

TÍNH TẦN SỐ RIÊNG CỦA HỆ DẦM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trịnh Tự Lực *, Trần Ngọc Thắng **

Tóm tắt: Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) là một phương pháp quan trọng và không thể thiếu được đối với người kỹ sư dùng để phân tích và thiết kế kết cấu. Trong các công trình xây dựng, việc xác định được các tần số dao động riêng của hệ kết cấu là nhiệm vụ quan trọng. Vì vậy, bài báo sẽ trình bày việc sử dụng phương pháp PTHH với việc xác định được các tần số dao động riêng của hệ dầm.

Từ khóa: Phần tử hữu hạn, dao động riêng, dầm.

Abstract: Finite element method (FEM) is now an important and frequently indispensable method of engineering analysis and design. However, the determination of natural frequencies of structures is always important. Therefore, this paper aims the usage of FEM to calculate natural frequencies of beam.

Keywords: Finite Element Method; natural frequencies; beam.

1. Đặt vấn đề

Trong các công trình xây dựng, việc xác định được các tần số dao động riêng của hệ kết cấu là nhiệm vụ quan trọng trong cơ học công trình nói chung và trong bài toán động lực học nói riêng. Tần số dao động riêng là đặc trưng cho mỗi kết cấu cụ thể. Với hệ tuyến tính, tần số dao động riêng và chu kỳ dao động không phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu mà chỉ phụ thuộc vào các chỉ tiêu cơ lý của vật liệu, hình dáng kích thước tiết diện và hình thức liên kết. Chính vì vậy, khi đo được các tần số dao động riêng có thể đánh giá được bản chất đối tượng. Đó chính là nội dung của phương pháp đánh giá chất lượng công trình qua dao động, một phương pháp đang được dùng phổ biến hiện nay.

Mặc dù vấn đề tính toán dao động riêng của dầm là rất quan trọng và đã được tính toán bởi các phương pháp giải tích, cho kết quả tính chính xác như phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, tuy nhiên với những hệ phức tạp có nhiều phần tử, có độ cứng phần tử thay đổi, khối lượng tính toán rất lớn, khó khăn về mặt toán học là hiện hữu. Để giải quyết vấn đề này, tính toán dao động riêng của dầm bằng một trong các phương pháp số - đó là phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) là hướng giải quyết rất hiệu quả và được sử dụng rộng rãi. Trong phương pháp PTHH với bài toán dao động riêng của kết cấu, các dữ liệu đầu vào như sơ đồ tính, khối lượng kết cấu đều được số hóa nên việc nhập dữ liệu đầu vào rất dễ dàng. Trong quá trình giải bài toán,

* Tiến sĩ, Khoa Xây dựng, Trường Đại học Kinh doanh và Công nghệ Hà Nội.

** Thạc sĩ, Khoa Xây dựng, Trường Đại học Kinh doanh và Công nghệ Hà Nội.

phương pháp PTHH đưa độ cứng về ma trận độ cứng, đưa khối lượng kết cấu về ma trận khối lượng. Việc tính tần số dao động riêng còn lại là giải phương trình tần số dưới dạng ma trận.

2. Xây dựng bài toán

2.1. Phương pháp PTHH trong bài toán tính tần số dao động riêng

Phương pháp PTHH là phương pháp số được áp dụng rất hiệu quả để giải các bài toán kết cấu trên máy tính. Bài toán động lực học công trình cũng không là ngoại lệ. Ở đây chúng ta sẽ tìm hiểu cách áp dụng phương pháp PTHH (mô hình chuyển vị) với bài toán dao động hệ thanh, cách xây dựng ma trận độ cứng đối với phần tử thanh

$$\det ([K] - \omega_i^2 [M]) = 0 \quad (2.1)$$

Trong đó:

ω_i - tần số dao động riêng của hệ kết cấu ở dạng dao động thứ i ;

$[K]$ - ma trận độ cứng của toàn hệ kết cấu, trong đó $[K]_e$ của mỗi phần tử:

$$[K]_e = EI \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ 6/L^2 & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ -12/L^3 & -6/L^2 & 12/L^3 & -6/L^2 \\ 6/L^2 & 2/L & -6/L^2 & 4/L \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$[M]$ - ma trận độ cứng của toàn hệ kết cấu, trong đó $[M]_e$ của mỗi phần tử:

$$[M]_e = \frac{m.A.L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

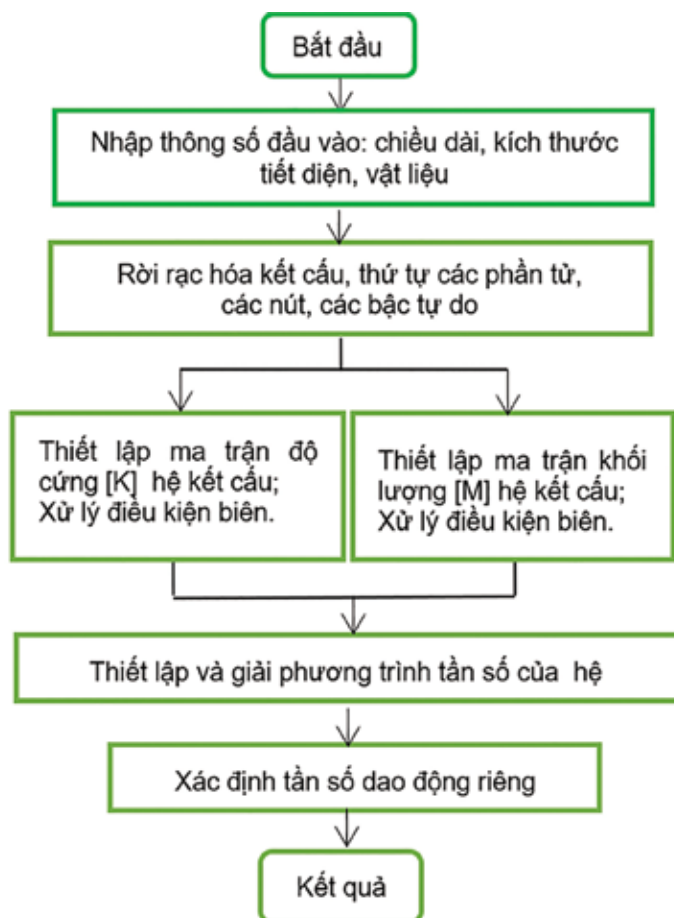
Bước 3: Giải phương trình tần số (2.1), thu được tần số dao động riêng. Tuy nhiên, ta phải đưa các điều kiện biên vào, bằng cách bắt các định thức của ma trận $[K]$ và ma trận $[M]$ phải khác

chịu uốn, xây dựng ma trận khối lượng các phần tử thanh, tìm tần số dao động riêng. Trong phương pháp PTHH (mô hình chuyển vị), thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản gọi là hàm xấp xỉ (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Áp dụng phương pháp PTHH phân tích dao động được triển khai theo các bước sau:

Bước 1: Rời rạc hoá miền khảo sát V thành các miền con V_e (với hệ thanh là các phần tử thanh). Đặt ký hiệu cho các phần tử, các nút và các bậc tự do tương ứng với số chuyển vị tại các nút.

Bước 2: Thiết lập phương trình tần số của hệ kết cấu:

0 ($\det [K]$ khác 0, $\det [M]$ khác 0), tức là phương trình không suy biến. Với bài toán kết cấu, điều này chỉ đạt được khi điều kiện biên được thoả mãn (kết cấu phải bất biến hình).



Hình 1. Sơ đồ khối chương trình

2.2. Thiết lập trình tự giải bài toán tính tần số dao động riêng bằng phương pháp PTHH

Bài toán phân tích dao động tự do hệ kết cấu thanh dầm bằng phương pháp PTHH được tác giả viết chương trình tính toán ứng dụng phần mềm MATLAB. Sơ đồ khối bài toán (Hình 1)

Trình tự giải bài toán gồm các bước sau:

Bước 1: Khai báo thông số đầu vào về hình học và vật liệu cho hệ như: chiều dài phần tử; diện tích, mô men quán tính mặt cắt tiết diện; giá trị mô đun đàn hồi E ;

Bước 2: Rời rạc hóa hệ kết cấu; đánh thứ tự phần tử; thứ tự các nút; bậc tự do

tại các nút; lập hệ tọa độ chung XY.

Bước 3: Thiết lập ma trận độ cứng toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung. Xử lý điều kiện biên.

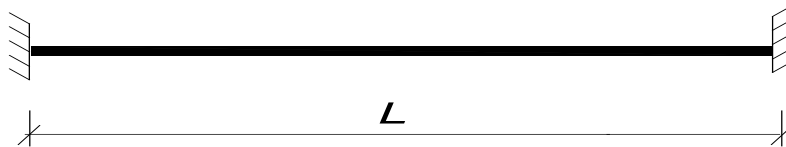
Bước 4: Thiết lập ma trận khối lượng toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung. Xử lý điều kiện biên.

Bước 5: Giải phương trình tần số thu được tần số dao động riêng của hệ.

3. Ví dụ tính toán

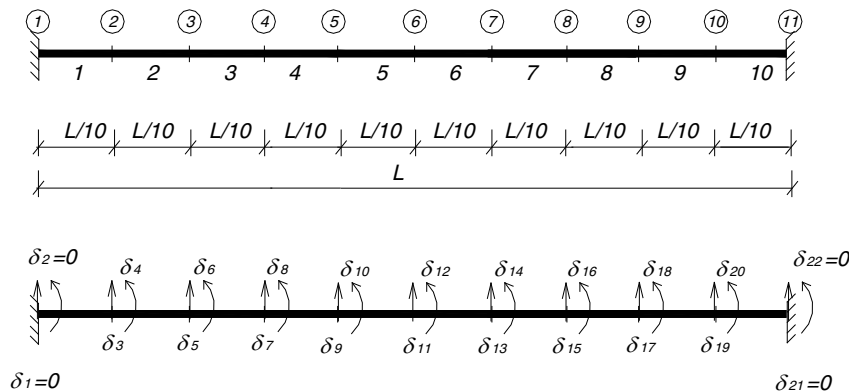
3.1. Bài toán dầm hai đầu ngàm

Xét một dầm có tiết diện không thay đổi, liên kết 2 đầu ngàm, giả thiết: $L = 1$ (đơn vị); $E=1$; $I=1$; $A=1$; dầm có khối lượng phân bố đều và có khối lượng riêng $\rho = 1$. Gọi số phần tử là n .



Hình 2. Dầm 2 đầu ngàm

Chia dầm làm 10 PT ($n=10$). Sơ đồ rời rạc thành các PT và sơ đồ chuyển vị nút như hình 3.



Hình 3. Số PT, bậc tự do và sơ đồ chuyển vị nút

Chiều dài PT $L_e = L/10$. Số chuyển vị nút = 18. Thiết lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng, xây dựng phương trình tần số, giải phương trình ta được các giá trị tần số dao động riêng, trong đó 3 tần số dao động riêng nhỏ nhất trong bảng 1. Việc ghép nối và tính toán các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng, cũng như tính tần số dao động riêng được thực hiện bằng code chương trình trong MATLAB được ghi bên dưới.

Bảng 1. Ba tần số dao động riêng đầu của dầm 2 đầu ngàm
(các giá trị của tần số cần nhân thêm (

$$(1/L^2)\sqrt{EI/\rho A})$$

Tần số dao động riêng	n =10
ω_1	22.374060466593
ω_2	61.688901710648
ω_3	121.022720282104

% Code phân tích dao động riêng dầm 2 đầu ngàm

% E; modul đàn hồi khi kéo - nén

% A; diện tích mặt cắt tiết diện

% I; momen quán tính mặt cắt tiết diện

% L: chiều dài dầm

% rho: khối lượng đơn vị của dầm

% K: ma trận độ cứng của kết cấu

% M: ma trận khối lượng của kết cấu

n=10;

E=1;

I=1;

A=1;

L=1;

l=L/10;

rho=1;

k1=PTDam_DoCung(E,I,l);

k2=k1;

k3=k1;

k4=k1;

k5=k1;

```

k6=k1;
k7=k1;
k8=k1;
k9=k1;
k10=k1;
k=zeros (22,22);
k=PTDam_TongHop(k,k1,1,2);
k=PTDam_TongHop(k,k2,2,3);
k=PTDam_TongHop(k,k3,3,4);
k=PTDam_TongHop(k,k4,4,5);
k=PTDam_TongHop(k,k5,5,6);
k=PTDam_TongHop(k,k6,6,7);
k=PTDam_TongHop(k,k7,7,8);
k=PTDam_TongHop(k,k8,8,9);
k=PTDam_TongHop(k,k9,9,10);
k=PTDam_TongHop(k,k10,10,11);
K=[k(3:20,3:20)];
m1=PTDam_KhoiLuong(rho,A,l);
m2=m1;
m3=m1;
m4=m1;
m5=m1;
m6=m1;
m7=m1;
m8=m1;
m9=m1;
m10=m1;
m=zeros(22,22);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m1,1,2);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m2,2,3);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m3,3,4);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m4,4,5);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m5,5,6);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m6,6,7);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m7,7,8);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m8,8,9);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m9,9,10);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m10,10,11);
M=[m(3:20,3:20)];

```

```

% Tìm inv(K)*M
invk=inv(K);
km=invk*M;
format long;
[ms,ns]=size(M);
% % Tìm trị riêng
[evect,ev]=eig(km);
for i=1:ms
ee(i)=1/ev(i,i);
end
Qh=max(ee)+0.001;
Ql=0;
for i=1:ms
for j=1:ms
if ee(j) > Ql & ee(j) < Qh
kl=j;
Qh=ee(j);
Else
End
end
Ql=Qh;
Qh=max(ee)+0.001;
oml(i)=ee(kl);
omega(i)=sqrt(ee(kl));
for lm=1:ms
p1(lm,i)=evect(lm,kl);
end
end
disp(' Tần số dao động riêng in rad/
sec' ) ;
disp(omega' ) ;

```

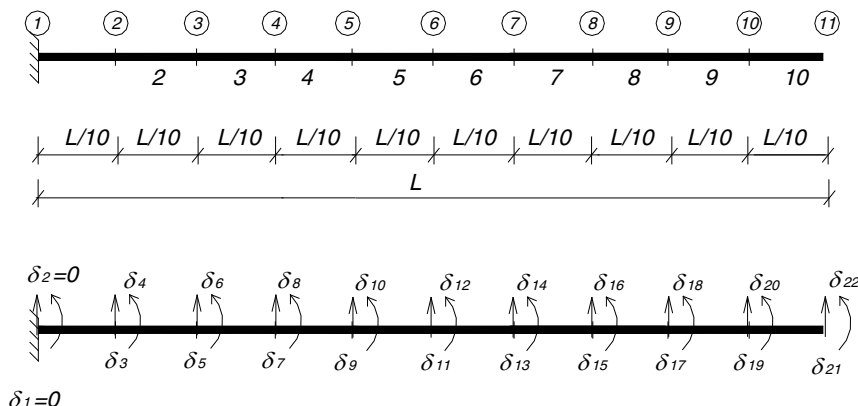
3.2. Bài toán dầm đầu ngàm - đầu tự do

Xét một dầm có tiết diện không thay đổi, liên kết 2 đầu ngàm - tự do, giả thiết: $L = 1$ (đơn vị); $E=1$; $I=1$; $A=1$; khối lượng riêng phân bố đều $\rho = 1$.



Hình 4. Dầm đầu ngàm - đầu tự do

Ta chia dầm làm 10 PT. Sơ đồ rời rạc thành các PT và sơ đồ chuyển vị nút như hình vẽ 5.



Hình 5. Số PT, bậc tự do và sơ đồ chuyển vị nút

Chiều dài PT = $L/10$. Số chuyển vị nút = 20. Thiết lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng, xây dựng phương trình tần số, giải phương trình ta được 3 tần số dao động riêng nhỏ nhất trong bảng 2. Việc ghép nối và tính toán các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng, cũng như tính tần số dao động riêng được thực hiện bằng code chương trình trong MATLAB được ghi bên dưới.

Bảng 2. Ba tần số dao động riêng đầu của dầm đầu ngàm - đầu tự do (các giá trị của tần số cần nhân thêm

$$((1/L^2)\sqrt{EI/\rho A}))$$

Tần số dao động riêng	n = 10
ω_1	3.516018275071
ω_2	22.035220870122
ω_3	61.712922975259

% Code phân tích dao động riêng
dam 2 dau ngam - đầu khớp

% E; modul đàn hồi khi kéo - nén
% A; diện tích mặt cắt tiết diện
% I; momen quán tính mặt cắt tiết diện
% L: chiều dài dầm
% rho: khối lượng đơn vị của dầm
% K: ma trận độ cứng của kết cấu
% M: ma trận khối lượng của kết cấu
n=10;

E=1;I=1;A=1;L=1;l=L/10;
rho=1;
k1=PTDam_DoCung(E,I,l);
k2=k1; k3=k1;k4=k1;k5=k1;
k6=k1; k7=k1;k8=k1;k9=k1;
k10=k1;
k=zeros (22,22);
k=PTDam_TongHop(k,k1,1,2);
k=PTDam_TongHop(k,k2,2,3);
k=PTDam_TongHop(k,k3,3,4);

```

k=PTDam_TongHop(k,k4,4,5);
k=PTDam_TongHop(k,k5,5,6);
k=PTDam_TongHop(k,k6,6,7);
k=PTDam_TongHop(k,k7,7,8);
k=PTDam_TongHop(k,k8,8,9);
k=PTDam_TongHop(k,k9,9,10);
k=PTDam_TongHop(k,k10,10,11);
K=[k (3:22,3:22)];
m1=PTDam_KhoiLuong(rho,A,l);
m2=m1;m3=m1;m4=m1;m5=m1;
m6=m1;m7=m1;m8=m1;m9=m1;
m10=m1;
m=zeros (22,22);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m1,1,2);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m2,2,3);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m3,3,4);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m4,4,5);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m5,5,6);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m6,6,7);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m7,7,8);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m8,8,9);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m9,9,10);
m=PTDam_TongHop_Kluong(m,m10,10,11);
M=[m (3:22,3:22)];
% Tìm inv(K)*M
invk=inv(K);
km=invk*M;
format long;
[ms,ns]=size(M);
% % Tìm trị riêng
[evec,ev]=eig(km);
for i=1:ms
ee(i)=1/ev(i,i);
end
Qh=max(ee)+0.001;
Ql=0;
for i=1:ms

```

```

for j=1:ms
if ee(j) > Ql & ee(j) < Qh
kl=j;
Qh=ee(j);
Else
End
end
Ql=Qh;
Qh=max(ee)+0.001;
oml(i)=ee(kl);
omega(i)=sqrt(ee(kl));
for lm=1:ms
p1(lm,i)=evec(lm,kl);
end
end
disp(' Tần số dao động riêng in rad/sec');
disp(omega');

```

4. Kết luận

Qua nội dung trình bày trong bài báo, có thể rút ra các kết luận sau đây:

- Áp dụng phương pháp PTHH để xây dựng và giải bài toán dao động tự do của dầm có rất nhiều ưu thế, đặc biệt trong quá trình áp dụng phương pháp PTHH nên sử dụng các phần mềm toán học (MATLAB) để tính toán.

- Tần số dao động riêng tính bằng phương pháp PTHH cho kết quả nhỏ hơn kết quả thu được từ các phương pháp tính chính xác.

- Khi tăng số PT trong dầm, kết quả càng gần hơn đến kết quả làm việc thực tế của dầm.

- Qua kết quả thu được ta thấy tần số dao động riêng tỉ lệ nghịch với bình phương chiều dài dầm và phụ thuộc vào liên kết tại 2 đầu của dầm.

Tài liệu tham khảo

1. Chu Quốc Thắng (1997). *Phương pháp phần tử hữu hạn*, Nxb Khoa học - Kỹ thuật, 1997.
2. Nguyễn Mạnh Yên (2000). *Phương pháp số trong Cơ học kết cấu*. Nxb Khoa học - Kỹ thuật.
3. Phạm Văn Đạt (2017). *Tính toán kết cấu hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn*. Nxb Xây dựng.
4. Trịnh Tự Lực (2022). *Bài tập các phương pháp số trong CHKC*. Nxb Xây dựng.
5. P. I. Kattan (2007). *MATLAB Guide to Finite Elements*. Springer.
6. A. J. M. Ferreira (2009). *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*. Springer.
7. B. Herbert (2010). *Development and Application of The Finite Element Method Based on MATLAB*. Springer.
8. Young W.Kwon & Hyochoong Bang (1997). *The Finite Element Method using MATLAB*. CRC Press.
9. D.V. Hutton (2000). *Fundamentals of Finite Element Analysis*. The McGraw-Hill Companies.
10. R.L. Taylor (2000). *The Finite Element Method (Volume 1,2,3)*. Butterworth-Heinemann Publishing.
11. Demeter G.Fertis (1973). *Dynamics and Vibration of Structures*. Interscience Publication, USA.