

Phân tích ứng xử uốn phi cục bộ tấm nano FGMP có vi bọt rỗng với các điều kiện biên khác nhau

Nonlocal bending analysis of functionally graded nanoplates with porosities under various boundary conditions

Nguyễn Văn Long⁽¹⁾, Trần Minh Tú⁽²⁾ và Đặng Xuân Trung⁽³⁾

Tóm tắt

Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen, bài báo tiến hành phân tích ứng xử uốn của tấm chữ nhật nano FGMP (Functionally graded material with porosities).

Bằng tiếp cận theo phương pháp pb2-Ritz, lời giải bán giải tích của độ võng và các thành phần ứng suất đã được thiết lập cho tấm có các điều kiện biên khác nhau. Sau khi kiểm chứng độ tin cậy của lời giải với các kết quả đã công bố, ảnh hưởng của hệ số rỗng và tham số phi cục bộ đến độ võng và trường ứng suất trong tấm nano FGMP được khảo sát. Các kết quả nhận được là nguồn tham chiếu hữu ích cho các nghiên cứu về kết cấu ở kích cỡ micro/nano trong lĩnh vực vi-cơ điện tử.

Từ khóa: Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, Vật liệu FGM có vi bọt rỗng, Phân tích uốn, Phương pháp Ritz

Abstract

Based on Reddy's third-order shear deformation theory (TSDT) and Eringen's nonlocal elasticity theory, the nonlocal bending behavior of functionally graded material nanoplates with porosities (FGMP nanoplates) is investigated. A semi-analytical solution is obtained using the pb2-Ritz approach for various boundary conditions. After validating the reliability of the solution by comparing it with published results, the effects of porosity and nonlocal parameters on the deflection and stress fields of FGMPs are examined. The findings provide valuable insights for the design and analysis of micro/nano-scale structures in micro-electromechanical systems.

Key words: Nonlocal elasticity theory; Functionally graded material with porosities; Bending analysis; Ritz method

(1) TS, Giảng viên, bộ môn Sức bền vật liệu, Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, Email: longnv@huce.edu.vn, ĐT: 0374527268

(2) GS.TS, bộ môn Sức bền vật liệu, Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, Email: tutm@huce.edu.vn, ĐT: 0912101173

(3) ThS, Cục Giám định nhà nước về chất lượng công trình xây dựng, Email: xuantrungcgd@gmail.com, ĐT: 0989256859

Ngày nhận bài: 30/9/2024
Ngày sửa bài: 02/10/2024
Ngày duyệt đăng: 07/10/2024

1. Tổng quan

Là một loại vật liệu composite thế hệ mới, vật liệu cơ tính biến thiên (functionally graded material-FGM) đã được phát kiến lần đầu tiên bởi các nhà khoa học Nhật Bản trong quá trình tìm kiếm loại vật liệu có khả năng làm việc trong môi trường nhiệt độ cao. Các kết cấu dầm, tấm, vỏ FGM được sử dụng nhiều trong kết cấu công trình cũng như kỹ thuật cơ khí là bằng chứng về việc sở hữu nhiều tính chất khác biệt so với vật liệu composite truyền thống, đặc biệt là tránh được sự bong tách giữa các pha vật liệu thành phần và sự tập trung ứng suất tại bề mặt tiếp xúc giữa chúng.

Trong vài thập kỷ gần đây, vật liệu FGM đã được tích hợp vào các hệ thống và kết cấu vi cơ điện tử và nano cơ điện tử. Các phân tích cơ học về kết cấu micro/nano chế tạo từ vật liệu FGM đã trở thành chủ đề nghiên cứu hấp dẫn của các nhà khoa học trong và ngoài nước. Với kết cấu micro/nano, ảnh hưởng của kích thước bé cần được kể đến, do vậy các lý thuyết đàn hồi cổ điển không còn thích hợp. Hiện nay có ba phương pháp mô phỏng chính được sử dụng để phân tích cơ học các kết cấu nano: phương pháp động lực học phân tử, phương pháp thực nghiệm và cơ học môi trường liên tục phi cục bộ (nonlocal continuum theory), trong đó phương pháp đầu tiên đặc biệt tốn thời gian và phương pháp thứ hai tốn kém và khó thực hiện. Vì thế cách tiếp cận theo cơ học môi trường liên tục phi cục bộ thường được sử dụng. Các lý thuyết tấm dựa trên cơ học môi trường liên tục cổ điển đã được cải tiến bằng cách sử dụng các quan hệ ứng suất - biến dạng theo lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen [1, 2] để xét đến hiệu ứng kích thước bé. Không như lý thuyết đàn hồi cổ điển, với lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, trường ứng suất tại một điểm của vật thể không những phụ thuộc vào các thành phần biến dạng tại chính điểm đó mà còn phụ thuộc vào biến dạng của tất cả các điểm xung quanh.

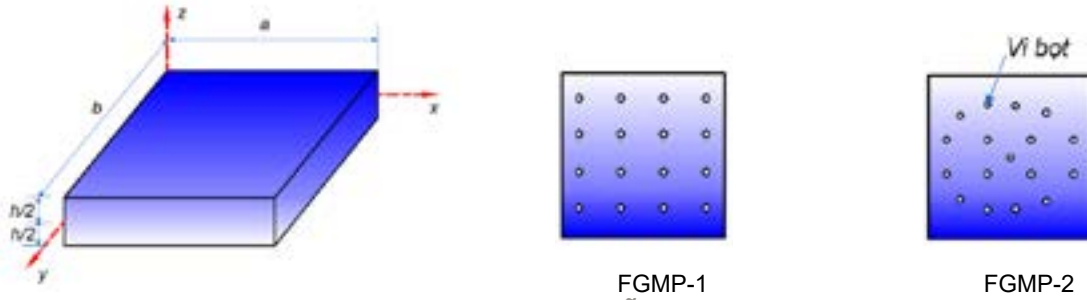
Trong phân tích phi cục bộ kết cấu tấm nano FGM, lý thuyết tấm cổ điển (CPT) [3, 4], lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) [5-8], và lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy (TSDT) [9, 10] là ba lý thuyết tấm được sử dụng phổ biến nhất. Một lưu ý liên quan quá trình chế tạo FGM là các lỗ rỗng vi mô thường xuất hiện do quá trình thiêu kết các vật liệu thành phần khác nhau; các vi bọt rỗng sẽ ảnh hưởng đến cơ tính vật liệu. Các khảo sát về ứng xử tĩnh và động của tấm FGM có vi bọt rỗng (FGMP) vi thể cũng là chủ đề được quan tâm [11-14].

Từ nghiên cứu tổng quan về tấm nano FGMP, có thể thấy rằng các nghiên cứu về phân tích uốn cho tấm nano với các điều kiện biên khác nhau còn rất hạn chế. Bởi vậy, trong bài báo này, các tác giả tiến hành phân tích ảnh hưởng của vi bọt rỗng đến ứng xử tĩnh của tấm nano FGMP, có xét đến hiệu ứng kích thước bé thông qua việc sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen. Lý thuyết tấm TSDT với năm ẩn số chuyển vị đồng thời thỏa mãn điều kiện ứng suất tiếp của tấm, phù hợp cho phân tích tấm dày được sử dụng. Lời giải bán giải tích cho tấm nano với các dạng điều kiện biên khác nhau được thiết lập theo tiếp cận pb2-Ritz (pb2 - two-dimensional polynomial basic function). Ảnh hưởng của vi bọt rỗng, điều kiện biên và tham số phi cục bộ đến độ võng và ứng suất trong tấm nano FGMP sẽ được trình bày cụ thể trong phần khảo sát số.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Mô hình tấm nano bằng vật liệu FGMP

Xét tấm chữ nhật nano FGMP có chiều dài a , chiều rộng b , chiều dày h , trong hệ tọa độ Descartes (x, y, z) gắn với mặt trung bình của tấm (xem Hình 1). Sử dụng quy luật phân bố hàm lũy thừa, các tính chất hiệu dụng P của vật liệu bao gồm mô đun đàn hồi kéo/nén E , mô đun cắt G , hệ số



Hình 1. Tấm nano FGMP với các quy luật phân bố vi bột rỗng khác nhau

Poisson ν được viết dưới dạng [15-17]:

$$P(z) = P_{cm} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\xi + P_m - (P_c + P_m) f(z);$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} & \text{(FGMP-1)} \\ \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \frac{\alpha}{2} & \text{(FGMP-2)} \end{cases} \quad (1)$$

trong đó: $P_m = P_c - P_m$; P_c, P_m tương ứng là cơ tính của thành phần ceramic và kim loại; ξ là chỉ số tỷ lệ thể tích ($\xi \geq 0$); α là tỷ phần thể tích lỗ rỗng ($0 \leq \alpha \ll 1$). Lưu ý rằng, khi $\alpha = 0$ ta có vật liệu FGM hoàn hảo.

2.2. Các hệ thức cơ bản của tấm nano theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba

Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy (TSDT), các thành phần chuyển vị trong không gian tấm được xác định bởi [18]:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \\ u_3(x,y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} u_4(x,y) \\ u_5(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix} - \kappa z^3 \begin{Bmatrix} u_4 + \partial u_3 / \partial x \\ u_5 + \partial u_3 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

trong đó: $\kappa = \frac{4}{3h^2}$; u_1, u_2, u_3 là các thành phần chuyển vị theo phương x, y, z của điểm trên mặt trung bình; u_4, u_5 tương ứng là góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục y, x .

Các thành phần biến dạng tuyến tính nhận được:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_4}{\partial x} \\ \frac{\partial u_5}{\partial y} \\ \frac{\partial u_4}{\partial y} + \frac{\partial u_5}{\partial x} \end{Bmatrix} - \kappa z^3 \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_4}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u_5}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_4}{\partial y} + \frac{\partial u_5}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z \boldsymbol{\kappa} + z^3 \boldsymbol{\kappa}^*;$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = (1 - 3\kappa z^2) \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_4 \\ \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_5 \end{Bmatrix} = (1 - 3\kappa z^2) \boldsymbol{\gamma}^0$$

Theo lý thuyết đàn hồi phi cục bộ [2, 19], các phương trình liên tục cho tấm nano FGMP được viết dưới dạng:

$$\Re \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix};$$

$$\Re \begin{Bmatrix} t_{xz} \\ t_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

trong đó: $\Re = 1 - \mu^2 \nabla^2$ là toán tử phi cục bộ; μ là tham số phi cục bộ.

Từ quan hệ (4), các thành phần nội lực cục bộ $(N_i^l, M_i^l, M_i^{*l}, R_i^l)$ và phi cục bộ (N_i, M_i, M_i^*, R_i) liên hệ với nhau và phụ thuộc vào các thành phần biến dạng bởi:

$$\Re N_i = N_i^l = A_{ij} \varepsilon_j^0 + B_{ij} \kappa_j + D_{ij} \kappa_j^*;$$

$$\Re M_i = M_i^l = B_{ij} \varepsilon_j^0 + C_{ij} \kappa_j + E_{ij} \kappa_j^*;$$

$$\Re M_i^* = M_i^{*l} = D_{ij} \varepsilon_j^0 + E_{ij} \kappa_j + G_{ij} \kappa_j^*;$$

$$\Re R_i = R_i^l = A^s \gamma_j$$

với:

$$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz;$$

$$A^s = \int_{-h/2}^{h/2} G(z) (1 - 3\kappa z^2)^2 dz.$$

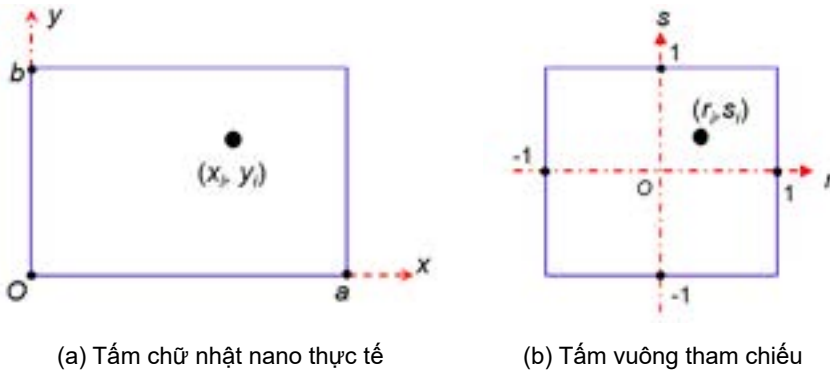
Áp dụng toán tử nonlocal \Re lên hệ phương trình cân bằng của lý thuyết TSDT [18] cho tấm nano FGMP, với chú ý sử dụng quan hệ (5), ta được:

$$\frac{\partial N_x^l}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^l}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_{xy}^l}{\partial x} + \frac{\partial N_y^l}{\partial y} = 0;$$

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 M_x^{*l}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}^{*l}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{*l}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial R_x^l}{\partial x} + \frac{\partial R_y^l}{\partial y} + \Re q = 0; \quad (6)$$

$$(3) \quad \frac{\partial P_x^l}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}^l}{\partial y} - R_x^l = 0; \quad \frac{\partial P_{xy}^l}{\partial x} + \frac{\partial P_y^l}{\partial y} - R_y^l = 0$$

trong đó: $P_i^l = M_i^l - \kappa M_i^{*l}$.



Hình 2. Liên hệ tọa độ giữa tấm nano thực và tấm tham chiếu

2.3. Phương pháp Ritz

Nhân lần lượt từng phương trình trong (6) với các biến phân δu_i sau đó tích phân trên miền A, ta được:

$$0 = \int_A \left[N_x^I \frac{\partial \delta u_1}{\partial x} + P_x^I \frac{\partial \delta u_4}{\partial x} - \kappa M_x^{*I} \frac{\partial^2 \delta u_3}{\partial x^2} + N_y^I \frac{\partial \delta u_2}{\partial y} + P_y^I \frac{\partial \delta u_5}{\partial y} - \kappa M_y^{*I} \frac{\partial^2 \delta u_3}{\partial y^2} + N_{xy}^I \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial x} \right) + P_{xy}^I \left(\frac{\partial \delta u_4}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_5}{\partial x} \right) - 2\kappa M_{xy}^{*I} \frac{\partial^2 \delta u_3}{\partial x \partial y} + R_x^I \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial x} + \delta u_4 \right) + R_y^I \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial y} + \delta u_5 \right) - \mathfrak{R} q \delta u_3 \right] dA \quad (7)$$

Để thuận tiện, trong phần này, hệ trục tọa độ không thứ nguyên (r, s) được sử dụng để thay thế cho hệ tọa độ Descartes (xem Hình 2). Liên hệ giữa hai hệ tọa độ:

$$r = \frac{2x}{a} - 1; s = \frac{2y}{b} - 1 \quad (8)$$

Các thành phần chuyển vị theo pb2-Ritz được giả thiết như sau [20]:

$$u_i = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^p d_{ipq} u_{ipq}(r, s) = \sum_{j=1}^N d_{ij} u_j(r, s) = \mathbf{d}_i^T \mathbf{U}_i \quad (9)$$

trong đó N là bậc của đa thức; d_{ij} là các hệ số cần tìm; \mathbf{d}_i là các véc tơ chuyển vị; \mathbf{U}_i là các véc tơ hàm pb2-Ritz ($i = 1+5$) với các thành phần được tính theo:

$$u_{ij} = r^{p-q} s^q B_i \quad (10)$$

với B_i là các hàm cơ bản thỏa mãn điều kiện biên:

$$B_i = (s+1)^{k_{4i-3}} (r-1)^{k_{4i-2}} (s-1)^{k_{4i-1}} (r+1)^{k_{4i}} \quad (11)$$

Các giá trị k_i phụ thuộc vào điều kiện biên cụ thể của các cạnh tấm. Ví dụ, trên cạnh $x = a$ (tương ứng với $r = 1$): Với điều kiện biên ngàm (-C): $k_{4i-2} = 0$; với điều kiện biên tựa bản lề (-S): $k_i = 1$ với điều kiện biên tự do (-F): $k_i = 0$.

Bằng cách thay khai triển (9) vào (7), và chuyển đổi tích phân từ hệ tọa độ (x, y) sang hệ tọa độ (r, s) , hệ phương trình cân bằng thu được cho bài toán uốn:

$$Kd = F \quad (12)$$

3. Kết quả số và thảo luận

Với nghiệm bán giải tích theo phương pháp pb2-Ritz đã thiết lập ở phần trên, chương trình tính bằng

phần mềm Matlab được viết để thực hiện các ví dụ số. Các ví dụ kiểm chứng độ tin cậy của lời giải và chương trình máy tính được thực hiện cho hai trường hợp riêng bao gồm: i) Độ võng và ứng suất tấm FGMP kích thước nano liên kết khớp bốn cạnh; ii) Độ võng của tấm FGM kích thước macro với các điều kiện biên khác nhau. Để thuận tiện, các công thức không thứ nguyên được sử dụng [21]:

$$\bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w_0 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right); \quad \bar{t}_x = \frac{h}{q_0 a} t_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right); \quad \bar{t}_{xz} = \frac{10h}{q_0 a} t_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right) \quad (13)$$

3.1. Ví dụ kiểm chứng

Để kiểm chứng ứng xử uốn phi cục bộ theo lý thuyết TSDT và phương pháp Ritz, bài báo xét tấm vuông nano FGMP (Al/Al₂O₃): $a = b = 10$ nm, liên kết khớp bốn cạnh (SSSS) và chịu tác dụng của tải phân bố hình sin:

$$q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$$

Các kết quả tính toán độ võng không thứ nguyên \bar{w} và ứng suất không thứ nguyên \bar{t}_x, \bar{t}_{xz} của tấm trình bày ở Bảng 1. Để dễ dàng nhận thấy, với các tham số phi cục bộ μ khác nhau, kết quả trong bài báo đều phù hợp với nghiệm Navier sử dụng lý thuyết biến dạng cắt đơn giản bốn ẩn chuyển vị của Alghanmi [21].

Tiếp theo, Bảng 2 trình bày các kết quả kiểm chứng độ võng không thứ nguyên

$$\hat{w} = 100E_m h^3 w_0 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) / \left[12(1-\nu^2) q_0 a^4 \right]$$

của tấm vuông FGM (Al/ZrO₂-1) kích thước macro: $a = b = 1$ m, $h = 0,2$ m, $\alpha = 0$, chịu tác dụng của tải phân bố đều $q = q_0$. Có thể thấy rằng, với các chỉ số tỷ lệ thể tích ξ và điều

Bảng 1. Kiểm chứng độ võng không thứ nguyên \bar{w} và các thành phần ứng suất không thứ nguyên \bar{t}_x, \bar{t}_{xz} của tấm vuông nano FGMP ($\zeta = 2, \alpha = 0,15, a/h = 10$)

\bar{t}_x	Nguồn	\bar{t}_x		\bar{t}_x		\bar{t}_{xz}	
		FGMP-1	FGMP-2	FGMP-1	FGMP-2	FGMP-1	FGMP-2
1 nm	Alghanmi [21]	1,3268	1,0058	4,8918	4,5597	2,5470	2,3494
	Bài báo	1,3268	1,0064	4,8917	4,5604	2,5468	2,3750
2 nm	Alghanmi [21]	1,9830	1,5033	7,3110	6,8148	3,8067	3,5113
	Bài báo	1,9829	1,5041	7,3110	6,8158	3,8063	3,5496

Bảng 2. Kiểm chứng độ võng không thứ nguyên ξ của tấm vuông FGM

Điều kiện biên	Nguồn	$\xi = 0.5$	$\xi = 1$	$\xi = 2$
CCCC	Lee và cs. [22]	0,1034	0,1207	0,1404
	Bài báo	0,0986	0,1156	0,1357
SCSC	Lee và cs. [22]	0,1447	0,1701	0,1953
	Bài báo	0,1386	0,1625	0,1899
SFSF	Lee và cs. [22]	0,7029	0,8214	0,9423
	Bài báo	0,6852	0,7948	0,9051

kiện biên khác nhau của tấm, các kết quả trong bài báo đều phù hợp với lời giải theo lý thuyết biến dạng cát bậc nhất và phương pháp phần tử tự do kp-Ritz (element-free kp-Ritz method) của Lee và cs. [22].

Qua các kết quả kiểm chứng ở trên, có thể thấy rằng, nghiệm theo phương pháp pb2-Ritz trong bài báo và code chương trình máy tính đã thiết lập có độ tin cậy.

3.2. Khảo sát ảnh hưởng của các tham số

Trong phần này, bài báo tiến hành phân tích ứng xử uốn phi cục bộ của tấm vuông nano FGMP (Al/Al_2O_3) [21]: $a = b = 10$ nm, $a/h = 10$, dưới tác dụng của tải phân bố đều $q=q_0$. Đồ thị trên Hình 3 thể hiện biến thiên độ võng không thứ nguyên \bar{w} và ứng suất pháp không thứ nguyên \bar{t}_x theo tham số phi cục bộ μ . Bốn trường hợp điều kiện biên được xét tới bao gồm: CCCC, SCSC, SSSS và SFSF [23].

Các kết quả cho thấy:

- Ngoại trừ trường hợp điều kiện biên ngàm 4 cạnh - CCCC có độ võng và ứng suất không đổi khi thay đổi μ , các trường hợp điều kiện biên còn lại có độ võng và ứng suất tăng phi μ tăng.

- Như mong đợi, với mỗi giá trị của tham số μ , tấm nano FGMP có liên kết CCCC luôn có độ võng nhỏ nhất; tiếp đó, tương ứng với các điều kiện biên SCSC, SSSS, SFSF thì độ võng tăng dần.

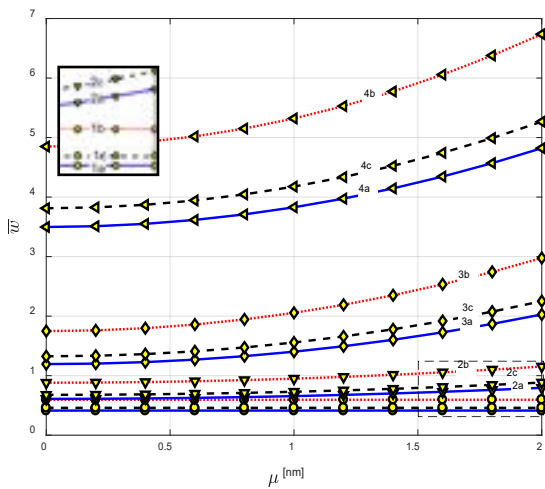
- Ảnh hưởng của điều kiện biên lên ứng suất trong không giống như độ võng, thậm chí là khá phức tạp vì nó còn phụ

thuộc vào giá trị của tham số μ . Khi $\mu = 0$, tấm nano FGMP có liên kết CCCC có ứng suất nhỏ nhất; tiếp đó, tương ứng với các điều kiện biên SFSF, SCSC, SSSS, thì ứng suất tăng dần. Khi $\mu \neq 0$ và tăng dần, điều kiện biên SFSF có ứng suất tăng rất nhanh so với các điều kiện biên SCSC và SSSS dẫn đến tương quan về ứng suất của ba điều kiện biên này thay đổi.

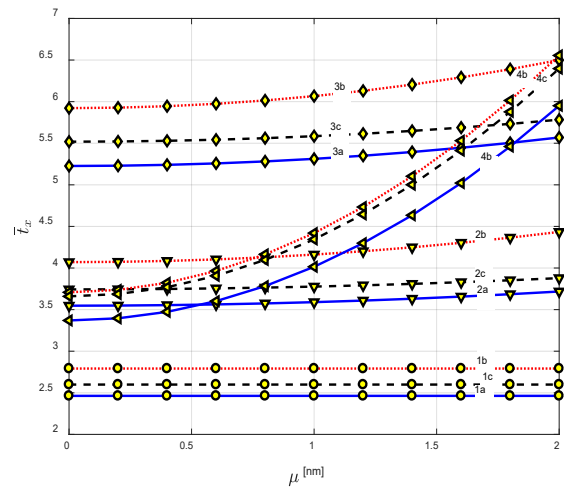
- Về ảnh hưởng của vi bọt rỗng: Với mỗi điều kiện biên và tham số μ cho trước, tấm nano FGM hoàn hảo luôn có độ võng và ứng suất bé hơn so với tấm không hoàn hảo. Phân bố FGMP-2 làm cho tấm có độ cứng uốn lớn hơn so với phân bố FGMP-1, kết quả là tấm FGMP-2 luôn có độ võng và ứng suất gần với tấm FGM hoàn hảo hơn so với tấm FGMP-1.

4. Kết luận

Bài báo xây dựng mô hình tính toán uốn cho tấm nano FGMP với các dạng điều kiện biên khác nhau theo lý thuyết biến dạng cát bậc ba của Reddy kết hợp với lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Nghiệm bán giải tích sử dụng phương pháp pb2-Ritz, cùng với chương trình tính bằng phần mềm Matlab được kiểm chứng cho thấy đủ tin cậy. Các khảo sát số đã được thực hiện cho phép đánh giá ảnh hưởng của điều kiện biên, tham số phi cục bộ, đến độ võng và ứng suất của tấm. Lời giải bán giải tích và những nhận xét rút ra trong khảo sát số là cơ sở cho các nghiên cứu liên quan và là nguồn tài liệu tham khảo hữu ích cho các kỹ sư kết cấu trong công lĩnh vực./.



(a) Biến thiên của \bar{w}



(b) Biến thiên của \bar{t}_x

Hình 3. Biến thiên độ võng không thứ nguyên \bar{w} và ứng suất không thứ nguyên \bar{t}_x của tấm FGMP theo μ : (1-) CCCC, (2-) SCSC, (3-) SSSS, (4-) SFSF; (-a) FGM, (-b) FGMP-1, (-c) FGMP-2

Tài liệu tham khảo

1. Eringen, A.C. and J. Wegner, *Nonlocal continuum field theories*. *Appl. Mech. Rev.*, 2003. 56(2): p. B20-B22.
2. Eringen, A.C., *On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves*. *Journal of applied physics*, 1983. 54(9): p. 4703-4710.
3. Jandaghian, A. and O. Rahmani, *Vibration analysis of functionally graded piezoelectric nanoscale plates by nonlocal elasticity theory: An analytical solution*. *Superlattices and Microstructures*, 2016. 100: p. 57-75.
4. Zare, M., R. Nazemnezhad, and S. Hosseini-Hashemi, *Natural frequency analysis of functionally graded rectangular nanoplates with different boundary conditions via an analytical method*. *Meccanica*, 2015. 50: p. 2391-2408.
5. Natarajan, S., Chakraborty, S., Thangavel, M., Bordas, S., & Rabczuk, T., *Size-dependent free flexural vibration behavior of functionally graded nanoplates*. *Computational Materials Science*, 2012. 65: p. 74-80.
6. Shariati, M., M. Shishehsaz, and R. Mosalmani, *Stress-driven Approach to Vibrational Analysis of FGM Annular Nano-plate based on First-order Shear Deformation Plate Theory*. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2023. 9(3): p. 637-655.
7. Hosseini, M., Mofidi, M. R., Jamalpoor, A., & Safi Jahanshahi, M., *Nanoscale mass nanosensor based on the vibration analysis of embedded magneto-electro-elastic nanoplate made of FGMs via nonlocal Mindlin plate theory*. *Microsystem Technologies*, 2018. 24: p. 2295-2316.
8. Hosseini-Hashemi, S., M. Bedroud, and R. Nazemnezhad, *An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity*. *Composite Structures*, 2013. 103: p. 108-118.
9. Daneshmehr, A. and A. Rajabpoor, *Stability of size dependent functionally graded nanoplate based on nonlocal elasticity and higher order plate theories and different boundary conditions*. *International Journal of Engineering Science*, 2014. 82: p. 84-100.
10. Daneshmehr, A., A. Rajabpoor, and A. Hadi, *Size dependent free vibration analysis of nanoplates made of functionally graded materials based on nonlocal elasticity theory with high order theories*. *International Journal of Engineering Science*, 2015. 95: p. 23-35.
11. Mechab, B., Mechab, I., Benaissa, S., Ameri, M., & Serier, B., *Probabilistic analysis of effect of the porosities in functionally graded material nanoplate resting on Winkler–Pasternak elastic foundations*. *Applied Mathematical Modelling*, 2016. 40(2): p. 738-749.
12. Slimane, M., Mostefa, A. H., Boutaleb, S., & Hellal, H., *Free Vibration Analysis of Functionally Graded FG Nano-Plates with Porosities*. *Journal of Nano Research*, 2020. 64: p. 61-74.
13. Phung-Van, P., Thai, C.H., Nguyen-Xuan, H., & Abdel-Wahab, M., *An isogeometric approach of static and free vibration analyses for porous FG nanoplates*. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2019. 78: p. 103851.
14. Malikan, M., F. Tornabene, and R. Dimitri, *Nonlocal three-dimensional theory of elasticity for buckling behavior of functionally graded porous nanoplates using volume integrals*. *Materials Research Express*, 2018. 5(9): p. 095006.
15. Wattanasakulpong, N. and V. Ungbhakorn, *Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities*. *Aerospace Science and Technology*, 2014. 32(1): p. 111-120.
16. Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., & Karami, B., *A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation*. *Aerospace Science and Technology*, 2018. 72: p. 134-149.
17. Zhao, J., Choe, K., Xie, F., Wang, A., Shuai, C., & Wang, Q., *Three-dimensional exact solution for vibration analysis of thick functionally graded porous (FGP) rectangular plates with arbitrary boundary conditions*. *Composites Part B: Engineering*, 2018. 155: p. 369-381.
18. Reddy, J.N., *Theory and analysis of elastic plates and shells*. 2006: CRC press.
19. Eringen, A.C. and D. Edelen, *On nonlocal elasticity*. *International journal of engineering science*, 1972. 10(3): p. 233-248.
20. Wu, L. and Y. Lu, *Free vibration analysis of rectangular plates with internal columns and uniform elastic edge supports by pb-2 Ritz method*. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011. 53(7): p. 494-504.
21. Alghanmi, R.A., *Nonlocal Strain Gradient Theory for the Bending of Functionally Graded Porous Nanoplates*. *Materials*, 2022. 15(23): p. 8601.
22. Lee, Y., X. Zhao, and K.M. Liew, *Thermoelastic analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method*. *Smart Materials and Structures*, 2009. 18(3): p. 035007.
23. Nguyen, V.L., Nguyen, V.L., Nguyen, T.A., & Tran, M.T., *Dynamic responses of saturated functionally graded porous plates resting on elastic foundation and subjected to a moving mass using pb2-Ritz method*. *Acta Mechanica*, 2024: p. 1-27.

Một công thức dựa trên mạng nơ ron nhân tạo...**(tiếp theo trang 25)**

13. Yang Z, Zhang X, Li B. *Residual punching shear capacity of corroded reinforced concrete slabs*. *Magazine of Concrete Research*. 2023;75(2):82-96. doi: 10.1680/jmacr.21.00308.
14. Lotfy EM, Goma AM, Hosny S, Khafaga SA, Ahmed MA. *Predicting of Punching Shear Capacity of Corroded Reinforced Concrete Slab-column Joints Using Artificial Intelligence Techniques*. *MSA Engineering Journal*. 2023;2(2):384-407. doi: 10.21608/msaeng.2023.291880.
15. Goma AM, Lotfy EM, Khafaga SA, Hosny S, Ahmed MA. *Experimental, numerical, and theoretical study of punching shear capacity of corroded reinforced concrete slab-column joints*. *Engineering Structures*. 2023;289:116280. doi: https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116280.
16. Grubbs F. *Procedures for Detecting Outlying Observations in Samples*. *Technometrics*. 1969;11(1):1-21.
17. Derogar S, Ince C, Yatbaz HY, Ever E. *Prediction of punching shear strength of slab-column connections: A comprehensive evaluation of machine learning and deep learning based approaches*. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024;31(6):1272-90. doi: 10.1080/15376494.2022.2134950.
18. Mansour MY, Dicleli M, Lee JY, Zhang J. *Predicting the shear strength of reinforced concrete beams using artificial neural networks*. *Engineering Structures*. 2004;26(6):781-99. doi: https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2004.01.011.
19. Bashir R, Ashour A. *Neural network modelling for shear strength of concrete members reinforced with FRP bars*. *Composites Part B: Engineering*. 2012;43(8):3198-207. doi: https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.04.011.