỗi hình đã liệt kê (hai cặp cạnh đối diện song song). Đo độ dài các cạnh mỗi hình đã liệt kê. Lập bảng thống kê số liệu các dữ kiện đã khảo sát nêu trên.

- *Nhận xét các dấu hiệu chung của các đối tượng khảo sát.* Nêu đặc điểm các cạnh của mỗi hình đã liệt kê (hình có hai cặp cạnh đối diện song song và bốn cạnh bằng nhau). Nêu dấu hiệu giống nhau giữa các hình đã liệt kê (các hình đều có hai cặp cạnh đối diện song song và bốn cạnh bằng nhau).

- *Khái quát hoá đặc điểm và giới thiệu khái niệm.* Giới thiệu: Hình có hai cặp cạnh đối diện song song và bốn cạnh bằng nhau gọi là hình thoi. Khái quát: Hình thoi có hai cặp cạnh đối diện song song và bốn cạnh bằng nhau.

Theo cách tổ chức các hoạt động như trên, HS có cơ hội phát triển NLTD và LLTH. Cụ thể: HS có cơ hội tập dượt phân tích thông qua việc chia hình hoa văn phần gạch ốp thành các hình nhỏ quen thuộc, từ các hình này HS đi sâu khảo sát các cạnh mỗi hình. HS có cơ hội tập dượt tổng hợp các dữ kiện đã khảo sát vào bảng thống kê số liệu, đó là cơ sở để HS kết nối, so sánh đối chiếu các dữ kiện để nhận ra dấu hiệu giống nhau giữa các hình. HS có cơ hội tập dượt trừu tượng thông qua việc loại bỏ các dấu hiệu không bản chất như gạch ốp, màu sắc, to nhỏ, rộng hẹp, nhiều ít, đẹp xấu... giữ lại dấu hiệu biểu tượng hình và đặc điểm các cạnh mỗi hình. HS có cơ hội tập dượt khái quát các dấu hiệu giống nhau của mỗi hình thành đặc điểm của hình thoi, từ đó hình thành khái niệm hình thoi. HS có cơ hội tập dượt lập luận thông qua hoạt động nêu bằng lời nói hoặc viết thành lời văn các nhận xét theo yêu cầu.

b. Đối với hình thành công thức, quy tắc, quy trình tính, dấu hiệu, tính chất

Toán ở tiểu học thường sử dụng suy luận quy nạp không hoàn toàn trong hình thành các công thức, quy tắc, quy trình tính... Dự đoán tổng quát được rút ra có thể đúng hoặc sai, cần kiểm nghiệm trước khi sử dụng. Theo đó, GV có thể tổ chức cho HS *khảo sát các trường hợp cụ thể, nhận xét các dấu hiệu chung của các đối tượng khảo sát, dự đoán khái quát, kiểm nghiệm*.

Ví dụ 3: Hình thành quy tắc cộng hai phân số cùng mẫu số (Đỗ Đình Hoan và cs., 2020). Để nhấn mạnh dấu hiệu chung của các đối tượng khảo sát, trong tình huống này, GV có thể tổ chức theo nhóm, mỗi nhóm được giao các băng giấy khác nhau (to, nhỏ, dài, ngắn, màu sắc...). Cụ thể:

- *Khảo sát các trường hợp cụ thể.* Chia băng giấy thành 8 phần bằng nhau. Tô màu $\frac{3}{8}$ băng giấy, tô màu tiếp $\frac{2}{8}$ băng giấy. Viết phép tính chỉ phần đã tô màu ($\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$). Đã tô màu bao nhiêu phần của băng giấy? (5 phần). Viết phân số chỉ phần đã tô màu ($\frac{5}{8}$). Ta có $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$.

- *Nhận xét các dấu hiệu chung của các đối tượng khảo sát.* Nhận xét mẫu số của phân số $\frac{3}{8}$ và phân số $\frac{2}{8}$ (hai phân số cùng mẫu số). Nhận xét tử số của phân số $\frac{5}{8}$ so với tử số của phân số $\frac{3}{8}$ và phân số $\frac{2}{8}$ (nhận thấy $5=3+2$). Nhận xét mẫu số của phân số $\frac{5}{8}$ so với mẫu số của phân số $\frac{3}{8}$ và phân số $\frac{2}{8}$ (ba phân số cùng mẫu số 8/mẫu số 8 không thay đổi/giữ nguyên mẫu số 8).

- *Dự đoán khái quát.* Các số 3, 2, 5 gọi là gì của các phân số? (các tử số). Số 8 gọi là gì của các phân số? (các mẫu số). Muốn cộng hai phân số cùng mẫu số ta làm thế nào? (Muốn cộng hai phân số cùng mẫu số, ta cộng hai tử số và giữ nguyên mẫu số).

- *Kiểm nghiệm.* Tính $\frac{5}{18} + \frac{7}{18}$ bằng cách tô

màu trên băng giấy (chia băng giấy thành 18 phần bằng nhau, tô màu 5 phần, tô màu tiếp 7 phần, đếm được 12 phần, viết phân số chỉ phần đã tô màu là $\frac{12}{18}$). Tính $\frac{5}{18} + \frac{7}{18}$ bằng cách áp dụng quy tắc vừa dự đoán ($\frac{5}{18} + \frac{7}{18} = \frac{5+7}{18}$). Đối chiếu kết quả hai cách tính (kết quả bằng nhau). Khẳng định dự đoán đúng.

Theo cách tổ chức các hoạt động như trên, HS có cơ hội phát triển NLTD và LLTH. Cụ thể: HS có cơ hội tập dượt phân tích thông qua việc quan sát, chia băng giấy thành 8 phần bằng nhau, xác định các phần cần tô màu và các phân số chỉ số phần đã tô màu... HS có cơ hội tập dượt trừu tượng thông qua việc loại bỏ các dấu hiệu không bản chất như băng giấy, màu sắc, to nhỏ, rộng hẹp, dài ngắn, nhiều ít, đẹp xấu... giữ lại dấu hiệu tổng hai phân số cùng mẫu số. HS có cơ hội tập dượt tư duy so sánh thông qua việc so sánh tử số với nhau và mẫu số của các phân số với nhau. HS có cơ hội tập dượt tư duy tổng hợp các dữ kiện $5=3+2$, 5 là tử số của kết quả tổng, 3 và 2 là tử số của các phân số số hạng, 8 là mẫu số không thay đổi. Từ việc khảo sát ví dụ cụ thể, HS khái quát để có cơ sở dự đoán và rút ra quy tắc chung cần hình thành. HS có cơ hội tập dượt lập luận thông qua hoạt động nêu bằng lời nói hoặc viết thành lời văn các nhận xét theo yêu cầu. Trong tư duy có logic thì lập luận được bộc lộ ra bên ngoài sẽ có căn cứ và định hướng được các hành động hiệu quả. HS sử dụng các phép tính cụ thể ở bước 1, phép tính cụ thể ở bước 3 như là chứng cứ, lí lẽ để lập luận hợp lí trước khi kết luận. HS có cơ hội tập dượt kiểm nghiệm thông qua việc chọn trường hợp cụ thể, so sánh kết quả giữa việc áp dụng kiến thức mới vừa dự đoán và áp dụng cách tính thủ công, khẳng định hoặc bác bỏ dự đoán, điều chỉnh dự đoán.

Ngoài hướng quy nạp như trên, GV có thể hình thành công thức, quy tắc, quy trình tính, dấu hiệu, tính chất... theo hướng sử dụng tương tự. Tương tự là phép suy luận đi từ sự giống nhau của một số thuộc tính nào đó của hai đối tượng để rút ra kết luận về sự giống nhau của các thuộc tính khác của hai đối tượng đó. Theo đó, GV có thể tổ chức cho HS *khảo sát các trường hợp cụ thể, nhận xét*

các dấu hiệu chung của các đối tượng khảo sát, dự đoán khái quát, kiểm nghiệm.

Ví dụ 4: Hình thành tính chất giao hoán của phép nhân (Đỗ Đình Hoan và cs., 2020):

- *Khảo sát các trường hợp cụ thể.* Nhắc lại tên gọi các thành phần trong phép cộng $a + b$ (a và b là số hạng, $a + b$ là tổng). Nhắc lại tính chất giao hoán của phép cộng (khi đổi chỗ các số hạng trong một tổng thì tổng không thay đổi). Viết kí hiệu thích hợp vào chỗ chấm $a + b = \dots + \dots$

- *Nhận xét dấu hiệu chung của các đối tượng khảo sát.* Nhắc lại tên gọi các thành phần trong phép nhân $a \times b$ (a và b là thừa số, $a \times b$ là tích). Khi đổi chỗ các thừa số trong một tích thì tích như thế nào?

- *Dự đoán khái quát.* Tương tự, dự đoán khi đổi chỗ các thừa số trong một tích thì tích không thay đổi. Viết kí hiệu thích hợp vào chỗ chấm $a \times b = \dots \times \dots$

- *Kiểm nghiệm.* Biết $6 \times 215 = 1290$, áp dụng cách tính vừa dự đoán để tìm kết quả của 215×6 . Đặt tính và tính để tìm kết quả của 215×6 . Đối chiếu kết quả hai cách tính (kết quả bằng nhau). Khẳng định dự đoán đúng.

Theo cách tổ chức như trên, HS có cơ hội phát triển NLTD và LLTH như sau: HS có cơ hội tập dượt phân tích thông qua việc tách cấu trúc câu phát biểu của tính chất thành các dấu hiệu thành phần “đổi chỗ”, “các số hạng trong một tổng”, “tổng không thay đổi”. HS có cơ hội tập dượt khái quát thông qua việc kí hiệu a và b là các số hạng, $a + b$ là tổng; kí hiệu a và b là các thừa số, $a \times b$ là tích. HS có cơ hội tập dượt so sánh thông qua việc đối chiếu sự giống nhau trong cấu trúc của câu phát biểu tính chất của phép cộng và phép nhân, nhận ra sự khác nhau của các cụm từ “tổng” và “tích”, “số hạng” và “thừa số”, nhận ra sự giống nhau của các cụm từ “đổi chỗ”, “không thay đổi”. HS có cơ hội tập dượt tổng hợp thông qua việc kết nối và thay thế các cụm từ tương ứng trong phép cộng nêu trên thành các cụm từ tương ứng trong phép nhân theo cấu trúc phát biểu tương tự như tính chất giao hoán của phép cộng. HS có cơ hội tập dượt dự đoán thông qua việc phát biểu tính chất giao hoán của phép nhân tương tự với tính chất giao hoán của phép cộng. HS sử dụng tính chất giao hoán của phép cộng ở bước 1 như là minh chứng, lí lẽ để lập luận hợp lí trước khi kết luận về

tính chất giao hoán của phép nhân. HS có cơ hội tập dượt kiểm nghiệm thông qua việc chọn trường hợp cụ thể 215×6 , so sánh kết quả tính giữa cách áp dụng tính chất giao hoán vừa dự đoán và kết quả từ cách đặt tính, khẳng định hoặc bác bỏ dự đoán, điều chỉnh dự đoán. Tóm lại, HS có cơ hội trải nghiệm và huy động tổng hợp các kiến thức, kĩ năng, kinh nghiệm đã có để kết nối và nhận ra các dấu hiệu chung từ các trường hợp cụ thể. GV cần tạo cơ hội cho tất cả HS đều được tham gia vào quá trình khám phá với những nhiệm vụ phù hợp, cần chú ý tập luyện cho HS trình bày hoặc diễn đạt một cách logic.

3.2.2. *Tập luyện cho học sinh chỉ ra chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí trước khi kết luận thông qua hoạt động dạy học vận dụng kiến thức khái quát*

a. *Vận dụng khái niệm*

Với nội dung toán lớp 4, nội dung vận dụng khái niệm có thể thông qua các bài tập nhận dạng khái niệm. Theo đó, GV có thể tổ chức cho HS *Nhắc lại đặc điểm của khái niệm, đối chiếu đặc điểm của đối tượng đang xét với đặc điểm của khái niệm.* Nếu đối tượng có đầy đủ các đặc điểm của khái niệm thì đối tượng đó thuộc ngoại diện của khái niệm đang xét, *kết luận trên đối tượng cụ thể đang xét.*

Ví dụ 5: Với bài tập “Trong các hình, hình nào là hình bình hành?” (Đỗ Đình Hoan và cs., 2020):

- *Nhắc lại đặc điểm của khái niệm:* HS nhắc lại đặc điểm của hình bình hành (hình bình hành có hai cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau).

- *Đối chiếu đặc điểm của đối tượng đang xét với đặc điểm của khái niệm:* Xác định hai cặp cạnh đối diện. Dùng thước kiểm tra tính song song của hai cặp cạnh đối diện. Dùng thước kiểm tra sự bằng nhau của hai cặp cạnh đối diện. Nhận xét (Hình 1 có hai cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau).

- *Kết luận trên đối tượng cụ thể đang xét:* Hình ... là hình bình hành.

Theo cách tổ chức như trên, HS có cơ hội phát triển NLTD và LLTH. Cụ thể: HS được tập dượt phân tích thông qua việc đưa khái niệm hình bình hành về yếu tố cạnh, chi tiết trên cạnh đối diện với đặc điểm cặp cạnh đối diện song song, cặp cạnh đối diện bằng nhau. Khảo sát các hình trên yếu tố cạnh, xác định các cặp cạnh đối diện, kiểm tra tính song song và sự bằng nhau của hai cặp cạnh đối diện. HS được tập dượt so sánh thông qua việc kết nối sự

liên tưởng về đặc điểm của khái niệm hình bình hành với yêu cầu bài tập, so sánh tính chất song song và độ dài của các cặp cạnh đối diện, từ đó đối chiếu đặc điểm của các hình đang xem xét với đặc điểm của hình bình hành. HS được tập duyệt tổng hợp thông qua việc xác định hình nào thỏa mãn đầy đủ và hình nào chưa thỏa mãn đầy đủ đặc điểm của hình bình hành. Đó cũng là cơ hội để HS xem xét minh chứng để nêu kết luận các hình nào là hình bình hành và hình nào không là hình bình hành, qua đó tập duyệt HS chỉ ra chứng cứ, lí lẽ, lập luận hợp lí trước khi kết luận.

b. Vận dụng công thức, quy tắc, quy trình tính, dấu hiệu, tính chất

Việc vận dụng công thức, quy tắc, quy trình tính... ở tiểu học thường sử dụng suy luận suy diễn. Suy diễn là phương pháp suy luận mà tiền đề mang tính chất chung, tổng quát, còn kết luận mang tính chất riêng, cụ thể. Theo đó, GV có thể tổ chức cho HS *nhắc lại công thức, quy tắc, quy trình tính... cần vận dụng; vận dụng công thức, quy tắc, quy trình tính... vào trường hợp cụ thể; kết luận cho trường hợp cụ thể đã xét.*

Ví dụ 6: Tính $\frac{2}{4} + \frac{3}{4}$.

- Nhắc lại công thức, quy tắc, quy trình tính... cần vận dụng: Vài HS nhắc lại quy tắc cộng hai phân số cùng mẫu số.

- *Vận dụng công thức, quy tắc, quy trình tính... vào trường hợp cụ thể:* HS tự làm. HS giải thích cách làm ($\frac{2}{4}$ và $\frac{3}{4}$ là hai phân số cùng mẫu số, $\frac{2}{4} + \frac{3}{4}$ là cộng hai phân số cùng mẫu số, lấy hai tử số cộng lại với nhau 2+3, giữ nguyên mẫu số 4). GV hướng dẫn nếu HS gặp khó khăn.

- Kết luận cho trường hợp cụ thể đã xét: HS nêu kết quả ($\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$).

Theo cách tổ chức như trên, HS có cơ hội phát triển NLTD và LLTH. Cụ thể: HS được tập duyệt phân tích thông qua việc tách cấu trúc quy tắc thành các yếu tố nhỏ hơn như phân số, tử số và mẫu số; các thao tác chi tiết hơn như cộng tử số, giữ nguyên mẫu số; khảo sát hai phân số, xác định các tử số và mẫu số. HS được tập duyệt so sánh thông qua việc so sánh hai mẫu số. HS được tập

duyet tổng hợp thông qua việc kết nối các yếu tố đã khảo sát, từ đó xác định bài tập 1a là cộng hai phân số cùng mẫu số. HS có cơ hội tập duyệt đặc biệt hóa thông qua việc áp dụng quy tắc vào phân số cụ thể $\frac{2}{4}$ và $\frac{3}{4}$, cụ thể hóa việc cộng hai tử số khái quát trong quy tắc vào trường hợp 2+3, cụ thể hóa việc giữ nguyên mẫu số khái quát trong quy tắc vào trường hợp giữ nguyên mẫu số 5. HS tập duyệt xem xét các minh chứng nêu trên là căn cứ để nêu kết luận $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, qua đó tập duyệt HS chỉ ra chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí trước khi kết luận.

3.3. Nhóm biện pháp 3: Tập luyện học sinh giải thích hoặc điều chỉnh cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học

3.3.1. Sử dụng các tình huống có nhiều cách thức giải quyết

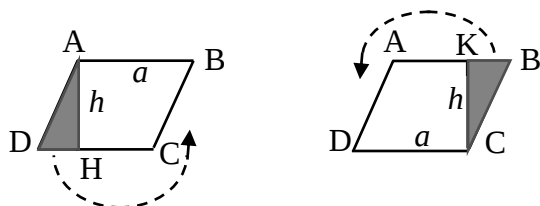
Khi GVĐD bằng nhiều cách khác nhau, HS có cơ hội nói hoặc viết ra những gì mình suy nghĩ, được tập luyện tìm hiểu vấn đề ở nhiều khía cạnh khác nhau, trải nghiệm được nhiều cách lập luận logic, tích lũy được nhiều kinh nghiệm nêu chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí trước khi kết luận, đánh giá tính ưu việt của từng cách thức giải quyết. Do vậy tập cho học sinh giải quyết vấn đề theo nhiều cách khác nhau được xem là một trong các biện pháp quan trọng trong dạy học phát triển NLTD và LLTH.

a. Đối với hoạt động hình thành kiến thức

GV tổ chức cho HS trình bày ý tưởng và đưa ra nhiều cách giải quyết vấn đề khác nhau. Từ các ý tưởng và cách thức đó, giáo viên tổ chức cho học sinh phân tích nội dung, ý nghĩa, các mối quan hệ lẫn nhau. Trên cơ sở đó, giáo viên tập cho học sinh nhận định và phát hiện được cách giải quyết vấn đề nào là tối ưu để đạt được mục tiêu học tập.

Ví dụ 7: Hình thành quy tắc tính diện tích hình bình hành (Đỗ Đình Hoan và cs., 2020), GV có thể tổ chức cho HS cắt hình bình hành ghép thành hình chữ nhật theo nhiều cách khác nhau như sau: Hãy cắt hình bình hành để ghép thành 1 hình chữ nhật (Thông thường, HS sẽ cắt theo đường cao AH như gợi ý trong SGK và ghép thành hình chữ nhật). Hãy trình bày cách cắt ghép. Với cách cắt ghép này ta tìm diện tích hình bình hành thế nào? (Diện tích hình bình hành bằng diện tích hình chữ nhật, chiều rộng hình chữ nhật bằng chiều cao hình bình hành, chiều

dài hình chữ nhật bằng độ dài đáy hình bình hành. Vậy diện tích hình bình hành bằng diện tích hình chữ nhật và bằng $a \times h$). Còn có cách cắt ghép nào khác? (Cắt theo đường cao CK và ghép thành hình chữ nhật). Với cách cắt ghép này ta tìm diện tích hình bình hành thế nào? (Diện tích hình bình hành đầu bằng diện tích hình chữ nhật, chiều rộng hình chữ nhật bằng chiều cao hình bình hành, chiều dài hình chữ nhật bằng độ dài đáy hình bình hành. Diện tích hình bình hành bằng diện tích hình chữ nhật và bằng $a \times h$). HS nhận xét hai cách cắt ghép (Tương tự nhau, cách 1 cắt tại AH, ghép vào cạnh BC, cách 2 cắt tại CK, ghép vào cạnh AD. Cả hai cách cùng tạo thành hình chữ nhật có diện tích như nhau). HS nhận xét hai cách tính diện tích hình bình hành (Cả hai cách cắt ghép cùng tạo thành hình chữ nhật có diện tích như nhau nên cách tính diện tích hình bình hành cũng như nhau). GV khẳng định cách tính diện tích hình bình hành.



Hình 2.

b. Đối với hoạt động thực hành luyện tập

GV sử dụng các dạng toán có nhiều cách giải quyết. Ở tiểu học, có nhiều dạng toán có thể khai thác nhiều cách giải quyết, sau đây là một số dạng toán cụ thể:

Với dạng toán tính giá trị biểu thức, HS có thể giải quyết bằng nhiều cách khác nhau như sau: Cách 1: HS thường thực hiện lần lượt từng phép nhân, chia rồi cộng, trừ các kết quả với nhau. Cách 2: HS có thể sử dụng tính chất giao hoán, kết hợp để đổi chỗ và nhóm các phân số lại với nhau cho thuận tiện, rút gọn, nhân một số với một hiệu, chia một tổng cho một số... Để tính toán nhanh hơn, với dạng toán này, GV cần định hướng HS khai thác các tính chất phép toán để rút ngắn thời gian tính toán. Việc chuyển đổi cách tính công kênh về cách tính đơn giản hợp lý ta nói có sự tham gia của các thao tác tư duy ở mức sáng tạo; tính toán đột phá, nhảy vọt, thu gọn các bước lập luận.

Với dạng toán so sánh phân số, HS có thể so sánh bằng nhiều cách khác nhau: Cách 1: Thông thường HS quy đồng hai phân số về cùng tử số hoặc cùng mẫu số rồi áp dụng quy tắc so sánh hai

phân số cùng mẫu số hoặc cùng tử số. Cách này khá công kênh nhưng sẽ áp dụng được cho mọi cặp phân số. Cách 2: HS có thể so sánh hai phân số với số 1, so sánh hai phân số với phân số trung gian, so sánh hai phân số thông qua phần bù của một phân số. Các cách này mặc dù nhanh gọn nhưng không thể áp dụng được cho tất cả các cặp phân số. Tùy vào đặc điểm của từng cặp phân số cần so sánh mà linh hoạt áp dụng các cách so sánh hợp lý.

Với dạng toán đếm hình, HS có thể so sánh bằng nhiều cách khác nhau: Cách 1: Đếm trực tiếp từng hình. Cách này khá công kênh dễ sai sót, có thể áp dụng cho các hình có số lượng hình cần đếm tương đối nhỏ. Cách 2: Đếm nhanh bằng phép tính. Nếu hình có tiềm ẩn quy luật thì cần xác định quy luật và đếm theo quy luật.

Trong toán 4 nói riêng, có rất nhiều dạng toán khác cũng có nhiều cách giải quyết. GV cần khai thác các dạng toán đó để HS tích lũy kinh nghiệm giải thích và điều chỉnh cách thức GQVĐ, dần phát triển NLTD và LLTH.

3.3.2. Sử dụng hệ thống câu hỏi kích thích nhu cầu giải thích và điều chỉnh cách thức giải quyết bài toán

Để vươn tới việc giải thích và điều chỉnh cách thức GQVĐ, HS cần có tính hoài nghi khoa học, có cơ hội tự đánh giá và ý thức không bằng lòng với các phương án sẵn có. Một trong các giải pháp đó là HS được đặt trong môi trường kích thích nhu cầu khám phá thông qua hệ thống câu hỏi. Theo tiến trình GQVĐ của Polya, chúng tôi đề xuất hệ thống câu hỏi gợi ý tương ứng trong từng hoạt động như sau:

- *Tóm tắt bài toán*. Các câu hỏi gồm: Bài toán cho biết gì? Dữ kiện này biểu thị thế nào? Mỗi quan hệ này biểu thị thế nào?... Có thể tóm tắt bài toán thế nào? Có thể tóm tắt bằng cách khác thế nào? Tóm tắt bằng lời văn? Tóm tắt bằng sơ đồ? Tóm tắt bằng mô hình/hình ảnh thế nào?

- *Tìm cách giải*. Các câu hỏi gồm: Bài toán thuộc dạng gì? Bài toán hỏi gì? (Bài toán hỏi x). Muốn tìm x thì phải tìm gì? (Muốn tìm x thì phải tìm a và b). a có chưa? Nếu có rồi thì chuyển qua hỏi b. b có chưa? Nếu chưa có thì tiếp tục sử dụng câu hỏi dạng “muốn tìm ... thì phải tìm gì?”. Tiếp tục hỏi như vậy cho đến khi các dữ kiện đều đã biết thì ngừng. Có thể tìm ... theo cách khác thế nào?

- *Trình bày bài giải*. Các câu hỏi gồm: Có ... và có ... thì tìm được gì? Tìm như thế nào? Tìm

được ... và tìm được ... thì tìm được gì nữa? Tìm như thế nào? Tiếp tục hỏi như thế cho đến khi tìm được x để trả lời câu hỏi của bài toán thì ngừng. Còn có cách trình bày nào khác?

- *Đánh giá bài giải.* Các câu hỏi gồm: Lập luận nào chưa hợp lí? Vì sao lập luận này chưa hợp lí? Điều chỉnh thế nào để hợp lí? Câu lời giải nào chưa phù hợp? Vì sao câu lời giải này chưa phù hợp? Điều chỉnh thế nào để phù hợp? Chỗ tính toán nào chưa chính xác? Vì sao chỗ tính toán này chưa chính xác? Điều chỉnh thế nào để chính xác? Còn có cách lập luận nào khác? Còn có câu lời giải nào khác cũng phù hợp? Còn có cách giải nào khác hay hơn? Còn có cách giải nào khác nhanh hơn?

- *Phát triển bài toán.* Các câu hỏi gồm: Nêu bài toán mới bằng cách đổi số liệu? Nêu bài toán mới bằng cách đổi đại lượng? Nêu bài toán mới bằng cách đổi mối quan hệ? Nêu bài toán mới bằng cách đặt câu hỏi gián tiếp? Nêu bài toán mới bằng cách đặc biệt hóa? Nêu bài toán mới bằng cách khái quát hóa?

3.3.3. Tạo cơ hội cho học sinh được giải quyết các tình huống thực tiễn

Khi giải quyết tình huống thực tiễn, HS trải qua các giai đoạn của quá trình mô hình hóa toán học. HS có cơ hội tập dượt giải thích và điều chỉnh cách thức GQVĐ, dần phát triển NLTD và LLTH. Mô hình hoá toán học lúc đầu là sản phẩm của hoạt động sau đó trở thành công cụ tư duy.

Ví dụ 8: Xét tình huống thực tiễn “Ở đô thị, mỗi bên vỉa hè các con đường người ta thường trồng một hàng cây xanh, cây xanh vừa tạo bóng mát vừa hạn chế ô nhiễm môi trường vừa tạo vẻ mỹ quan đô thị. Người ta tiến hành trồng cây xanh dọc theo 2 bên vỉa hè của đường Lê Văn Tám dài 1500 m vừa mới thi công xong, cứ 15 m trồng một cây. Hỏi trồng được bao nhiêu cây?”. Khi xử lý tình huống, HS trải qua quá trình mô hình hoá toán học như sau:

Giai đoạn 1 (Xây dựng mô hình thực tiễn): HS xác định vấn đề trong tình huống “Hỏi trồng được bao nhiêu cây?”, quan sát, nghiên cứu các thuật ngữ trong tình huống; lược bỏ các dữ kiện thứ yếu (đô thị, vỉa hè, con đường, trồng cây, cây xanh, bóng mát, ô nhiễm môi trường, mỹ quan đô thị, đường Lê Văn Tám, thi công), giữ lại các dữ kiện chủ yếu (hai bên đường, mỗi bên dài 1500 m, 15 m một cây); xác định vấn đề thực tiễn.

Giai đoạn 2 (Xây dựng mô hình toán học): HS chuyển đổi hình thức biểu diễn vấn đề về mô hình toán bằng sơ đồ đoạn thẳng: HS So sánh, liên tưởng đến những vấn đề tương tự đã biết. HS phân tích, tổng hợp, quy lạ về quen, diễn đạt tình huống dưới nhiều hình thức khác nhau: Không thực hiện được việc trồng cây nhưng vẽ đoạn thẳng và vẽ điểm trên đoạn thẳng thì dễ dàng. Khái quát con đường thành đoạn thẳng, hoạt động trồng cây chuyển thành hoạt động vẽ điểm trên đoạn thẳng, mỗi điểm đại diện cho 1 cây, khoảng cách giữa 2 điểm là 15 m. Vì con đường khá dài nên khó biểu diễn hết số cây, hoặc nếu biểu diễn hết số cây thì sơ đồ công kênh khó định hướng tính toán. Ở đây, HS cần vẽ sơ đồ đoạn thẳng với quãng đường ngắn (30 m, 45 m, 60 m...) (Hình 3). Xem quãng đường là một đoạn thẳng, vẽ điểm đầu tiên ở đầu đoạn thẳng, cách 15m vẽ một điểm.



Hình 3.

Giai đoạn 3 (Giải quyết THHT theo mô hình toán học đã chọn): HS chuyển đổi từ ngôn ngữ thực tiễn sang ngôn ngữ toán học; liên tưởng kết nối ý tưởng toán học với yếu tố thực tiễn; ước lượng khoảng cách mỗi điểm trên đoạn thẳng. HS nhảy bèn trong thao tác tư duy; quy lạ về quen; chuyển đổi ngôn ngữ trực quan trên sơ đồ sang kí hiệu phép tính kết hợp suy luận: Từ sơ đồ, HS nhận ra nếu $45:15=3$ (cây) (hoặc $60:15=4$ (cây)) thì chưa đủ số cây trên sơ đồ, cần trồng thêm một cây ở đầu mút cuối đường $45:15+1=4$ (cây) (hoặc $60:15+1=5$ (cây)). Từ đó khái quát cách tìm số cây một bên đường là $1500:15+1=101$ (cây), số cây hai bên đường là $101 \times 2 = 202$ (cây). Khi trình bày phương án giải quyết, HS chuyển đổi giữa ngôn ngữ thực tiễn, ngôn ngữ trực quan và ngôn ngữ kí hiệu, sử dụng ngôn ngữ toán và công cụ toán để mô tả ý tưởng, biểu diễn các vấn đề trong thực tiễn.

Giai đoạn 4 (Lí giải kết quả toán học theo tình huống thực tiễn): HS kết nối phương án đã đề xuất với thực tiễn trồng cây. Không thể đo 15 m trên đoạn thẳng nên HS ước lượng khoảng cách giữa hai điểm, HS hiểu những phù hợp và hạn chế của các khái niệm toán trên tình huống thực tiễn, phản ánh các lập luận toán, giải thích và kiểm tra kết quả, xem xét tính phù hợp của phương án và mô hình.

Như vậy, thông qua giải quyết tình huống thực tiễn, HS được tập luyện giải thích, điều chỉnh cách thức GQVĐ toán học. HS lập mô hình, tính toán trên mô hình, xác định các kết nối để có lập luận đúng đắn; lí giải kết quả toán theo tình huống thực tiễn. HS thực hiện các hoạt động tính toán trong mỗi giai đoạn của quá trình toán học hoá. Nghĩa là HS suy nghĩ, kết nối kiến thức, khái quát hoá để phác hoạ mô hình; khi có mô hình, HS sử dụng thao tác tư duy để tìm cách GQVĐ thông qua phép tính, quy tắc, công thức; dự đoán; sử dụng ngôn ngữ để trình bày; thực hiện phép tính trên mô hình, kí hiệu... Chuyển đổi, giải thích xuôi và ngược giữa mô hình toán học với tình huống. Thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tế để xem xét tính khả thi của mô hình đã thiết lập. Cải tiến được mô hình nếu cách tính không phù hợp. HS tích cực học tập, hiểu được sự kết nối giữa toán học với thực tiễn, việc học toán trở nên ý nghĩa và thiết thực, tạo động cơ và niềm say mê học tập. Đồng thời phát triển NLTD và LLTH.

4. Kết luận

Tóm lại, tăng cường cho HS các thao tác tư duy trong các hoạt động dạy học; tập luyện cho HS chỉ ra chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí trước khi kết luận; tập luyện cho HS giải thích hoặc điều chỉnh cách thức GQVĐ về phương diện toán học là một trong các biện pháp góp phần phát triển NLTD và LLTH cho HS lớp 4. Cần phối hợp với các biện pháp khác một cách linh hoạt sáng tạo và xuyên

suốt để nâng cao hiệu quả phát triển NLTD và LLTH cho HS.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi đề tài nghiên cứu khoa học của giảng viên Trường Đại học Đồng Tháp mã số SPD2021.01.02.

Tài liệu tham khảo

- Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)*.
- Đỗ Đình Hoan (chủ biên). (2020). *Sách giáo khoa Toán lớp 4*. Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.
- Lê Trường Bích Trâm. (2019). *Phát triển NLTD và HLLTH cho học sinh lớp 5 thông qua dạy học số thập phân - các phép tính với số thập phân*. Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam.
- Nguyễn Hữu Châu (chủ biên). (2007). *Đổi mới nội dung và phương pháp đào tạo giáo viên trung học cơ sở theo chương trình Cao đẳng sư phạm mới, chủ đề 9: Dạy học hợp tác*. Dự án đào tạo giáo viên trung học cơ sở.
- Phạm Đình Thực. (2009). *Một số vấn đề suy luận trong môn Toán ở tiểu học*. Hà Nội: NXB Giáo dục.
- Trần Ngọc Lan (chủ biên). (2015). *Rèn luyện tư duy cho học sinh trong dạy học toán bậc tiểu học*. Hà Nội: NXB Trẻ.