DÙNG MAPLE ĐỂ XỬ LÝ MỘT SỐ MÔ HÌNH TRONG CÂN BẰNG QUẦN THỂ SINH VẬT, QUỐC PHÒNG, Y TẾ

*TS. Phan Đức Châu **

Tóm tắt: Maple là một phần mềm Toán học do Đại học Tổng hợp Waterloo (Canada) xây dựng và đưa vào sử dụng năm 1985. Tên "Maple" chỉ hình tượng Lá phong (tiếng Anh: Maple) trên Quốc kỳ Canada. Maple chạy trên tất cả các hệ điều hành, có trình trợ giúp (Help) rất dễ sử dụng. Người dùng có thể nhập biểu thức toán học theo các ký hiệu toán học truyền thống. Maple hỗ trợ cho cả tính toán số và tính toán hình thức, cũng như hiển thị. Maple cung cấp ngày càng nhiều các công cụ trực quan, các gói lệnh tự học gắn liền với toán phổ thông và đại học. Ưu điểm đó khiến ngày càng có nhiều nước trên thế giới lựa chọn sử dụng Maple trong dạy-học toán tương tác trước đòi hỏi của thực tiễn và sự phát triển của giáo dục.

Từ khóa: Maple, toán học, thực tiễn.

Summary: *Maple is a mathematical software developed by the University of Waterloo (Canada) and put into use in 1985. The name "Maple" refers to the image of the Maple Leaf (English: Maple) on the Canadian flag. Maple runs on all operating systems and has an easy-to-use Help. Users can enter mathematical expressions according to traditional math symbols. Maple supports both numerical and formal calculations, as well as display. Maple offers more and more intuitive tools, self-study command packages associated with high school and college math. That advantage makes more and more countries around the world choose to use Maple in interactive math teaching and learning according the requirements of practice and the development of education.*

Keywords: *Maple, math, practice.*

1. Mô hình Lotka–Volterra

Mô hình Lotka–Volterra còn gọi là phương trình về con mồi và kẻ săn mồi. Khoảng thời gian Chiến tranh thế giới I, Umberto D'Aconna quan sát về lượng cá và đánh bắt cá ở cảng Fiume (thuộc Ý lúc đó, nay thuộc Croatia) đã có những nhận xét ban đầu. Dựa trên các số liệu này, Vito Volterra đưa ra mô hình toán học vào năm 1925. Sau đó, Alfred J. Lotka bổ sung phát triển. Mô hình này giải thích về sự cân bằng sinh thái trong hệ sinh thái giữa con mồi và kẻ săn mồi, trong mối tương quan về số lượng quần thể.

Gọi x(t) là số lượng quần thể con mồi (Preys) và y(t) là số lượng kẻ săn mồi (Predators) theo thời gian t. Mô hình

* Phó Chủ nhiệm Khoa Toán, Trường Đại học KD&CN Hà Nội

Lotka-Volterra viết dưới dạng một hệ phương trình vi phân cấp một:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha\, x - \beta\, xy = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} = \delta\, xy - \gamma\, y = y(\delta x - \gamma) \end{cases}$$

$\alpha\, \beta\, \delta\, \gamma$ là các hằng số dương đặc trưng cho hai quần thể:

α tỉ lệ sinh của con mồi,

β hệ số tỉ lệ con mồi bị ăn thịt

δ tốc độ sinh sản của loài săn mồi đối với mỗi con mồi bị ăn

γ tỉ lệ chết của kẻ săn mồi

Số lượng quần thể con mồi và kẻ săn mồi ổn định nếu

$\frac{dx}{dt} = 0\ hay\ y = \alpha/\beta$ và

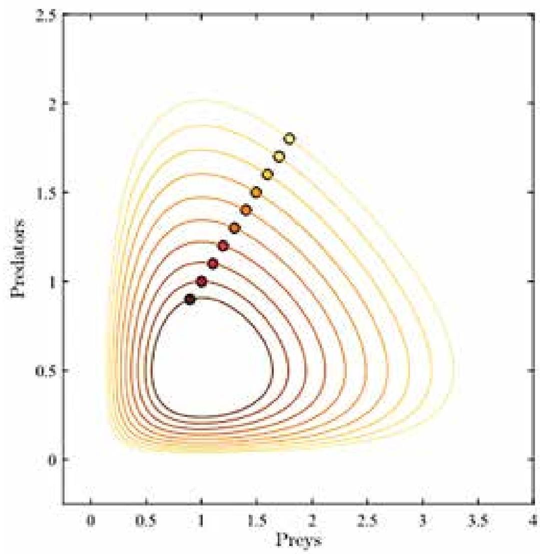
$\frac{dy}{dt} = 0\ hay\ x = \frac{\gamma}{\delta}$

Tốc độ tăng trưởng hay suy giảm của một quần thể bên này không những phụ thuộc vào số lượng của quần thể đó, mà còn phụ thuộc vào số lượng của quần thể phía bên kia.

Tốc độ $\frac{dx}{dt} < 0$ (Số lượng con mồi suy giảm) nếu $\alpha - \beta y < 0$ hay số lượng kẻ săn mồi $y > \alpha/\beta$ (y(t) vượt ngưỡng α/β).

Tốc độ $\frac{dy}{dt} > 0$ (Số lượng kẻ săn mồi tăng) nếu $\delta x - y > 0$ hay số lượng con mồi $x > \gamma/\delta$ (x(t) vượt ngưỡng γ/δ).

Còn khi số lượng con mồi dưới ngưỡng $x < \gamma/\delta$ thì $\frac{dy}{dt} < 0$ hay số lượng kẻ săn mồi cũng giảm. Các nhà sinh học cũng đã vẽ được quỹ đạo biến thiên của hai quần thể:



Quỹ đạo điển hình là những đường cong đóng: x(t) và y(t) biến động theo thời gian t (trừ khi hoặc x hoặc y có giá trị đầu là 0). Giá trị cực đại (cực tiểu) của y(t) xảy ra sau một khoảng thời gian sau khi x(t) đạt cực đại (cực tiểu). Khi quần thể thú săn y đạt giá trị cực đại, quần thể con mồi x sẽ giảm dần và số lượng kẻ săn mồi y sẽ giảm đột ngột. Số lượng kẻ săn mồi giảm đi cho phép quần thể con mồi có thể phát triển trở lại, dẫn đến quần thể thú săn mồi sẽ tăng lên và chu kỳ cứ thế lặp lại.

Mức độ của sự tăng, giảm này phụ thuộc vào những quỹ đạo được vạch ra theo các mốc sự cân bằng sinh thái.

Khi môi trường thay đổi (thức ăn cho con mồi suy giảm,...) có thể tác động dịch chuyển hệ sinh thái từ một quỹ đạo này sang một quỹ đạo khác.

Khi giải một hệ phương trình vi phân cấp một, MAPLE còn vẽ cả một trường vectơ nghiệm và từ đó lọc ra nghiệm riêng.

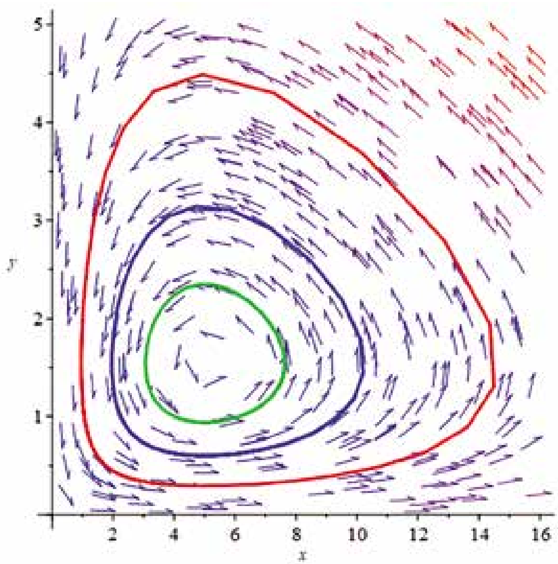
restart;

with(DEtools);

pt1 := diff(x(t), t) = x(t)(a - b*y(t));*
pt2 := diff(y(t), t) = y(t)(c*x(t) - d);*
a := 2;
b := 1.3;
c := 0.4;
d := 2;
DEplot({pt1, pt2}, [x(t), y(t)], t = 0 .. 5, x = 0 .. 16, y = 0 .. 5, dirfield = 400, [[0, 4, 1], [0, 1, 2], [0, 2, 1.3]], color = magnitude, arrows = small, linecolor = [green, red, blue]);

Vẽ 3 nghiệm riêng, ứng với 3 tình huống ban đầu. Khi t = 0,

Con mồi	Kẻ săn mồi	Mầu
4	1	Xanh lá cây
1	2	Đỏ
2	1.3	Xanh dương



(Trục x = Con mồi, trục y = Kẻ săn mồi)

2. Mô hình chạy đua vũ trang Richardson - Richardson's Arms Race Model

Xem xét hai quốc gia thù địch. Khi quốc gia này tăng chi tiêu quốc phòng, quốc gia kia cảm thấy bị đe dọa. Vì thế xuất hiện việc chạy đua vũ trang.

Giả sử x (t) và y (t) thể hiện mức chi tiêu quốc phòng hàng năm của hai quốc gia (theo cùng đơn vị tiền tệ). Các giả thiết được nêu ra:

1) Tốc độ chi tiêu quốc phòng của nước này tỉ lệ với *chi tiêu* quốc phòng của quốc gia kia.

2) Chi tiêu quốc phòng của một quốc gia tạo ra một sự kéo lùi nền kinh tế của quốc gia đó, nên cũng ảnh hưởng đến *tốc độ chi tiêu* quốc phòng.

3) Thiện chí của quốc gia này đối với quốc gia kia cũng ảnh hưởng đến tốc độ chạy đua vũ trang.

Mô hình chạy đua vũ trang Richardson được mô tả bằng hệ hai phương trình vi phân cấp 1 sau:

x'(t) = a.y(t) – m.x(t) + r
y'(t) = b.x(t) – n.y(t) + s

Trong đó, các hằng số r và s cho biết thiện chí của quốc gia này đối với quốc gia kia. Trong hệ trên, a, b, m, n là các hằng số dương, r và s là các hằng số âm.

Sử dụng Maple để giải hệ phương trình trên.

restart : with (*DEtools*) :

$$pt1 := \frac{d}{dt}x(t) = a.y(t) - m.x(t) + r;$$

$$pt2 := \frac{d}{dt}y(t) = b.x(t) - n.y(t) + s;$$

Các hằng số được lựa chọn như sau:
a := 2.0; *m* :=1.0; *r* := –3.0;
b := 2.0; *n* := 1.0; *s* := –3.0;

Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân trên: *dsolve* (*{pt1, pt2}*)

Ta đưa ra 4 điều kiện ban đầu khác nhau:

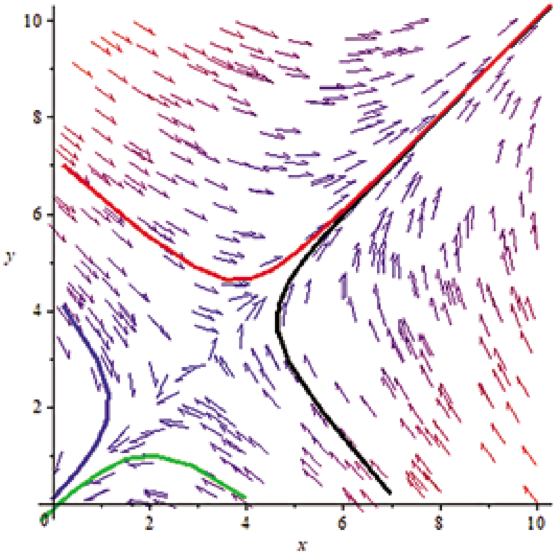
t=0: x=4 và y=0.1, x=0.2 và y=4.1
x=7 và y=0.2, x=0.2 và y=7

Bốn điều kiện ban đầu ứng với 4

kịch bản tại thời điểm xuất phát.

Và vẽ trường nghiệm:

DEplot({pt1, pt2}, [x(t), y(t)], t = 0 .. 10, *x* = 0 .. 10, *y* = 0 .. 10, *dirfield* = 400, [[0, 4, 0.1], [0, 0.2, 4.1], [0, 7, 0.2], [0, 0.2, 7]], *arrows* = *small,* color = magnitude, scaling = constained, linecolor = [green, red, blue]);



Trên trường vectơ nghiệm cho biết nếu tại thời điểm t = 0, x(0) hoặc y(0) đã vượt khỏi giá trị 6 thì chuyện chạy đua vũ trang là tất yếu. Còn x(0) và y(0) nhỏ hơn 4 sẽ có chuyện giải trừ quân bị. (Chú ý đến hướng của các vectơ trong trường nghiệm).

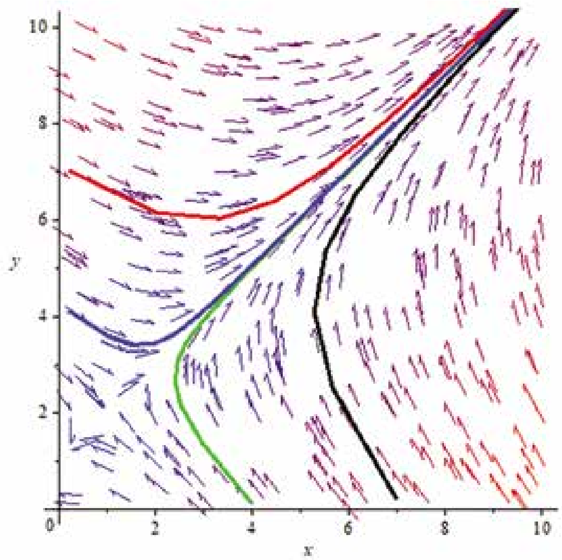
Điều gì xảy ra khi s = 0, khi một bên mất thiện chí?

a := 2.0; *m* :=1.0; *r* := –3.0;

b := 2.0; *n* := 1.0; *s* := 0;

dsolve (*{pt1, pt2}*)

DEplot({pt1, pt2}, [x(t), y(t)], t = 0 .. 10, *x* = 0 .. 10, *y* = 0 .. 10, *dirfield* = 400, [[0, 4, 0.1], [0, 0.2, 4.1], [0, 7, 0.2], [0, 0.2, 7]], *arrows* = *small,* color = magnitude, scaling = constained, linecolor = [green, red, blue]);



Trên trường nghiệm ta thấy tình hình chạy đua vũ trang đến sớm hơn khi x(0) hoặc y(0) vượt khỏi giá trị 4.

3. Mô hình nhiễm bệnh và phục hồi Kermack-McKendrick

Mô hình Kermack-McKendrick là mô hình SIR (Susceptible-Mẫn cảm, Infected-Bị nhiễm, Recovered-Phục hồi) đối với một bệnh truyền nhiễm trong một vùng dân cư khép kín.

Gọi:

* x(t) là tỉ lệ dân cư mẫn cảm (dễ mắc bệnh) theo thời gian t: 0 < x(t) < 1 (Yếu tố S)

* y(t) là tỉ lệ dân cư bị nhiễm bệnh: 0 < y(t) < 1 (Yếu tố I)

* β hệ số trung bình truyền bệnh

* G hệ số trung bình mà người bệnh hoặc phục hồi hoặc chết

Xét một mô hình đơn giản không có yếu tố phục hồi R.

Khi đó, mô hình Kermach - McKendrich là một hệ hai phương trình vi phân cấp một sau:

$$x'(t) = - \beta . x(t).y(t)$$

$$y'(t) = \beta . y(t).x(t) - G.y(t)$$

Sử dụng Maple giải hệ trên.

restart: with(DEtools) :

$\beta := '\beta': G := 'G':$

$$des := \left[\frac{d}{dt}\,x(t) = -\beta.x(t)\,.y(t),\ \frac{d}{dt}y(t) = \beta.y(t)\,.x(t) - G.y(t)\right]$$

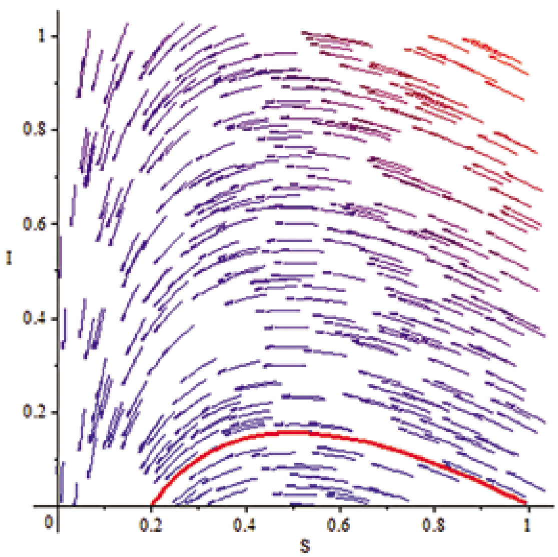
Cho các hệ số các giá trị:

$\beta := 2;\ G := 1;$

Nêu một tình huống: Tại t = 0 có 99,5% dân cư mẫn cảm với bệnh và 0,5% dân cư mắc bệnh,

Hệ phương trình trên có trường vectơ nghiệm:

DEplot (des, [*x(t), y(t)*], *t* = 0 .. 20, *x* = 0 .. 1, *y* = 0 .. 1, *dirfield* = 400, [[0, 0.995, 0.005], *linecolor* = *red,* color = magnitude, arrows = curve, scaling = constained, labels = [”S”, ”I”])



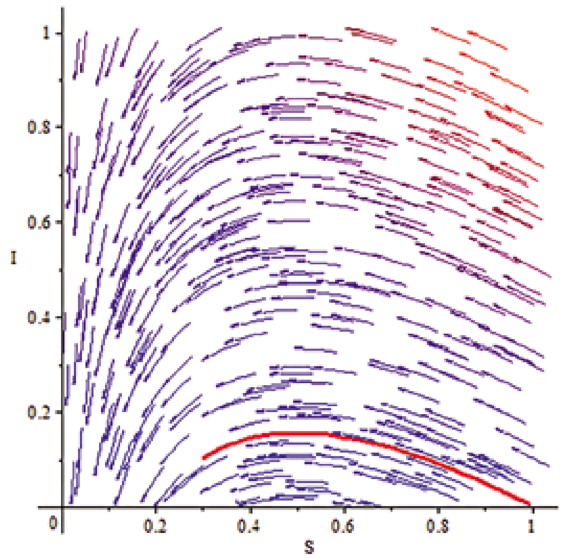
(Trục hoành - yếu tố S, trục tung – yếu tố I. Chú ý đến chiều vectơ trong trường nghiệm.)

Với giả thiết tại t = 0 có 99,5% dân cư mẫn cảm với bệnh và 0,5% dân cư mắc bệnh, ta có nghiệm riêng biểu diễn bằng đường mầu đỏ trong trường vectơ trên. Tỉ lệ mắc bệnh cao nhất khoảng 18%.

Chúng ta thấy rằng khi I = 0, ta có S = 0.2, nghĩa là, khoảng 20% dân cư tuy mẫn cảm với bệnh nhưng không mắc bệnh.

Nếu muốn biết tình hình tại thời điểm t = 7 ta có:

DEplot (des, [*x(t), y(t)*], *t* = 0 .. 7, *x* = 0 .. 1, *y* = 0 .. 1, *dirfield* = 400, [[0, 0.995, 0.005], *linecolor* = *red, color* = *magnitude, arrows* = *curve, scaling* = *constained, labels* = [”S”, ”I”])



Trên đồ thị ứng với điểm cuối đường mầu đỏ ta có S = 0.3 (30%) và I = 0.1 (10%)

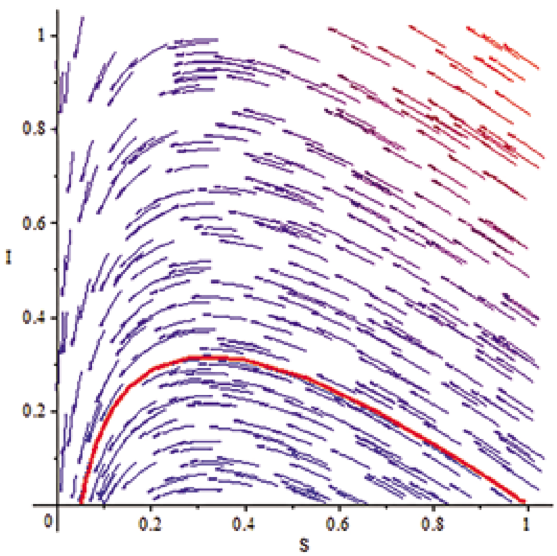
Chú thích:

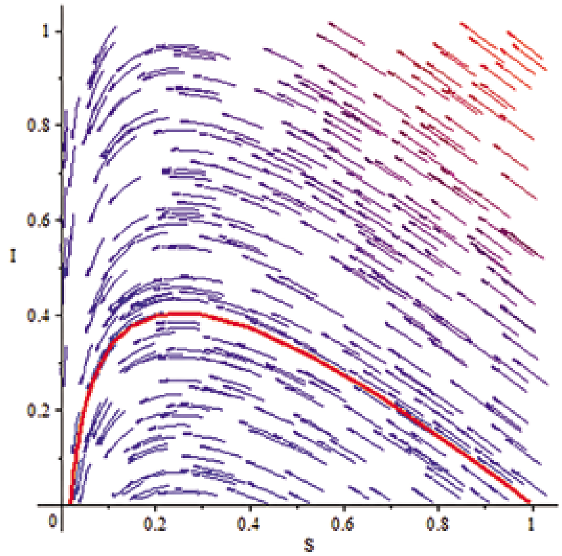
Trong lệnh DEplot cho t = 0..15 ta cũng có kết quả gần như trên. Nghĩa là sau 15 thời kỳ thì I đã về gần 0.

Thay đổi các hệ số: tăng β, giảm G:

$\beta := 2.5;\ G := 0.8;$

DEplot (des, [*x(t), y(t)*], *t* = 0 .. 20, *x* = 0 .. 1, *y* = 0 .. 1, *dirfield* = 400, [[0, 0.995, 0.005], *linecolor* = *red,* color = magnitude, arrows = curve, scaling = constained, labels = [”S”, ”I”])





Quan sát thú vị nhất của mô hình là S không giảm xuống 0, nghĩa là không phải mọi người trong quần thể đều mắc bệnh, ngay cả khi β được tăng lên (nhiều người có thể mắc bệnh truyền nhiễm hơn) và G giảm. Tỉ lệ mắc bệnh cao nhất trên 30%.

Chọn các hệ số:

$\beta := 2; G := 0.5;$

DEplot (des, [*x(t), y(t)*], *t* = 0 .. 20, *x* = 0 .. 1, *y* = 0 .. 1, *dirfield* = 400, [[0, 0.995, 0.005], *linecolor* = *red, color* = *magnitude, numsteps* = 200, *arrows* = *curve, labels* = [”S”, ”I”])

Với hệ số trên thì tỉ lệ mắc bệnh cao nhất là 40% và khi I = 0, ta có S = 0,02 hoặc 2%.

Các điều này đúng dự đoán những gì đã được quan sát thấy trong cuộc sống thực./.

Ngày nhận bài: **15/10/2021**
Ngày phản biện: **18/11/2021**
Ngày duyệt đăng: **30/11/2021**