Biến đổi giao đối cực với chùm conic phẳng

The polar intersection transformation and the plane conic beam

Nguyễn Văn Tiến

Tóm tắt

Khi nghiên cứu , thiết kế có liên quan tới các conic, cần có nhiều nội dung về chúng, mà những kiến thức hay phần mềm hiện có để vẽ các conic, còn khó tìm tài liệu. Vì thế bài báo này, tôi đề cập đến 1 cách đầy đủ , để có thể áp dụng trong việc chọn lựa các conic trong 1 chùm. Bài này, khảo sát chùm conic, bằng biến đổi hình học.Từ liên hệ cực --đường thẳng đối cực, tác giả tạo ra biến đổi giao đối cực(trước chưa có), biến đổi 1 đường thẳng thành 1 conic. Dùng biến đổi để định dạng mỗi conic: tìm tâm, trục, góc định dạng; khảo sát sự biến thiên của các yếu tố này. Bài có 2 phần..Phần 1: Biến đổi giao đối cực xiên, vuông góc với chùm conic có ít nhất 2 điểm chung, thực & cực chung hữu hạn, phân biệt. Phần 2: chùm conic và đường tròn, chùm có cực hay điểm chung ở vô tận, chùm có điểm chung trùng nhau ; chùm có điểm chung bậc 3; các cặp đường thẳng của chùm.

Từ khóa: *biến đổi giao đối cực; cơ sở biến đổi; góc định dạng; Kí hiệu: ∈:thuộc: //, ∩:giao, ≡:trùng, ≠: khác, Δ*

Abstract

When researching and designing related to conicơ sở, there should be a lot of content about them, but existing knowledge or software to draw conicơ sở still difficult to find documents... Therefore, in this paper, I mention fully, being able to apply in the selection of conic in a conic beam. In this article, survey the conic beam, by geometric transformation. From the relationship between the polar and pole, the author creates the polar intersection transformation (before it was not there), which transforms a straight line into a conic. Use transforms to format each conic: find the center, axis, and angle format; and investigate the variation of these factors. This paper has 2 parts. Part 1: conic beam, have at least 2 points in common - real &, finite common pole, distinct. Part 2: conic beams and the circle, beams have poles or points in common at infinity, conic beams have duplicate points in common; beams have a common point of order 3; straight line pairs of the beam.

Key words: *the polar intersection trans formation - the transform basis,- format angle*

PGS.TS. Nguyễn Văn Tiến
Trường Đại học Công nghệ Giao thông Vận tải
ĐT:0904301144
Email bknguyenvantien @gmail.com

Ngày nhận bài: 23/12/2022
Ngày sửa bài: 09/2/2023
Ngày duyệt đăng: 10/12/2023

Phần 1.
Chùm conic chung 4 điểm, 3 cực là điểm hữu hạn, phân biệt

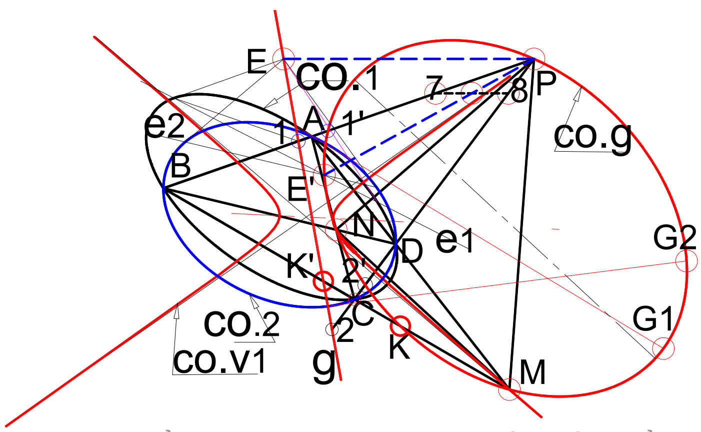
1- Nội dung biến đổi giao đối cực dạng 1.

1.1. Biến đổi giao đối cực xiên

1.1. Cơ sở biến đổi giao đối cực xiên: Trong 1 mặt phẳng, 2 conic co.1, co.2 (conic có thể là 2 đường thẳng) có 2 cặp điểm chung, trên hình 1.1 xác định 1 chùm conic: co.0, co.1, từ nó, lập được vô số conic chung 4 đỉnh tứ giác toàn phần ABCD, có 3 điểm đối cực chung M, N, P.Khi dùng nó làm cơ sở biến đổi, thì M, N, P là 3 cực biến đổi. Chỉ biến đổi điểm, đường đồng phẳng với chùm conic cơ sở (1.1).

1.2. Ảnh 1 điểm: Ảnh 1 điểm E bất kì, là giao điểm E ’ của 2 đường thẳng đối cực ei, ej của E với conic co.i, co.j, của chùm cơ sở (1.2). Conic co.i, co.j có thể là cặp đường thẳng.Ví dụ tìm đường thẳng đối cực của điểm E với 2 đường thẳng PA, PD: nối đường thẳng PE, vẽ đoạn 7-8 // PE, tựa lên 2 đường PA, PD. Nối đường thẳng P và trung điểm đoạn 7-8. (1.3), Đường thẳng đối cực của điểm E với co.i là đường thẳng nối 2 điểm liên hợp của E với co.i (1.4). Đường thẳng đối cực 1 điểm xa vô tận với 1 conic là 1 đường kính tương ứng. Với 2 conic co.i, co.j bất kì của chùm, thì ảnh E ’ là duy nhất, vì đường thẳng E-E’ cắt chùm theo 2 hàng điểm đối hợp, có E, E’ là 2 điểm kép.(1.5).Suy ra: Tìm ảnh 1điểm, theo 2 cặp đường thẳng của chùm cơ sở, dựng hình là ngắn nhất.Khi E là 1 trong 4 điểm chung của cơ sở biến đổi, thì ảnh ≡ với nó (1.6). Khi E ϵchỉ 1 đường thẳng đối cực chung, ảnh là điểm đối cực chung tương ứng(1.7).E là cực chung, ảnh là cả đường thẳng đối cực chung tương ứng (1.8). Bài này, chỉ nói đến biến đổi giao đối cực, nên từ đây chỉ nói tắt là biến đổi.

1.3. Ảnh biến đổi 1 đường thẳng g là 1 đường conic co.g, nối ảnh mọi điểm ϵ g, cùng biến đổi với 2 conic bất kì của cơ sở, giả sử là co.1, co.2. như hình 1. Một đường thẳng g có điểm đối cực với co.1, co.2 là G1, G2. Hàng điểm trên g, tương ứng 2 chùm đường thẳng xạ ảnh, tâm là G1, G2, nên giao điểm các cặp tia tương ứng là 1conic đi qua G1-G2, vì đường thẳng g cắt 3 đường thẳng đối cực chung, 3 điểm đó có ảnh là 3 cực biến đổi, nên co.g đi qua 5 điểm(G1, G2, M, N, P)(1.9). Đường thẳng g đi qua chỉ 1 điểm chung, ví dụ A, thì A ϵ co.g, đường thẳng g(A) là tiếp tuyến ở A của co.g (1.10) Khi đường thẳng g chứa 2 điểm chung A, B. Đường thẳng này phải chứa cực chung ví dụ P. Ảnh P là đường thẳng đối cực chung p, các điểm còn lại của đường thẳng g này có ảnh là các điểm cùng ϵ đường thẳng g(AB), nhưng trên đó, chỉ có A, B là kép, mỗi điểm E ≠, có ảnh E ’ liên hợp của E với AB, thỏa mãn tỉ số kép (E-E’, A-B)= -1 (1.11). Đường

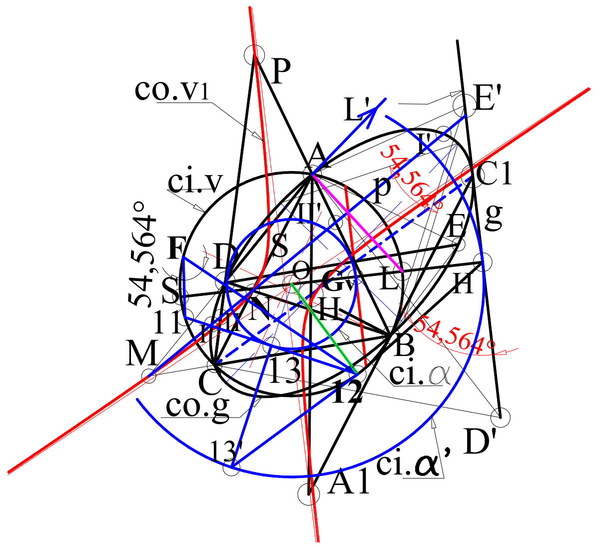


Hình 1. Biến đổi giao đối cực xiên góc, tìm ảnh của điểm E và đường thẳng g

thẳng g cắt AB, CD ở điểm 1, 2, ảnh là 1', 2' ϵco.g: hình 1. Ảnh 6điểm do đường thẳng g cắt 6cạnh tứ giác toàn phần, thì ϵ co.g (1.12). Suy ra: Ảnh 1đường thẳng g biến đổi với 2 conic nào của chùm, cũng luôn có 9 điểm chung: 3 cực, ảnh 6 điểm cắt của g với cạnh tứ giác toàn phần, , nên chỉ là 1 conic chứa mọi điểm đối cực của đường thẳng g với mỗi co.i của chùm. (1.13).

Một đường thẳng g1(EP) đi qua chỉ 1 cực chung ví dụ P, không chứa điểm chung của chùm cơ sở biến đổi, riêng điểm P có ảnh là đường thẳng đối cực chung p, và ảnh các điểm còn lại tập hợp thành 1 đường thẳng khác g1'(E ' P), cũng đi qua P, các cặp đường thẳng g1-g1' tạo ra 2 chùm đường thẳng đối hợp, có 2 tia kép chứa 2 cặp điểm chung (PAB. PCD), & gi, gi ' thỏa mãn (gi', gi, PAB, PCD) = - 1 (1.14). Một đường thẳng đối cực chung nối 2 cực chung, riêng 2 cực chung có ảnh là 2đường thẳng đối cực chung tương ứng, các điểm khác còn lại, có ảnh là điểm đối cực tương ứng (1.15). Điểm đối cực của đường thẳng g với 1conic suy biến (2 đường thẳng), là điểm chung của 2 đường thẳng đó.(1.16) Theo (1.12), hàng điểm ϵ đường thẳng g, tương ứng hàng điểm trên co.g, nên: Tỉ số kép 4 điểm ϵ co.g = tỉ số kép 4 điểm tương ứng ϵ đường thẳng.g (1.17). Một đường thẳng g, cắt chùm cơ sở theo hai hàng điểm đối hợp, có 2 điểm kép, thì 2 điểm kép ϵ co.g. (1.18)

1.4. Ảnh đường thẳng vô tận v trong mặt phẳng biến đổi. Với biến đổi giao đối cực: có 2 chùm conic, chùm conic cần khảo sát là chùm1.Lập chùm conic 2, làm cơ sở biến đổi để khảo sát chùm 1.Nên co.v1, co.v2 lần lượt là ảnh đường thẳng vô tận v với chùm 1, chùm 2, khi co.v2 là đường tròn thì kí hiệu là ci.v (1.19). Tâm của mỗi conic chùm1, thì ϵ co.v1, tâm mỗi conic chùm 2 thì ϵ co.v2.Nếu v không chứa 1 điểm đối cực chung nào của cơ sở biến đổi-như hình1, 4điểm chung của chùm 1 lập tứ giác lồi, co.v1 là 1 hypecbol, nếu 4điểm chung lập tứ giác lõm, co.v1 là elip(1.20).Nói chung mỗi điểm ϵ đường thẳng v, có ảnh là 1 điểm hưũ hạn trên co.v. Ảnh mỗi điểm hữu hạn ϵ co.v, là 1điểm vô tận (1.21). Nếu đường thẳng v chứa 1 cực chung P của chùm, co.v1 là đường thẳng đối cực chung p, và 1 đường thẳng hữu hạn qua P. (1.22) 1.5.Biến đổi 1chùm đường thẳng g(K') với K' không ϵ 1 đường thẳng đối cực chung, thì thành 1chùm conic (M, N, P, K-K là ảnh K' với chùm 2). Ở hình 1, trong các conic ảnh các đường thẳng g(K'), có 3 cặp đường thẳng, mỗi cặp là 2 đường thẳng chứa 2 cạnh đối của tứ giác toàn phần KMNP,

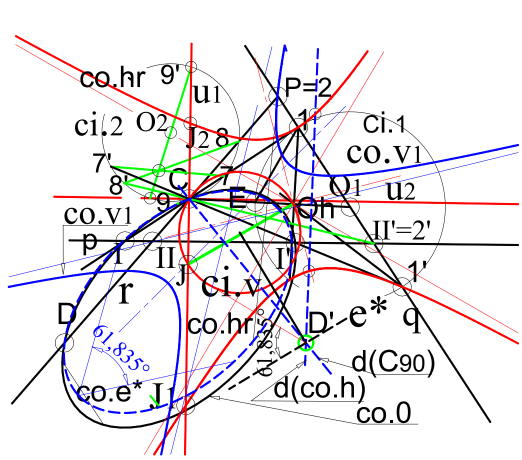


Hình 2.1. Biến đổi giao đối cực vg từ 5 điểm xác định 1 conic

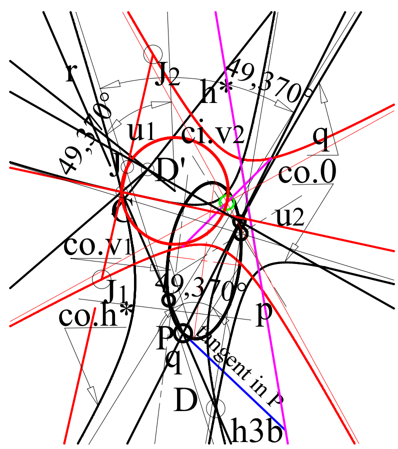
là 1conic suy biến của chùm (1.23). Ví dụ trong chùm đường thẳng qua K', có đường thẳng nối K' và cực M, theo kết qủa (1.12), đường thẳng M-K' có ảnh là đường thẳng đối cực chung tương ứng NP, và 1 đường thẳng đi qua cực chung là M K, thỏa (M K', MK-MA, MC)= -1.(1.24)

1.6. Biến đổi chùm đường thẳng (K'), có K' ϵ 1 đường thẳng đối cực chung- ví dụ NP. Cho cơ sở biến đổi chung 3 cực MNP, và 4 điểm ABCD.Đường thẳng g1 cắt g2 ở K' ϵ đường thẳng NP.sau biến đổi được 2 conic co.g1, co.g2 cùng đi qua 3cực MNP và ảnh K của K'.Vì K' ϵNP, nên K≡điểm đối cực chung M.Do đó 2 conic chỉ còn chung 3điểm, điểm M là kép, 2 conic có tiếp tuyến chung ở M, theo kết qủa (1.12), tiếp tuyến là đường thẳng liên hợp với đường MK, chia điều hòa 2 đường thẳng kép MAB, MCD (1.25).

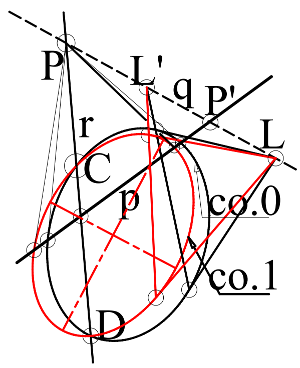
Tương ứng 1-1: 1 đường thẳng g cắt 3 đường thẳng đối cực chung MN, NP, PM ở 3 điểm phân biệt, ảnh 3 điểm đó là 3 điểm đối cực tương ứng M, N, P của conic co.g, ở mỗi điểm đối cực chung đó, kèm theo 1 tiếp tuyến xác định như kết quả 1.12- (1.26). Như thế, trong mặt phẳng biến đổi, bất



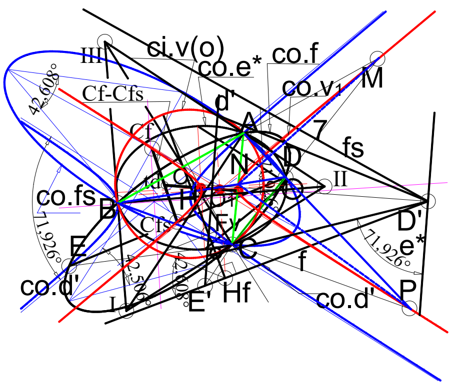
Hình 2.2. Cơ sở biến đổi chùm có 2điểm alh, với C,D ở 1phía của P ϵ Pr



Hình 2.3. Chùm chung 2 điểm ảo, 2 điểm thực CD ϵ Pr ở 2 phía của P



Hình 2.4. Kiểm định và sử dụng 2 điểm chung ảo liên hợp



Hình 3: Ba conic co.d',co.v1, co.e* -2 conic đồng dạng, dây cung liên hợp, đường kính chính

kì điểm nào, kể cả cực biến đổi – kèm theo đường thẳng tiếp tuyến tương ứng, cũng có tương ứng 1-1, tức là biến đổi giao đối cực có tính chất đối hợp, với mọi điểm. (1. 2 7).Có thể lập phương trình chính tắc của co.g, dựa vào kết quả đã vẽ ra co.g, từ điều kiện cho ban đầu (1.28).Suy ra: Ảnh mỗi điểm K' ϵ đường thẳng đối cực chung NP, là cực M, kèm theo đường thẳng tiếp tuyến MK thỏa mãn (1.21), và từ 1điểm M và 1 tiếp tuyến của conic ở M, thì tìm được điểm tương ứng K' duy nhất ϵ NP. Mỗi conic của chùm conic KMNP, thì tương ứng 1đường thẳng của chùm đường thẳng (K'), và ngược lại (1.29).Nên biến đổi này có tính chất đối hợp: điểm tạo ảnh và ảnh, đường thẳng tạo ảnh và conic ảnh.(1.30)

2. Biến đổi giao đối cực vuông góc (vg) -Định dạng conic theo 5 điểm ϵ conic -

2.1. Lập cơ sở biến đổi giao đối cực vuông góc (vg) với chùm 4 điểm chung-thực

Ví dụ cho conic đi qua 5 điểm ABCDE, trên hình 2.1, Qua 3 điểm, lập tam giác ví dụ ABC: tìm giao của 3 phân giác trong là H, vẽ tương ứng 3 phân giác ngoài, tạo nên ∆ A1B1C1 có trực tâm H, có vô số hypecbol vuông đi qua A1-B1-C1-H, và có 3 cặp đường thẳng vuông góc, mỗi cặp là 1cạnh+1đường cao t ương ứng của tam giác A1B1 C1 (cũng là 3 cặp phân giác của ABC). cần tìm ảnh D' của D với cơ sở biến đổi này, đường ci.v ngoại tiếp ABC, lập đường co.v1 (2.1). Từ 4 điểm chung ABCD của chùm 1, có thể tạo được một số cơ sở biến đổi, mỗi cơ sở, có chùm đường thẳng tạo ảnh ≠, nhưng ảnh cùng là 1 chùm conic (ABCD), nên lấy 3 điểm nào của 4 điểm đó làm 3 cực chung của 1 cơ sở cũng được.

2.2. Các tính chất biến đổi giao đối cực vuông góc:

Biến đổi vuông góc có các tính chất của biến đổi xiên, và còn có những tính chất riêng.

Ảnh đường thẳng vô tận v, với chùm (A1-B1-C1-H) là đường tròn Ơ-le (ABC- tâm O) (2.2). Với biến đổi vuông góc, tìm ảnh 1điểm thì đơn dản hơn biến đổi xiên góc. Ví dụ với D: nối D với 1 trong 3 cực, ví dụ A, là đường thẳng AD, vẽ đường thẳng đối xứng Ad1 qua 1 cạnh góc vuông A, tương tự với góc B, là đường thẳng Bd2, 2 đường thẳng cắt nhau cho D'. Nên số đo góc từ mỗi cực biến đổi A, B, C nhìn 2 điểm D, E và D', E' là cte: tức là ∠DAE=∠D'A E'(2.3) nên nó là biến đổi bảo giác. Điểm D, E cũng có thể ϵ ci.v, hay có thể ϵ v.

2.3. Định lượng conic co.g từ đường thẳng g trong biến đổi vuông góc – đường thẳng g có điểm đối cực Gv với ci.v.

(1) Hai đầu mút 1 đường kính: đường thẳng đối cực với ci.v của một điểm bất kì D ϵ đường thẳng g, cắt g ở một điểm E, là điểm liên hợp của D. Đường thẳng g cắt ci.v ở 2 điểm T1T2.Ảnh của D, E là D', E', tỉ số kép (DE, T1T2)=(D'E' T1'T2') mà T1', T2' là điểm vô tận, nên D', E' là 1đường kính, trung điểm là tâm conic co.g.(2.4)

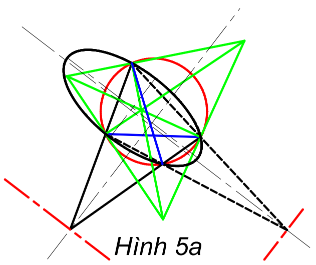
(2) Hai đường kính liên hợp, và góc của chúng: mỗi đường kính của co.g, có 1 điểm đối cực là 1điểm vô tận. chuyển mỗi điểm vô tận đó lên ci.v, và nối với Gv, có đầu mút kia của dây cung, 2 đầu mút tương ứng 2 điểm vô tận là phương 2 đường kính liên hợp, có 1góc xác định. Mỗi dây cung đi qua cực Gv của đường thẳng g, có ảnh là 2 điểm vô tận, chỉ 2 phương của 2 hai đường kính liên hợp, 2 phương này xác định góc của 2 đường kính liên hợp đó. (2.5)

(3) Phương của trục conic: đường thẳng nối Gv và tâm O, là1 đường kính(của ci.v) ⊥ g, ảnh 2 mút đường kính này, là 2 đường thẳng ⊥, là 2 phương của 2 trục co.g. Nếu co.g là elip, điểm mút xa hơn của đường kính trên, có ảnh là phương trục ngắn elip, với co.g là hypecbol, thì cho phương trục nối 2 đỉnh (2.6). Với đường thẳng g tiếp xúc ci.v, co.g là parabol, ảnh điểm tiếp xúc là phương của trục parabol.(2.7). 2 conic có tâm, thì có 4 trục, 2 trục cùng loại là 2 trục cùng, hay không cùng chứa tiêu điểm.(2.8)

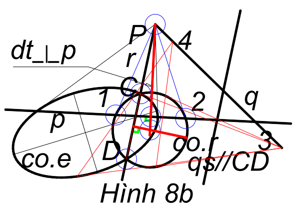
Hệ quả: Với 1 cơ sở biến đổi giao đối cực vuông góc, góc hai đường thẳng g1, g2 là fi, conic ảnh là co.g1, co.g2; thì góc của 2 trục cùng loại (như 2.8) của 2 conic =0, 5.fi. (2.9)

(4) Góc định dạng 1 conic.

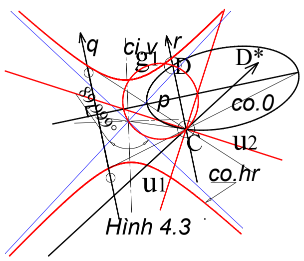
Conic là hypecbol: có tạo ảnh là đường thẳng cắt ci.v ở 2 điểm thực T1, T2.. Nếu gọi δ* là góc của 2 đường tiệm cận, chứa hypecbol co.g ở trong, thì 0 < δ*< 180 °, tức là có hypecbol nhọn, hypecbol tù, và hypecbol vuông (2.9). Vì đã qui định góc của 2 đường thẳng không > 90, nên khi δ*>90, qui định gọi là hypecbol liên hợp với hypecbol nhọn, bù với góc trên. Ta chứng minh được: 1đường thẳng g cắt ci.v (ngoại tiếp tam giác cực) có 2 tình huống với 3 đoạn thẳng là cạnh của ∆ cực: đường thẳng g đã cắt 1 cạnh tam giác cực biến đổi, thì phải cắt 1 cạnh thứ hai. Hoặc đường thẳng g không cắt 1 cạnh nào, tức là chỉ cắt phần kéo dài của cạnh.



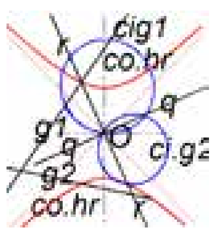
Hình 4.1. Vẽ đ.tròn cuả chùm có 2 điểm alh.



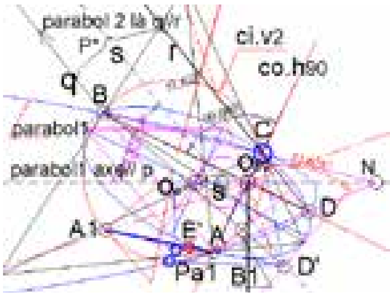
Hình 4.2. Vẽ đ.tròn cuả chùm có 2 điểm alh



Hình 4.3. Chùm có đường thẳng q//r //1trục co.0, thì có 1đ.tròn



Hình 4.4. Biến đổi đường thẳng thành đường thẳngròn



Hình 5.1. Chùm có 1cực chung xa vô tận vì có 1 cặp đường thẳng //,và 1 parabol thực sự

Nếu g cắt 2 cạnh AB, AC tam giác cực, thì góc $\delta^* = \angle T_1 AT_2$. (2.10). Nếu g không cắt cạnh nào, của tam giác ABC, thì $\delta^* = \angle T_1AT_2 = \angle T_1B\ T_2 = \angle T_1CT_2$, Conic là parabol: thì đường thẳng tạo ảnh g chỉ có 1 điểm tiếp xúc với ci.v, góc nội tiếp bằng 0. Nên 2 parabol nào cũng đồng dạng nhau, (góc định dạng bằng nhau, cùng = 0). (2.11)

Conic là elip: Điểm đối cực đường thẳng tạo ảnh 1 elip với ci.v (tâm O) là Gv. Mỗi dây cung qua Gv, có 1 góc nội tiếp xác định trong ci.v. 2 mút dây cung qua Gv ⊥ đường thẳng O-Gv, cho 2 đườn g kính liên hợp, có góc nhỏ nhất, trong các góc 2 đường kính liên hợp, và 2 đường kính này thì đối xứng nhau qua trục elip, và b bằng góc nhọn hình thoi nội tiếp elip. Góc đó là góc định dạng của elip (2.12). Hai conic không suy biến, có góc định dạng bằng nhau, thì đồng dạng với nhau. Điều này phù hợp với phát biểu trong tài liệu tham khảo III: 2 conic đồng dạng có cùng tâm sai e.

Xác định góc định dạng của elip: vẽ đường kính vuông góc với đường thẳng tạo ảnh g, cắt g ở điểm Hg, qua Hg, vẽ tiếp tuyến với ci.v, đo góc của đường thẳng tiếp tuyến và đường thẳng g (2.13) xem hình 2-1.

2.4. Xác định conic trong chùm, có góc định dạng α:

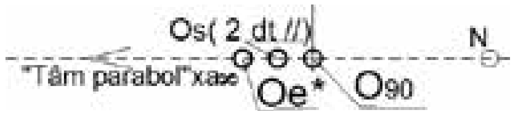
Trên hình 2.1, Lấy 1 điểm F ϵ ci.v - Vẽ 1 góc nội tiếp, đỉnh F= α, có dây cung 11-12, trung điểm 13, vẽ đường. tròn ci. α, tâm O, bán kính O-13. Tìm điểm liên hợp 13' của điểm 13 với đường.tròn ci.v. Vẽ đường.tròn ci. α' tâm O, qua 13'. Đường thẳng g qua D', tiếp xúc đường.tròn ci. α', có ảnh là conic co.g có góc định dạng = α, trên hình, α =54, 564°. Nếu vẽ hypecbol góc α, thì đường thẳng tạo ảnh là tiếp tuyến đường tròn ci. α. Theo trị số α, và chùm conic đã cho, qua điểm D' đã cho, có thể vẽ được 2, 1 hay không có đường thẳng nào tiếp xúc với ci. α, hay ci.α'. (2.14)

2.5. Cơ sởbiến đổi vuông góc với chùm conic chung 2 điểm aỏ, 2 điểm thực.

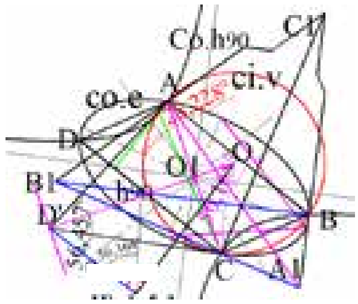
2.5.1. Lập cơ sở biến đổi cho chùm conic (2 điểm thực, 2 điểm aỏ liên hợp)

a/ Chùm cho ở hình 2.2, co.0 bị đường thẳng Pq cắt ở 2 điểm ảo A, B, bị đường thẳng Pr cắt ở 2 điểm thực C D, nên cực P phải ở ngoài co.0 (2.15).

b/ Chuyển liên hệ đối hợp: Với trường hợp, chùm chung 4 điểm thực, ABCD, 3 cực thực M, N, P. như hình 2.1, đường thẳng đối cực chung p cắt conic co.g và 2 đường thẳng q, r theo 2 cặp điểm đối hợp I- I', II- II', xác định 1 liên hệ đối hợp có 2 điểm kép là 2 cực M, N. Liên hệ đối hợp trên đường thẳng PAB, có A, B là 2 điểm kép, và các cặp điểm tương ứng chia điều hòa A.B trong đó có cả P và điểm cắt của p với đường thẳng. Xem hình 2.1, chiếu xuyên tâm C (hayD) 2 cặp



Hình 5.2. (Oe* O90 Os Op1)=-1



Hình 5.3. Chùm có 2 cực chung xa vô tận,các cô nic cùng tâm O1.góc 2 trục cùng loại,của 2 con ic =nửa góc 2đt tạo ảnh

điểm đối hợp của p, ên q, thì trùng với2 cặp điểm trên q, hình chiếu 2 cực M, N lần lượt là A, B (2..16).

c/ Áp dụng kết quả 2.16, vào hình 2.2, chiếu xuyên tâm C hàng điểm đối hợp trên đường thẳng p với 2 điểm kép aỏ M, N lên đ.t Pq, có 2 hàng điểm đ.ối hợp với 2 điểm cắt a.ỏ A, B, l iên hệ đ ối hợp trên đường thẳng Pq thì ≡với hình chiếu 2 cặp điểm của p lên q. (2.17)

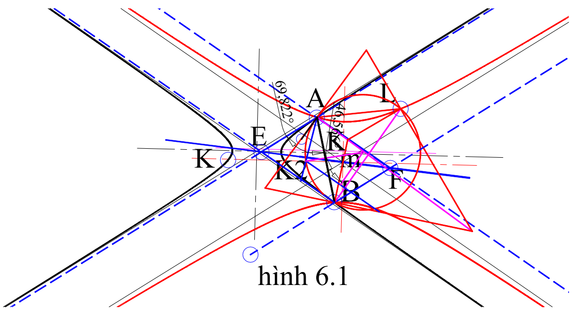
d/ C, D ở cùng 1phía của P trên đường thẳng r, trên hình 2.2, Các bước dựng hình là: (1)Tìm cực chung P= q x r, tìm đường thẳng đối cực chung p, tìm 2 cặp giao điểm trên p là I-I', II-II'. Chiếu xuyên tâm C hay D hàng điểm của p, lên q, là 1-1', 2-2' (2) Vẽ đường tròn ci1, đường kính1-1', tâm O1. Nối đường thẳng C –O1, cắt ci.1 ở E. Nối đường thẳng E-1. Vẽ đường thẳng đối xứng của C-1 qua trục E-1, cắt đường thẳng C-O1 ở Oh. Lấy Oh là tâm 1 hypecbol vuông co.hr đi qua 1-1', và 2 tiếp tuyến C-1, C-1'… (3) Vẽ đường thẳngròn ci.2 qua C, lập l hđh do 2 cạnh góc vuông quay quanh C, cắt q. 2 l hđh trên q, phải có 1 cặp điểm chung.Nối C với 2 điểm chung đó, được đường thẳng Cu1 ⊥ đường thẳng Cu2, đường thẳng C u1 cắt co.hr ở 2 điểm thực J1-J2, có trung điểm J.

(4) Chùm conic bởi hypecbol vuông co.hr, và 2 đường thẳng vuông góc Cu1, Cu2 có đ.t q là đ.t đối cưc chung, trên đó có 2 điểm kép aỏ A, B; chùm này cắt đ.t vô tận theo liên hệ đối hợp eliptic, có 2 điểm kép là 2 điểm xiclic, nên ảnh đường thẳng v là đ.tròn ci.v đi qua 3 điểm: cực C, tâm Oh, và trung điểm J.

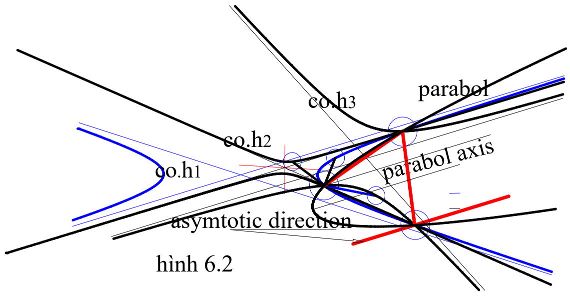
(5)Tìm ảnh của D là D' với cơ sở biến đổi trên, D' là giao điểm: đường thẳng đối cực d(co.hr) của D với co.hr, đường thẳng đ.c d(u1-u2) của D với 2 đường thẳng u1, u2., giao điểm D'= d(co.hr) ∩ d(u1, u2). (2.18)

C, D ở 2 phía của P, trên hình 2.3: các bước cũng như hình 2.2.Chùm cơ sở biến đổi co.hr, C u1, u2-có cực chung C, đường thẳng đối cực chung là q, chứa 2 cực ảo A-B, ảnh các đường thẳng gi (D') là các conic co.gi (C-D, A-B). (2..19)

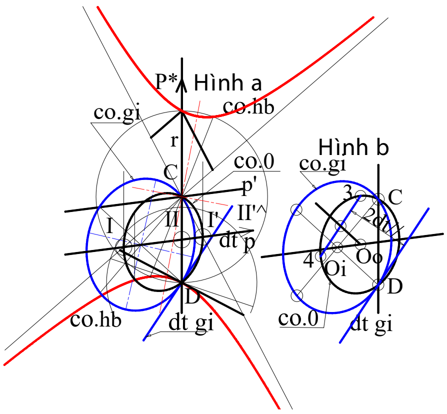
Với C, D ở 1 phía P trên đường thẳng Pr(PCD), thì tìm được co.v1 là hypecbol, D' ở ngoài ci.v, nên tứ giác toàn phần (A B ảo, và CD) là tứ giác lồi. Với C, D ở 2 phía P trên đường thẳng Pr (CPD), thì tìm được co.v1 là elip, D' ở trong ci.v, nên tứ giác toàn phần (A B ảo, và CD) là tứ giác lõm. (2..20)



Hình 6.1. Chùm hypecbol (A,B& 2điểm vô tận 1*,2*)



Hình 6.2. Chùm các parabol và hypecbol chung 1 điểm vô tận và 3 điểm hữu hạn



Hình 6.3a. Từ elip co.0 có thể lập cơ sở biến đổi xiên co.hb, 2đường thẳng p'&CD.

Hình 6.3b. Vẽ trực tiếp elip vị tự co.gi từ đường thẳng gi

2.5.2.Kiểm nghiệm và sử dụng 2 điểm chung ảo liên hợp.

1 conic cắt 1 đường thẳng thực theo 2 điểm thực, thì trông thấy rõ ràng.Nhưng 1 conic cắt 1 đường thẳng thực ở 2 điểm ảo thì không nhìn thấy, nhưng 2 điểm đó cùng chia điều hòa bất kì 2 điểm thực, liên hợp trên đường thẳng đó với conic đã cho. Với 2 conic có chung 2 điểm alh trên 1 đường thẳng q, thì mỗi điểm thực L ϵđường thẳng q, có 1điểm liên hợp L' với các conic của chùm, tức là các đường thẳng đối cực của 1điểm Lϵ q, với các conic của chùm, cùng đi qua chỉ 1 điểm liên hợp L'(2.21). Các điểm tiếp xúc trên tiếp tuyến từ P, với mọi conic của chùm, là những điểm thẳng hàng ϵp (2.22): hình 2.4.Khi 1chùm chỉ cho 2 conic khg suy biến co.1, co.2, cắt nhau ở 2 điểm thực C, D, ta dùng định lí Đề dác 2, tìm 2điểm thực trên đường thẳng chưa biết nối 2 điểm chung aỏ A, B;…từ đó tìm đường thẳng q cắt 2 conic theo 2 điểm aỏ A, B.Với chùm conic chung 2 điểm thực, 2 điểm aỏ, cũng khảo sát được conic cho bằng 5 điểm, có 2 điểm aỏ liên hợp.

3. Khảo sát các conic và quan hệ giữa các conic trong 1 chùm,

3.1. Đường nối tâm và đường nối đầu mút các đường kính cùng đi qua 1 điểm chung ví dụ D. Trên 1 sơ đồ biến đổi giao đối cực, như trên hình 3: điểm D' có với ci.v, đường thẳng đối cực d '. Mỗi đường thẳng g(D') cắt d ' ở 1 điểm E ', là điểm liên hợp của D'. Ảnh của D' E ' là D E, thì E là 1 đầu mút 1 đường kính đi qua D của co.gi. Do đó, co.d ' là đường nối các điểm mút đường kính đi qua D, và trung điểm đường kính là tâm các conic tức là co.v1, vậy co.v1, co.d ' là 2 conic vị tự, tâm D, và tỉ số vị tự là 2, hay 0, 5. (3.1)

3.2. Đường conic chính: mỗi chùm conic tương ứng 1 chùm đường thẳng tạo ảnh g(D'). Nếu D' ≠O-tâm ci.v, thì có 1 đường thẳng g qua tâm O, cho 1 hypeccbol90 của chùm, có 1 đường thẳng qua D', ⊥ đường thẳng D'-O, cho 1 elip có góc định dạng max, gọi là elip chính co.e*(3.2), với D' ở trong ci.v, có 1hypecbol có góc định dạng min, gọi là hypecbol chính co.h*(3.3).

3.3. Góc định dạng của 3 conic: co.d', co.v1, co.e* hay co.h*, của 1 chùm: thì bằng nhau(3.4): Do vị trí hình học của 3 đường thẳng tạo ảnh 3 conic đó, trên hình đã chỉ ra số đo các góc bằng nhau đó. 1 chùm conic bất kì, chỉ có 1 conic chính hoặc co.e*, hay co.h*, kí hiệu tâm là O* (3.5)

3.4. Đường kính chính: trên đường thẳng d '(đường thẳng đối cực của điểm D'), điểm giữa dây cung, và điểm vô tận của d ', là 2 điểm liên hợp, nên tâm O*-đường co.e*, hoặc co.h.*, và tâm O90 của co.h90 của chùm 1, là 2 mút 1 đường kính gọi là đường kính chính của co.v1. (3.6)

3.5. Hai conic có góc định dạng bằng nhau: trong chùm conic bất kì, trừ conic chính và hypecbol 90, mỗi conic khác đều có 1 conic nữa, tạo thành 2 conic có góc định dạng bằng nhau, tương ứng 2 đường thẳng tạo ảnh đối xứng nhau qua đường thẳng nối D'-O (O: tâm ci.v). Nếu ảnh 2 đường thẳng đối xứng đó, là elip, thì cho 2 elip đồng dạng, (3.7), Nếu 2 conic khg suy biến, có góc định dạng bằng nhau, là 2 conic đồng dạng. thì có thể quay 1 conic quanh tâm của nó 1 góc =0, 5 góc của 2 đường thẳng tạo ảnh tương ứng, thì được 2 conic vị tự. (3.8)

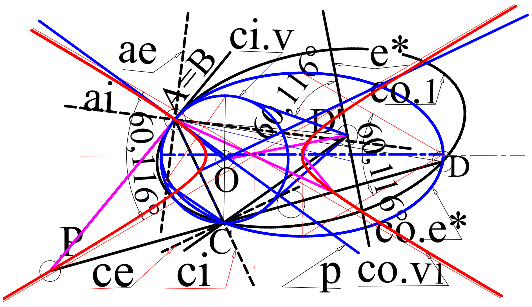
3.6. Dây cung liên hợp: đoạn thẳng nối tâm 2 conic đồng dạng Oi –Oi' này, là 1 dây cung, trên conic co.v1, dây cung này thì liên hợp với đường kính chính O90-O* nói trên. Cho nên, tỉ số kép của 4 điểm: (Oi-Oi', O90-O*)= -1 (3.9). Từ (3.9) suy ra: khi biết co.v1 và 3 trong 4 tâm trên, thì suy ra tâm thứ tư, …

Phần 2: Chùm conic chung ít nhất 2 điểm thực, có phân bố đặc biệt

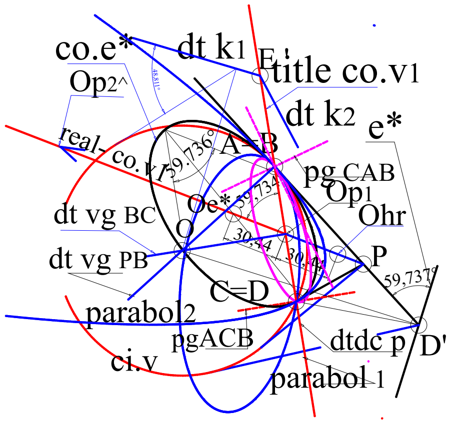
Phần này, tiếp tục khảo sát bằng biến đổi giao đối cực vuông góc, các trường hợp chùm conic có: điểm chung, hay cực chung có phân bố đặc biệt.

4. Chùm conic và đường tròn-Chùm toàn hypecbol 90

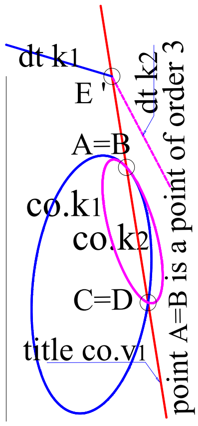
4.1. Chùm conic chỉ có 1đường tròn. Cho conic co.f (trục là t1, t2), cắt 1đường tròn theo 4đỉnh tứ giác ABCD: hình 4.1, ta có: *mỗi cặp cạnh đối của tứ giác toàn phần này đều là 1 đường thẳng đối xứng qua trục của co.f, rồi tịnh tiến theo trục, sẽ thành cạnh kia;gọi là 2 đường thẳng đối xứng-tịnh tiến (4.1).Các cô nic của chùm này, có 2 trục là 2 đường thẳng hoặc //, hoặc ⊥ với nhau (4.2). Rút ra: Khi 2conic có



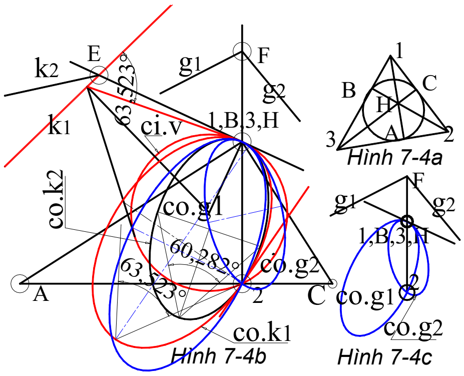
hình 7.1. Cơ sở ⊥ có 1 điểm tiếp .xúc chung A≡B∈ đường thẳng PA , góc ACB =0,...



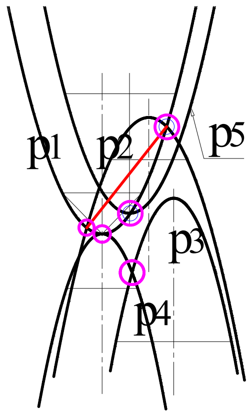
Hình 7.2.cơ sởbiến đổi và khảo sát chùm 2 điểm tiếp xúc chung.



Hình 7.3. Ảnh chùm đường thẳng k (E, E ∈ đường thẳng AC), là các conic mật tiếp ở A≡B.



Hình 7.4. 3 đỉnh tam giác 90°,làm 3 cực bđ,ảnh chùm đt(E) là các co nic có 2 điểm tiếp xúc;chùm đt(F) =>các conic có điểm t.xúc bậc 3.



Hình 7.5.Vị trí parabol 1,và 4 parabol 2,3,4,5

4 điểm cắt ∊ 2đường thẳng đối xứng -tịnh tiến thì 4 trục của 2 conic này là 2 cặp đường thẳng // và 4điểm chung này ∊1 đường tròn (4.3). Ta vẫn vẽ được đường.tròn duy nhất của chùm conic chung 2 điểm thực 2 điểm ảo: ở hình 4.2, ban đầu cho elip và 2 đường thẳng qua P, 1 đường thẳng Pr cắt elip theo 2 điểm thực, đường thẳng Pq cắt elip theo 2 điểm ảo A, B, và 2 đường thẳng này là đối xứng–tịnh tiến, thì theo (4.3), có 1 đường tròn ∊ A BCD. Tâm của nó, là giao điểm đường thẳng trung trực đoạn CD, và đường thẳng Pbi ⊥ với đường thẳng p. (đường thẳng P-bi là phân giác của góc giữa 2 tiếp tuyến qua P với đường.tròn của chùm). Khi đường thẳng AB// CD, và // với 1 trục conic, hình 4.3 - tìm tâm Oh của hypecbol vuông trong mục 2.5 ở trên & đường tròn đi qua 3điểm thực C-D-Oh cũng đi qua A, B ảo trên Pq.Với 4điểm chung, có thể có 2 điểm thực trùng nhau A≡B trên 1 đường thẳng, hay cả 2 điểm thực C≡D trên 1đường thẳng ≠, thì (4.1, 4.2) vẫn đúng.Với chùm conic có 1đường tròn, thì điểm D ∊ đường tròn ABC, ảnh biến đổi giao đối cực vuông góc D' là 1điểm xa vô tận(4.4), 2 parabol của chùm này có trục ⊥ nhau (4.5). Chùm có 1đường tròn thì elip chính co.e* của chùm, là đường tròn duy nhất của chùm, và góc định dạng =90° (4.6).

4.2. Biến đổi giao đối cực biến đường thẳng thành đường tròn: h.4.4 cho 1 chùm conic cơ sở biến đổi gồm: hypecbol90, tâm O, và 2 đường thẳng: Oq ⊥ Or. Đường thẳng Or cắt co.h90 ở 2 điểm thực, thì đường thẳng Oq cắt hypecbol90 ở 2 điểm ảo. Chùm conic này có 3cực chung là O, & 2 điểm xiclic ∊ đường thẳng vô tận v.Ở mặt phẳng này, 1 đường thẳng không ∊ O, có ảnh là đường tròn… Ta gọi biến đổi này là nghịch đảo xoay.

4.3. Chùm chỉ có các hypecbol vuông: là chùm có 4điểm chung là hữu hạn, trong đó có 1điểm là trực tâm của tam giác có 3đỉnh là 3điểm chung còn lại.

5. Chùm có 1 cực xa vô tận, 2 cực xa vô tận.

5.1. Quan hệ đường co.v1 khi có 1 cặp 2 đường thẳng nối 2 cặp điểm chung AB, CD (có thể có 2 điểm aỏ) là 2 đường thẳng //: (thì có 1 cực chung P là 1điểm xa vô tận, như hình 5.1 Khi đó, ảnh đường thẳng v với chùm 1, theo (1.22) là 2 đường thẳng: 1 đường thẳng là đường thẳng đối cực chung p(MN) chứa tâm các conic của chùm, 1đường thẳng là đường thẳng s, cách đều 2 đường thẳng q, r chứa 2 cặp điểm chung. Trong chùm này, có 1parabol và 1 parabol suy biến thành cặp đường thẳng //..(5.1). Giả sử tâm elip chính và tâm hypecbol vuông là Oe và O90, thì tâm 2 conic có góc định dạng bằng nhau trong chùm, là Oi-Oi' phải thỏa mãn (Oi-Oi', Oe-O90)= -1. (5.2). Hình 5.2 (vẽ riêng đường thẳng p, từ hình 5.1): " Tâm " 2 parabol là Os = s ∩p, & điểm vô tận Vp của p. Os cũng là trung điểm đoạn Oe*-O90.tâm elip chính, hypecbol 90 của chùm. Mỗi điểm ∊ nửa đường thẳng p, gốc Os, chứa O90, là tâm các hypecbol, phần nửa kia từ Os, là tâm các elip của chùm.(5.3) Khi AB là 2điểm thực, CD là 2 điểm ảo, và đường thẳng q // r, thì đường co.v1 vẫn là 2 đ.t. Từ đó, vẽ được 1 cô nic chùm này, có tâm Oi ∊đường thẳng p (5.4), thì cũng tìm được tâm Oi' theo kết quả (5.1).

5.2. Chùm có 2 cực chung xa vô tận, 4 điểm chung là đỉnh tứ giác có dạng hình bình hành, thoi, chữ nhật, vuông, hình 5.3 vẽ chùm conic có ABCD là bình hành. Chùm conic này có 2 cực chung ở xa vô tận, nên đường thẳng v là 1 đường thẳng đối cực chung, có điểm đối cực O1, là tâm hình bình hành. Tuy các conic của chùm, có tâm chung là O1, nhưng vẫn tìm được: các elip-với 1 elip chính; các hypecbol –có 1 hypecbol 90°, bằng cách Lấy 3 trong 4 điểm chung (là đỉnh bình hành) trên làm cực của chùm cơ sởbiến đổi, thì xác định được ci.v, tìm được ảnh của D là D', và đường thẳng tạo ảnh mỗi conic, ảnh các đường thẳng đó, là các conic cùng tâm. Dùng kq(3.8), tìm được 2conic góc định dạng bằng nhau, có

2 trục(cùng loại) là 2 đường thẳng đối xứng-tịnh tiến theo trục conic chính (5.5). Chùm này, có 2 parabol suy biến là 2 cặp đường thẳng // (5.6).

6. Chùm có chung điểm xa vô tận

6.1. Chùm chung 2 điểm vô tận thực và 2 điểm hữu hạn A, B

Cho chùm 1 bởi conic co.0, và 2 đường thẳng: đường thẳng vô tận v cắt co.0 ở 2 điểm vô tận 1*, 2*; có góc α, và đường thẳng r cắt co.0 ở 2 điểm hữu hạn A, B (thực hay aỏ). Các conic cuả chùm này, cùng đi qua 4 điểm 1*, 2*, A, B, chỉ toàn hypecbol và chỉ có 1 cặp đường thẳng: AB và v(1*, 2*) Vì thế cứ lấy 1 điểm hữu hạn thứ 5, không thẳng hàng với A, B là dựng được hypecbol của chùm. Ở hình 6.1, Vẽ qua A, B hai cặp đường thẳng // với tiệm cận của co.0, có hình bình hành với 2 đường chéo AB, EF. Đường thẳng E-F là đường thẳng đối cực chung của chùm, nó chứa tâm các hypecbol này.Mỗi đỉnh bình hành, có 1 cặp góc nhọn- đối đỉnh, và kề bù với: 1 cặp góc tù-đối đỉnh. Để xác định 1 hypec bol của chùm, cần thêm 1 điểm hữu hạn K. Chứng minh được: nếu lấy K ở trong góc nhọn E, tức là trong góc tù A, hay B, sẽ có hypecbol nhọn, nó có 1 phần nằm trong bình hành EAFB, tâm hypecbol nhọn là các điểm ϵ đoạn [EF]. nếu K ở trong góc E tù, hay góc A hoặc B nhọn, có hypec bol tù, ở ngoài bình hành, Tâm hypecbol tù ϵ phần còn lại đường thẳng EF. Vì thế, có thể chọn loại hypecbol theo tâm. Có thể lập cơ sở biến đổi xiên, 3 cực biến đổi là A, B, và 1 điểm vô tận 1*.Ảnh của điểm vô tận 2* là 1 điểm hữu hạn 2 ’. Ảnh các đường thẳng của chùm g(2 ’) là những conic cùng đi qua A, B, 1*, 2*.

6.2. Chùm có chung 1 điểm vô tận thực và 3 điểm hữu hạn (hình 6.2)

1 parabol và 2 đường thẳng Pq, Pr trong đó Pq cắt parabol ở 2 điểm hữu hạn AB (có thể thực hay aỏ), còn đường thẳng Pr // với trục para bol, và // tiệm cận hypecbol, nên cắt parabol theo 1 điểm vô tận, 1 điểm hữu hạn. Chùm này còn vô số hypecbol đi qua 3 điểm hữu hạn trên, và 1 điểm xa vô tận của parabol.

6.3. Chùm cho bới elip co.0, bị cắt bởi đường thẳng vô tận v ở 2 điểm aỏ A, B* và 1 đường thẳng r cắt elip ở 2 điểm thực C, D. hình 6.3a, b.*

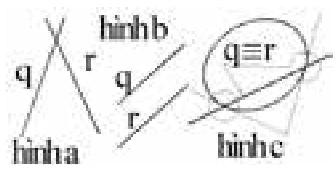
Vì có 1 cực chung là điểm xa vô tận P*, đường thẳng đối cực chung p, qua tâm của co.0; p cắt co.0, và 2 đường thẳng v(A*, B*) và r(C, D). Chiếu xuyên tâm C, 2 cặp điểm này lên đường thẳng v, ta lập được 1 hypecbol: đi qua D, có tâm C, và 2 tiệm cận nối C-I, C-I’ (2điểm I, I’ = p ∩ co.0). Qua C vẽ 1 đường thẳng p’ // p. Ta lập được 1 cơ sở biến đổi giao đối cực xiên, gồm hypecbol này, và 2 đường thẳng CD, và Cp’, có đường thẳng đối cực chung là đường thẳng v, chứa 2 cực ảo là 2 điểm vô tận của elip co.0-hình 6.3a. Nếu biến đổi mỗi đường thẳng qua D, thì được 1 conic đi qua D, nhận đường thẳng này là tiếp tuyến ở D, conic ảnh đi qua 3 cực C, A*, B*.Vì thế, không phải vẽ hypecbol nói trên, chỉ cần vẽ 1 đường kính liên hợp với phương gi của elip co.0, elip mới co.gi đã có phương của đường kính qua D, thì xác định được co.gi, như trên hình 6.3b. Khi 2 điểm ảo vô tận là 2 điểm xiclic, ta có chùm đường tròn chung 2 điểm thực.

7. Chùm có điểm tiếp xúc chung

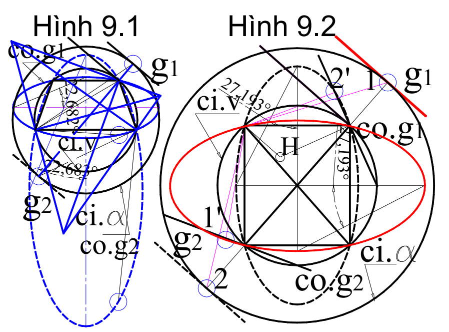
Từ trước, với chùm conic chung 4 điểm phân biệt ta lấy 3 điểm phân biệt trong đó, làm 3 cực chung cho 1 chùm conic làm cơ sở biến đổi giao đối cực vg.

7.1. Chùm conic có 1 điểm tiếp xúc chung, tức là 2 điểm chung trùng nhau như trên hình 7-1, ban đầu cho elip co.1, và 2 đường thẳng: Pq tiếp xúc co.1, ở điểm A≡B, đường thẳng Pr cắt co.1 ở 2 điểm ≠ là C, D. Chúng xác định 1chùm conic: có cực chung là P, đường thẳng đối cực chung p đi qua điểm A≡B, và điểm liên hợp của P với C, D. Bình thường, 1 đường thẳng đối cực chung nối 2 cực chung khác nhau. Ở đây, đường thẳng đối cực chung p, có 2 cực chung M, N trùng với A≡B. Đường nối tâm co.v1 đi qua 2 điểm trùng nhau trên p, nên p là tiếp tuyến của co.v1, ở A≡B. Cơ sở biến đổi giao đối cực vuông góc của chùm conic này, lấy 3 điểm A, B, C để lập cơ sở biến đổi, mà có A≡B. Vì, A≡B trên đường thẳng PA, nên góc ABC=PAC, có 2 phân giác của 2 góc kề bù PAC là ai và ae, còn góc ACB thì =0, hai phân giác của 2 góc kề bù ACB là ci, và ce thì có 1 đường thẳng trùng với A C. Tâm O của đường. tròn ci.v là giao của trung trực đoạn AC, và pháp tuyến tại A của PA. D có ảnh là D’. Chùm đường thẳng (D’) là tạo ảnh chùm conic co(ABCD) đã cho.Trên hình, đường thẳng e*(D’) có góc đồng dạng xác định qua ci.v & g, =60, 166°, thì elip tương ứng của chùm vẽ ra cũng có số đo đó, và = góc của co.v1,

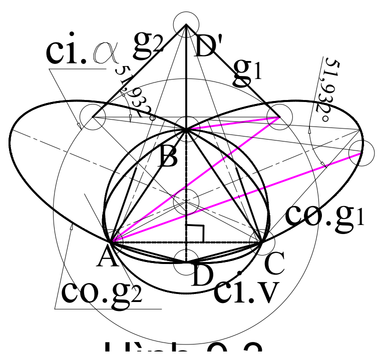
7.2. Chùm conic có 2 điểm tiếp xúc chung: mọi conic chùm 1 tiếp xúc nhau ở 2 điểm chung A≡B ϵ tiếp tuyến chung PA, C≡D ϵ tiếp tuyến chung PC, Từ góc CAB khác 0, và ACB=0, ta tìm được cho mỗi góc 2 đường thẳng phân giác, đó là 2 cặp đường thẳng vuông góc của cơ sở biến đổi giao đối cực vuông góc qua A≡B, và C, trên hình 7.2. Chùm conic 2 làm cơ sở biến đổi giao đối cực vuông góc có 3 cực biến đổi là A, B, C; lập được đường tròn ci.v nối ABC, tiếpxúc đường thẳng PA ở A, ảnh điểm D là D’.Chùm conic 1, có co.v1 là 2 đường thẳng: đường thẳng P-O1, nối tâm mọi conic chùm 1, và đường thẳng đối cực AC nối 2điểm tiếp



Hình 8. 3 cặp đường thẳng



Hình 9.1,9.2. 2elip có gđd bằng nhau, lần lượt có 1 trục, 2 trục đối xứng chung



Hình 9.3. 2 elip đối xứng nhau qua 1 đường thẳng

xúc chung, coi như 2đường thẳng // -ở đây là 2đường thẳng trùng nhau, là 1parabol suy biến, trung điểm I ϵ trung tuyến PL của ∆PAC, là 1 điểm ϵ parabol thực sự của chùm. Co.v1 & elip chính của chùm cùng có góc định dạng 59, 734°.

7.3. Có điểm tiếp xúc bậc 3 - Hình 7.2, chùm conic 1, có 2 điểm tiếp xúc chung A≡B, C≡D. Nên AC là đường thẳng đối cực chung. Lấy 1 điểm E ϵ đường thẳng đối cực chung p(AC), ví dụ 2 đường thẳng k1, k2 qua E, có ảnh là 2 conic co.k1, co.k2 cùng cắt nhau ở C, và vừa tiếp xúc nhau, vừa cắt nhau ở A, hình 7.3 tách ra cho thấy rõ 2conic đó vừa có phần ở ngoài nhau, vừa có phần ở trong nhau. Còn parabol 2 thì hoàn toàn bao ngoài elíp chính (góc 59, 736°) của chùm1. Hình 7.4a, 4 điểm chung của chùm cơ sở biến đổi là 3 đỉnh và trực tâm: ABCH của 1 tam giác thường, thì 3 cực biến đổi là 3 chân đường cao 1-2-3, nếu là tam giác vuông ABC, H≡B;thì 3 cực biến đổi là 1≡3≡H ≡B, &2 như trên hình 7.4b.Điểm 1≡3 trên tiếp tuyến ở điểm B ϵ ci.v2. Nếu lấy 2 đường thẳng cùng đi qua 1 điểm E ϵ đường thẳng tiếp tuyến này, ảnh là 2 conic có 2 điểm tiếp xúc chung là điểm 1≡3, và điểm 2. Nếu hai đường thẳng cùng đi qua 1 điểm F ϵ đường thẳng 2-1≡3, thì ảnh là 2 conic cắt nhau ở điểm 2, và điểm 1≡3, còn là điểm vừa cắt nhau, vừa tiếp xúc, ở hình 7.4c đã vẽ riêng ra để thấy rõ..

7.5. Ví dụ điểm tiếp xúc chung xa vô tận: Các parabol có trục // trên hình 7.5, kí hiệu là p1, p2…p5. Chúng có 1điểm vô tận là tiếp xúc chung bậc 2 hay bậc 3 (giữa p1 và p5), và những điểm chung khác.

7.6. Chùm chung 2 điểm thực trùng nhau, và 2 điểm ảo, sẽ khảo sát với chùm chung 2 cặp điểm ảo.

8. Conic là 2 đường thẳng của chùm.

Trong chùm conic nào cũng có conic suy biến thành cặp đường thẳng. Có 3 dạng cặp đường thẳng: cắt nhau, song song, trùng nhau như hình 8.Khi 2 đường thẳng cắt nhau, conic cặp đ.t có tâm là giao điểm 2 đường thẳng, trục là 2 đường thẳng phân giác 2 góc kề bù, 2 đường thẳng này là 1 hypecbol suy biến, có 2 điểm vô tận khác nhau. Trong 1 số chùm đặc biệt: 1 cực xa vô tận, 2 cực xa vô tận hay có 1 điểm tiếp xúc chung, 2 điểm tiếp xúc chung: hai đường thẳng có thể //, hay đặc biệt trùng nhau, đó là parabol suy biến, có 1điểm vô tận. Có khi, đường co.v1 cũng là conic suy biến gồm 2 đường t hẳng.Trên co.v1 suy biến, vẫn có qui luật đường kính chính và dây cung liên hợp: cả 4 tâm hypecbol 90, elip chính, hay hypecbol chính, và 2 conic đồng dạng cùng trên 1 đường thẳng, ở hình 5.1, 5.2.

9. Ví dụ chùm ngoại tiếp đa giác đối xứng.

Có thể khai thác nhiều đặc tính về các chùm conic, từ những kết quả trên. Trong kĩ thuật, xây dựng, kiến trúc, có thể dựa trên chùm conic 4 điểm hữu hạn, nội tiếp 1 đ.tròn, có tính chất đối xứng để tạo ra cặp conic có góc định dạng bằng nhau, chung 1 trục đối xứng, trên hình 9.1: 4 điểm chung là 4 đỉnh hình thang cân, nội tiếp đ.tròn ci.v, nên D' là điểm vô tận, 1đ.tròn tương ứng elip góc định dạng α, 2 đường thẳng tiếp tuyến qua D' xa vô tận, cho 2 elip có chung 1 trục đối xứng…, 2 elip có chung 4 đỉnh chữ nhật, có 2 trục đối xứng, trên hình 9.2, 9.3., là 2 conic đối xứng, chung 4 đỉnh ABCD của 2 tam giác cân chung đa đáy...

10. Kết luận

1/ Trước đây: biến đổi cộng tuyến, biến conic thành conic. Nó tổng quát hóa được các biến đổi hình học Ơclid.Tìm ra 1 số định lí quan trọng về chùm conic. Phân loại conic theo các phương trình, và theo số đo tâm sai e, nhg không chỉ ra quan hệ các conic khác trong 1 chùm.

2/ Bài này, tạo ra 1 biến đổi xạ ảnh mới, biến đường thẳng thành conic, và các conic đi qua 3 cực biến đổi thành các đường thẳng. Nó thực sự khảo sát các thông số về: tâm, trục, góc định dạng mỗi conic qua 5 điểm. Tìm ra theo thước thẳng, compa, các quan hệ giữa các conic của chùm: về tâm các conic, vị trí đường thẳng tạo ảnh với co.v2; đường kính chính; 2 conic đồng dạng... Ví dụ: mỗi chùm 4 điểm chung lập tứ giác lồi, Chùm toàn hypecbol vuông, chùm toàn elip vị tự, toàn đường tròn, chùm có chỉ 1 đường. tròn, chùm tứ giác lồi: các elip, chỉ có 1 elip chính (góc đồng dạng max), chùm tứ giác lõm: chỉ có 1 hypecbol chính có góc đồng dạng min.

3/ Việc lập cơ sởbiến đổi giao đối cực vuông góc cho chùm có chung 2 điểm aỏ, nói ở mục 3. Điểm aỏ của conic, trước đây, là chấp nhận theo giải tích, bài này: đã chỉ ra việc kiểm nghiệm và sử dụng 2 điểm ảo đó, nêu rõ phân bố 4 điểm, có 2 điểm ảo, thế nào là tứ giác lồi, tứ giác lõm.Khảo sát chùm conic chung 2 điểm ảo, còn giúp khảo sát chùm conic chung 2 cặp điểm ảo …

4/ Theo biến đổi giao đối cực, có thêm nhiều tình huống dựng conic của chùm…

5/ Hai conic mật tiếp, dẫn tới việc vẽ đường tròn mật tiếp ở mỗi điểm của conic, giúp tìm được đường túc bế của đường cong bậc hai.

6/ Từ trước, chỉ thường xem xét đường cong phẳng bậc cao, theo giải tích, nhưng biến đổi giao đối cực lần đầu tiên, bằng hình học, tạo ra và khảo sát được các đường cong bậc cao: 3, 4, 5, 6…/.

Tài liệu tham khảo

1. *Hình học xạ ảnh – NXB Đại học Sư phạm Hà Nội, năm 1970 - Viện sĩ GS. Nguyễn Cảnh Toàn.*
2. *Toán hình học – Nhà xuất bản Dunod - Paris- năm 1997- Jean Marie Monier*
3. *Essential concepts of projective geometry- University of Callifornia Riverside, 2007- A.Seldelberg*
4. *Một số bài báo về biến đổi hình học của cùng tác giả.*