

Phương trình thuần nhất hóa của lý thuyết đàn hồi micropolar đẳng hướng chứa biên phân chia độ nhám cao

Homogenized equations of the theory of isotropic micropolar elasticity with very rough interfaces

Nguyễn Thị Kiều

Tóm tắt

Mục đích chính của bài báo là tìm ra các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của lý thuyết đàn hồi micropolar đẳng hướng trong miền hai chiều chứa biên phân chia độ nhám cao. Sử dụng phương pháp thuần nhất hóa, viết các phương trình cơ bản của lý thuyết đàn hồi micropolar dưới dạng ma trận, tác giả thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện. Các phương trình thuần nhất hóa thu được có dạng hiện nên rất thuận tiện để giải các bài toán thực tế.

Từ khóa: sự thuần nhất hóa, phương trình thuần nhất hóa, đàn hồi micropolar, đẳng hướng

Abstract

The main purpose of this paper is finding the explicit homogenized equations of the isotropic elasticity micropolar theory with very rough interfaces. Using the homogenization method with the matrix formulation of the theory of micropolar elasticity, the explicit homogenized equations have been derived. Since the obtained equations are totally explicit, they are very convenient for solving practical problems.

Key words: homogenization, homogenized equation, micropolar, isotropic

1. Giới thiệu

Các bài toán biên hay biên phân chia độ nhám cao xuất hiện nhiều trong thực tế. Tuy nhiên, các bài toán này không có lời giải giải tích. Một số tác giả đã giải bằng phương pháp số [1][2] nhưng việc mô phỏng số rất khó khăn vì ở miền gần biên cần nhiều nút lưới và cấu trúc lưới không xác định, nghiệm số có tính ổn định không cao. Để vượt qua khó khăn này, các nhà khoa học đã đưa ra ý tưởng thay thế biên phân chia độ nhám cao bởi các biên phẳng bằng cách thay miền chứa biên phân chia có độ nhám cao bằng một lớp vật liệu mới có biên là phẳng. Đó chính là ý tưởng chính để giải quyết bài toán thuần nhất hóa biên phân chia có độ nhám cao. Về mặt toán học, ta cần tìm các phương trình vi phân đạo hàm riêng mô tả chuyển động của lớp vật liệu mới. Các phương trình này được gọi là các phương trình thuần nhất hóa.

Năm 1997, Nevard và Keller [3] nghiên cứu thuần nhất hóa biên phân chia có độ nhám cao trong miền ba chiều dao động giữa hai mặt phẳng song song của hai vật thể đàn hồi dị hướng tuyến tính. Các tác giả đã thu được các phương trình thuần nhất hóa dưới dạng ẩn. Năm 2003, Gilbert và Ou [4] nghiên cứu sự thuần nhất hóa đối với biên phân chia độ nhám cao ba chiều phân chia hai vật thể đàn hồi xoắn và các phương trình thuần nhất hóa thu được cũng ở dạng ẩn. Từ năm 2010, Vinh và Tung [5], đã sử dụng các phương trình cơ bản và điều kiện biên dạng ma trận để tìm các phương trình thuần nhất hóa. Với cách tiếp cận này, các tác giả đã tìm được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện đối với bài toán biên phân chia có độ nhám cao dao động giữa hai đường thẳng song song, hai đường tròn đồng tâm của các lý thuyết đàn hồi, đàn điện và đàn nhiệt. Các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện nghĩa là các hệ số của chúng là các hàm hiển của các tham số vật liệu và đặc trưng hình học của biên phân chia. Vì vậy, các kết quả đạt được rất thuận tiện để giải quyết các bài toán thực tế khác nhau.

Do vậy, mục tiêu chính trong bài báo này là tìm các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của lý thuyết đàn hồi micropolar đẳng hướng. Để đạt được mục đích này, tác giả sử dụng phương pháp thuần nhất hóa cùng các phương trình cơ bản dạng ma trận của lý thuyết đàn hồi micropolar đẳng hướng. Bài báo thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng thành phần của lý thuyết đàn hồi micropolar đẳng hướng.

2. Các phương trình cơ bản và điều kiện liên tục dạng ma trận

Giả sử biên phân chia độ nhám cao L phân chia hai vật thể đàn hồi micropolar đẳng hướng. Khi đó biên phân chia được biểu diễn bởi $x_2 = h(x_1 / \epsilon)$, $0 < \epsilon \ll 1$, trong đó, $h(y)$, ($y = x_1 / \epsilon$) là hàm tuần hoàn với chu kỳ 1.

Xét môi trường đàn hồi micropolar đẳng hướng, các phương trình cơ bản của môi trường đàn hồi micropolar có dạng [6]:

$$t_{ki,k} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad m_{ki,k} + \epsilon_{irs} t_{rs} + \rho l_i = \rho j \ddot{\phi}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

trong đó t_{ki} là các thành phần của tensor ứng suất, m_{ki} là các thành phần của tensor ứng suất cặp, u_i là chuyển dịch, ϕ_i là các góc quay, ρ là mật độ khối lượng, j là quán tính micro, f_i là vectơ lực khối, l_i là vectơ cặp lực khối, ϵ_{irs} là ký hiệu Levi-Civita, dấu “,” chỉ đạo hàm theo biến không gian x_k và dấu “.” chỉ đạo hàm theo biến thời gian t .

Khi vật liệu là đàn hồi micropolar đẳng hướng tuyến tính, các phương trình trạng thái là [7]:

$$t_{ki} = \lambda u_{r,r} \delta_{ki} + \mu (u_{k,i} + u_{i,k}) + \kappa (u_{i,k} - \epsilon_{kir} \phi_r), \\ m_{ki} = \alpha \phi_{r,r} \delta_{ki} + \beta \phi_{k,i} + \gamma \phi_{i,k}, \quad (2)$$

trong đó δ_{ki} là ký hiệu Kronecker, $\lambda, \mu, \kappa, \alpha, \beta, \gamma$ là các mô đun vật liệu.

Xét trạng thái biến dạng phẳng, vectơ chuyển dịch, vectơ quay có dạng:

TS. Nguyễn Thị Kiều

Bộ môn Cơ học lý thuyết, Khoa Xây dựng

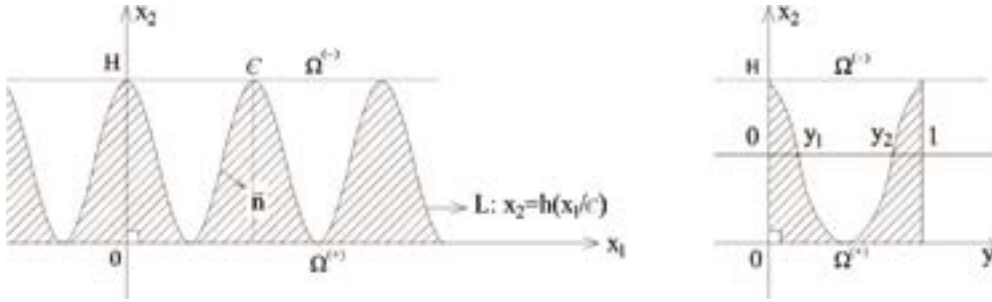
ĐT: 0363.441.889

Email: kieumt@gmail.com

Ngày nhận bài: 13/2/2023

Ngày sửa bài: 23/2/2023

Ngày duyệt đăng: 15/03/2024



Hình 1. Biên phân chia độ nhám cao

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, t), \\ \phi_3 &= \phi(x_1, x_2, t), \quad u_3 \equiv \phi_1 \equiv \phi_2 \equiv 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Với trạng thái biến dạng phẳng (3) thì phương trình chuyển động (1) và phương trình trạng thái (2) có dạng sau:

$$\begin{aligned} t_{1,1} + t_{2,2} + \rho f_1 &= \rho \ddot{u}_1, \quad t_{2,1} + t_{2,2} + \rho f_2 = \rho \ddot{u}_2, \\ m_{1,3,1} + m_{2,3,2} + t_{12} - t_{21} + \rho l_3 &= \rho j \ddot{\phi} \\ t_{11} &= (\lambda + 2\mu + \kappa)u_{1,1} + \lambda u_{2,2}, \quad t_{22} = \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu + \kappa)u_{2,2}, \\ t_{12} &= \mu u_{1,2} + (\mu + \kappa)u_{2,1} - \kappa \phi, \quad t_{21} = (\mu + \kappa)u_{1,2} + \mu u_{2,1} + \kappa \phi, \\ m_{13} &= \gamma \phi_{,1}, \quad m_{23} = \gamma \phi_{,2} \end{aligned} \quad (4)$$

(5)

Các phương trình (4) được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{11}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{G}\mathbf{u})_{,1} + (\mathbf{A}_{21}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{H}\mathbf{u})_{,2} \\ + \mathbf{B}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{E}\mathbf{u} + \mathbf{F} = \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} \lambda + \kappa + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \kappa + \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} \kappa + \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \kappa + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\kappa \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F} &= [\rho f_1 \quad \rho f_2 \quad \rho l_3]^T, \quad \mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \phi]^T, \quad \rho = \text{diag}[\rho \quad \rho \quad \rho]. \end{aligned} \quad (7)$$

Đặt $\Sigma_1 = [t_{11} \quad t_{12} \quad m_{13}]^T$ và $\Sigma_2 = [t_{21} \quad t_{22} \quad m_{23}]^T$. Khi đó hai vectơ này được tính như sau:

$$\Sigma_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{G}\mathbf{u}, \quad \Sigma_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{H}\mathbf{u}. \quad (8)$$

Phương trình (6) biểu diễn qua Σ_k có dạng:

$$\Sigma_{1,1} + \Sigma_{2,2} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{E}\mathbf{u} + \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (9)$$

Phương trình (6) (hay (9)) là phương trình cơ bản dạng ma trận của lý thuyết đàn hồi micropolar. Các phương trình (8) có thể được xem như các phương trình trạng thái.

Giả sử hai miền $\Omega^{(+)}$ và $\Omega^{(-)}$ gắn chặt với nhau dọc theo L, khi đó điều kiện liên tục

$$\begin{aligned} [\phi]_L = 0, [u_k]_L = 0, [t_{1k}n_1 + t_{2k}n_2]_L \\ = 0, [m_{1k}n_1 + m_{2k}n_2]_L = 0, k = 1, 3 \end{aligned} \quad (10)$$

phải thỏa mãn, trong đó n_k là vectơ pháp tuyến đơn vị của đường cong L và ký hiệu bước nhảy $[f]_L := f^+ - f^-$.

Các điều kiện liên tục (10) được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_L = 0, [(\mathbf{A}_{11}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{21}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{G}\mathbf{u})n_1]_L \\ + [(\mathbf{A}_{12}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{H}\mathbf{u})n_2]_L = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Theo Bensoussan và các cộng sự,

giả sử $\mathbf{u}(x_1, x_2, \epsilon, t) = \mathbf{U}(x_1, y, x_2, \epsilon, t)$ và biểu diễn \mathbf{U} dưới dạng sau [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \mathbf{V} + \epsilon (\mathbf{N}^1\mathbf{V} + \mathbf{N}^{11}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{12}\mathbf{V}_{,2}) \\ + \epsilon^2 (\mathbf{N}^2\mathbf{V} + \mathbf{N}^{21}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{22}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{211}\mathbf{V}_{,11} + \mathbf{N}^{212}\mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}^{222}\mathbf{V}_{,22}) \\ + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (12)$$

trong đó $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x_1, x_2, t)$ (không phụ thuộc y), các ma trận 4×4 $\mathbf{N}^1, \mathbf{N}^{11}, \mathbf{N}^{12},$

$\mathbf{N}^2, \mathbf{N}^{21}, \mathbf{N}^{22}, \mathbf{N}^{211}, \mathbf{N}^{212}, \mathbf{N}^{222}$ là các hàm của y và x_I (không phụ thuộc x_I và t) và tuần hoàn theo y với chu kỳ 1.

Sử dụng phương pháp thuần nhất hóa [5], ta thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng ma trận như sau:

Với $x_2 < 0$ và $x_2 > H$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{11}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{A}_{12}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{G}^{(\pm)}\mathbf{V})_{,1} \\ + (\mathbf{A}_{21}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{A}_{22}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{H}^{(\pm)}\mathbf{V})_{,2} \end{aligned} \quad (13)$$

$$+ \mathbf{B}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{D}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{E}^{(\pm)}\mathbf{V} + \mathbf{F}^{(\pm)} = \rho^{(\pm)} \ddot{\mathbf{V}}$$

Với $0 < x_2 < H$:

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{V}_{,11} + \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \rangle \mathbf{V}_{,12} + \left(\langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{V}_{,1} \right)_{,2} \\
& + \left\{ \left(\langle \mathbf{A}_{22} \rangle + \langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \rangle - \langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \rangle \right) \mathbf{V}_{,2} \right\}_{,2} \\
& + \left(\langle \mathbf{B} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} + \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{G} \rangle \right) \mathbf{V}_{,1} \\
& + \left(\langle \mathbf{D} \rangle + \langle \mathbf{B} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \rangle - \langle \mathbf{B} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \rangle \right) \mathbf{V}_{,2} \\
& + \left\{ \left(\langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{G} \rangle - \langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{G} \rangle + \langle \mathbf{H} \rangle \right) \mathbf{V} \right\}_{,2} \\
& + \left(\langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{B} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{G} \rangle - \langle \mathbf{B} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{G} \rangle \right) \mathbf{V} + \langle \mathbf{F} \rangle = \langle \rho \rangle \ddot{\mathbf{V}}
\end{aligned} \tag{14}$$

Chú ý rằng

$$\langle \phi \rangle = \int_0^1 \langle \phi \rangle dy = (y_2 - y_1) \phi^{(+)} + (1 - y_2 + y_1) \phi^{(-)} \tag{15}$$

Trên các đường thẳng $x_2 = 0$, $x_2 = H$, điều kiện liên tục được thỏa mãn:

$$[\mathbf{V}]_L^* = 0, [\Sigma_2^0]_L^* = 0, L^* : x_2 = 0, x_2 = H \tag{16}$$

(16)

trong đó

$$\begin{aligned}
\Sigma_2^0 = & \left[\langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{G} \rangle - \langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{G} \rangle + \langle \mathbf{H} \rangle \right] \mathbf{V} \\
& + \langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \mathbf{V}_{,1} \\
& + \left[\langle \mathbf{A}_{22} \rangle + \langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \rangle - \langle \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \rangle \right] \mathbf{V}_{,2}
\end{aligned} \tag{17}$$

3. Các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng thành phần

Thay các ma trận

$$\mathbf{A}_{hk}^{(+)}, \mathbf{B}^{(+)}, \mathbf{D}^{(+)}, \mathbf{E}^{(+)}, \mathbf{G}^{(+)}, \mathbf{H}^{(+)}, \mathbf{A}_{hk}^{(-)}, \mathbf{B}^{(-)}, \mathbf{D}^{(-)}, \mathbf{E}^{(-)}, \mathbf{G}^{(-)}, \mathbf{H}^{(-)}$$

trong (7) vào các phương trình thuần nhất hóa dạng ma trận (13), (14), ta thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng thành phần như sau:

Với $x_2 > H$ và $x_2 > H$:

$$\begin{cases}
(\lambda^{(\pm)} + 2\mu^{(\pm)} + \kappa^{(\pm)})V_{,11} + (\mu^{(\pm)} + \kappa^{(\pm)})V_{,12} \\
+ (\lambda^{(\pm)} + \mu^{(\pm)})V_{,12} + \kappa^{(\pm)}\Phi_{,2} + \rho^{(\pm)}f_1 \\
= \rho^{(\pm)}\ddot{V}_1 \\
(\lambda^{(\pm)} + \mu^{(\pm)})V_{,12} + (\mu^{(\pm)} + \kappa^{(\pm)})V_{,21} \\
+ (\lambda^{(\pm)} + 2\mu^{(\pm)} + \kappa^{(\pm)})V_{,22} - \kappa^{(\pm)}\Phi_{,1} + \rho^{(\pm)}f_2 \\
= \rho^{(\pm)}\ddot{V}_2 - \kappa^{(\pm)}V_{,12} + \kappa^{(\pm)}V_{,21} + \gamma^{(\pm)}\Phi_{,11} + \gamma^{(\pm)}\Phi_{,22} \\
- 2\kappa^{(\pm)}\Phi + \rho^{(\pm)}l_3 = \rho^{(\pm)}j\ddot{\Phi}
\end{cases} \tag{18}$$

trong đó dấu (+) ứng với bán không gian $\Omega^{(+)}$, dấu (-) ứng với bán không gian $0 < x_2 < H$.

Với $0 < x_2 < H$:

$$\begin{cases}
\langle a^{-1} \rangle^{-1} V_{,11} + \left(\langle b \rangle + \langle b^{-1} \rangle^{-1} \langle \mu b^{-1} \rangle^2 - \langle \mu^2 b^{-1} \rangle \right) V_{,12} \right)_{,2} \\
+ \langle a^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda a^{-1} \rangle V_{,12} + \left(\langle b^{-1} \rangle^{-1} \langle \mu b^{-1} \rangle V_{,2,1} \right)_{,2} \\
+ \left(\langle \kappa \rangle + \langle \kappa \mu b^{-1} \rangle - \langle b^{-1} \rangle^{-1} \langle \kappa b^{-1} \rangle \langle \mu b^{-1} \rangle \right) \Phi \right)_{,2} + \langle f_1 \rangle = \langle \rho \rangle \ddot{V}_1, \\
\langle b^{-1} \rangle^{-1} \langle \mu b^{-1} \rangle V_{,1,12} + \left(\langle a^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda a^{-1} \rangle V_{,1,1} \right)_{,2} + \langle b^{-1} \rangle^{-1} V_{,2,11} \\
+ \left(\langle a \rangle + \langle a^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda a^{-1} \rangle^2 - \langle \lambda^2 a^{-1} \rangle \right) V_{,2,2} \right)_{,2} - \langle b^{-1} \rangle^{-1} \langle \kappa b^{-1} \rangle \Phi_{,1} \\
+ \langle f_2 \rangle = \langle \rho \rangle \ddot{V}_2, \\
\left(\langle b^{-1} \rangle^{-1} \langle \kappa b^{-1} \rangle \langle \mu b^{-1} \rangle - \langle \kappa \mu b^{-1} \rangle - \langle \kappa \rangle \right) V_{,1,2} + \langle b^{-1} \rangle^{-1} \langle \kappa b^{-1} \rangle V_{,2,1} \\
+ \langle \gamma^{-1} \rangle^{-1} \Phi_{,11} + \left(\langle \gamma \rangle \Phi_{,2} \right)_{,2} + \left(\langle \kappa^2 b^{-1} \rangle - \langle b^{-1} \rangle^{-1} \langle \kappa b^{-1} \rangle^2 - 2\langle \kappa \rangle \right) \Phi \\
+ \langle l_3 \rangle = \langle \rho j \rangle \ddot{\Phi}
\end{cases} \tag{19}$$

trong đó

$$V_1, V_2, t_{21}^v, t_{23}^v, \Phi, m_{23}^v, \tag{20}$$

Điều kiện liên tục:

Các đại lượng $V_1, V_2, t_{21}^0, t_{23}^0, \Phi, m_{23}^0$, liên tục trên các đường: $x_2 = H, x_2 = 0$:

$$[V_k]_L^* = 0, [t_{2k}^0]_L^* = 0, k = 1, 2, [\Phi]_L^* = 0, [m_{23}^0]_L^* = 0 \tag{21}$$

Nhận xét:

Nếu hai miền Ω^+, Ω^- giống nhau $\langle \phi \rangle = \phi^{(+)} = \phi^{(-)}$, thì các phương trình (18), (19) trùng nhau.

4. Kết luận

Trong bài báo này, tác giả đã sử dụng phương pháp thuần nhất hóa để thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng đối với biên phân chia độ nhám cao giữa hai miền đàn hồi micropolar đẳng hướng. Các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện và các điều kiện liên tục tương ứng được viết cụ thể dưới dạng thành phần. Các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện thu được rất thuận tiện để nghiên cứu bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng đối với biên phân chia độ nhám cao trong môi trường đàn hồi micropolar đẳng hướng./.

Tài liệu tham khảo

1. Talbot J.R.S., Titchener J.B., Willis J.R. (1990), "The reflection of electromagnetic waves from very rough interfaces", *Wave Motion* 12, pp. 245-260.
2. Zaki K.A., Neureuther A.R. (1971), "Scattering from a perfectly conducting surface with a sinusoidal hight profile: TE polarization", *IEEE Trans Atenn Propag* 19, pp. 208-214.
3. Nevard J., Keller J.B. (1997), "Homogenization of rough boundaries and interfaces", *SIAM J Appl Math* 57, pp. 1660-1686.
4. Gilbert R., Ou M., (2003) "Acoustic wave propagation in a composite of two different poroelastic materials with a very rough periodic interface: A homogenization approach", *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 1, pp. 431-440.
5. Vinh P.C., Tung D.X. (2010), "Homogenized equations of the linear elasticity in two-dimensional domains with very rough interfaces", *Mechanics Research Communications* 37, pp. 285-288.
6. Eringen A.C. (1999) *Microcontinuum Field Theories, I. Foundations and Solids*, Springer.