MỘT VÀI KẾT QUẢ VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN *B*-MÊTRIC

Đinh Huy Hoàng[1], Đỗ Thị Thủy[2]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một vài kết quả mới về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ T-co yếu suy rộng kiểu Chatterjea và T-co yếu suy rộng kiểu Kannan trong không gian b-mêtric. Các kết quả trong bài báo là mở rộng thực sự của các kết quả chính trong các tài liệu [9,10].

Từ khóa: *Điểm bất động, không gian mêtric đầy đủ, không gian b-mêtric, T-co yếu.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các khái niệm về ánh xạ *T*-co yếu suy rộng kiểu Kannan, kiểu Chatterjea trong không gian mêtric đã được giới thiệu và nghiên cứu bởi A. Razani, V. Paraneh [10] vào năm 2013. Sau đó (2014), Z.Mustaja và các cộng sự [9] đã mở rộng kết quả của Razami, Parvaneh [10] về sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ *T*-co yếu suy rộng kiểu Kannan, Chatterjea trong không gian mêtric cho không gian *b*-mêtric. Trong bài báo, chúng tôi đã chứng minh được một định lý về sự tồn tại điểm bất động trong không gian *b*-mêtric.

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Một số khái niệm cơ bản

Mục này trình bày một số định nghĩa về các loại ánh xạ co, *T*-co, *T*-co yếu suy rộng trong không gian mêtric cùng một vài định nghĩa trong không gian *b*-mêtric mà chúng ta cần dùng trong bài báo.

2.1.1. Định nghĩa 1

Giả sử (X,d) là không gian mêtric và $f: X \to X$.

1) ([5]). Ánh xạ f được gọi là *co kiểu Kannan* nếu tồn tại $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ sao cho

$$d(fx,fy) \le \alpha[d(x,fx)+d(y,fy)],\ \forall x,y \in X$$

2) ([1]). Ánh xạ f được gọi là *co kiểu Chatterjea* nếu tồn tại $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ sao cho

$$d(fx,fy) \le \alpha[d(x,fy)+d(y,fx)],\ \forall x,y \in X$$

[1] *Giảng viên khoa Sư phạm Toán, Trường Đại học Vinh*
[2] *Giáo viên Trường Trung học phổ thông Quảng Xương 2, Thanh Hóa*

2.1.2. Định nghĩa 2

Giả sử (X,d) là không gian mêtric, $\varphi: [0,\infty)^2 \to [0;\infty)$ là hàm liên tục sao cho $\varphi(x,y)=0$ khi và chỉ khi $x=y=0$ và $f: X \to X$ là ánh xạ.

1) ([2]). Ánh xạ f được gọi là *co yếu kiểu Chatterjea* nếu

$$d(fx,fy) \le \frac{1}{2}[d(x,fy)+d(y,fx)]\text{-}\varphi(d(x,fy),d(y,fx)),\ \forall x,y \in X$$

2) ([10]). Ánh xạ f được gọi là *co yếu kiểu Kannan* nếu

$$d(fx,fy) \le \frac{1}{2}[d(x,fx)+d(y,fy)]\text{-}\varphi(d(x,fx),d(y,fy)),\ \forall x,y \in X$$

2.1.3. Định nghĩa 3

Giả sử (X,d) là không gian mêtric, T và f là hai ánh xạ từ X vào X.

1) ([8]). Ánh xạ f được gọi là *T-co kiểu Kannan* nếu tồn tại $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ sao cho

$$d(Tfx,Tfy) \le \alpha[d(Tx,Tfx)+d(Ty,Tfy)],\ \forall x,y \in X$$

2) ([10]). Ánh xạ f được gọi là *T-co kiểu Chatterjea* nếu tồn tại $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ sao cho

$$d(Tfx,Tfy) \le \alpha[d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)],\ \forall x,y \in X$$

2.1.4. Định nghĩa 4 ([6])

Hàm $\psi:[0,\infty) \to [0,\infty)$ được gọi là *hàm chuyển đổi khoảng cách* nếu ψ liên tục, tăng ngặt và $\psi(0)=0$.

Trong định nghĩa sau, ψ là hàm chuyển đổi khoảng cách, còn $\varphi:[0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ là hàm liên tục và $\varphi(x,y)=0$ khi và chỉ khi $x=y=0$.

2.1.5. Định nghĩa 5 ([10])

Giả sử (X,d) là không gian mêtric, T và f là hai ánh xạ từ X vào X.

1) Ánh xạ f được gọi là *T-co yếu suy rộng kiểu Chatterjea* nếu

$$\psi(d(Tfx,Tfy)) \le \psi\left(\frac{d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)}{2}\right)\text{-}\varphi(d(Tx,Tfy),d(Ty,Tfx)),\ \forall x,y \in X$$

2) Ánh xạ f được gọi là *T-co yếu suy rộng kiểu Kannan* nếu

$$\psi(d(Tfx,Tfy)) \le \psi\left(\frac{d(Tx,Tfx)+d(Ty,Tfy)}{2}\right)\text{-}\varphi(d(Tx,Tfx),d(Ty,Tfy)),\ \forall x,y \in X$$

Khi lấy $\psi:[0,\infty) \to [0,\infty)$ là ánh xạ đồng nhất, ta thấy rằng các khái niệm ánh xạ *T-co* yếu kiểu Chatterjea và *T-co* yếu kiểu Kannan là trường hợp đặc biệt của khái niệm ánh xạ *T-co* yếu suy rộng kiểu Chatterjea và *T-co* yếu suy rộng kiểu Kannan tương ứng.

2.1.6. Định nghĩa 6 ([3])

Giả sử X là tập khác rỗng và số thực $s \geq 1$. Hàm $d : X \times X \to [0, \infty)$ được gọi là *b-mêtric* nếu với mọi $x, y, z \in X$, ta có

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) \leq s[d(x, z) + d(z, y)]$ (bất đẳng thức tam giác).

Tập X cùng với một *b-mêtric* trên nó được gọi là *không gian b-mêtric với tham số s,* nói gọn là *không gian b-mêtric* và kí hiệu bởi (X, d) hoặc X.

Chú ý:

1) Từ đây về sau, khi nói tới không gian *b-mêtric* ta luôn hiểu tham số của nó là $s \geq 1$.

2) Từ định nghĩa không gian mêtric và không gian *b-mêtric* ta thấy rằng, không gian mêtric là trường hợp đặc biệt của không gian *b-mêtric* khi $s = 1$.

2.1.7. Định nghĩa 7 ([3])

Giả sử $\{x_n\}$ là dãy trong không gian *b-mêtric* (X, d).

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *b-hội tụ* (nói gọn là *hội tụ*) tới $x \in X$ và được kí hiệu bởi $x_n \to x$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $d(x_n, x) < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Nói cách khác, $x_n \to x$ khi và chỉ khi $d(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ với mọi $n, m \geq n_0$.

Không gian *b-mêtric* được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong nó đều hội tụ.

2.1.8. Bổ đề 1

Giả sử $\{x_n\}$ là dãy trong không gian b-mêtric (X, d) và $x_n \to x \in X$. Khi đó,

1) $\{x_n\}$ là dãy Cauchy;

2) x là duy nhất;

3) $\frac{1}{s} d(x, y) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} d(x_n, y) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} d(x_n, y) \leq s d(x, y), \forall y \in X.$

2.1.9. Định nghĩa 8

Giả sử (X, d) là không gian *b-mêtric*, ánh xạ $f : X \to X$ được gọi là *liên tục* nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong X mà $x_n \to x$ ta có $fx_n \to fx$.

2.2. Một vài kết quả về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ T-co

Suy rộng trong không gian *b*-mêtric

Ta kí hiệu

$\mathcal{L} = \{\psi : [0,\infty) \to [0,\infty) | \psi$ là hàm chuyển đổi khoảng cách$\}$.

$$\Phi = \Big\{\varphi : [0,\infty)^2 \to [0,\infty) | \varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ và}$$

$$\varphi(\liminf_{n\to\infty} x_n, \liminf_{n\to\infty} y_n) \le \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n, y_n)\Big\}.$$

2.2.1. Định lý 1

Giả sử (X,d) là không gian b-mêtric đầy đủ, T và f là hai ánh xạ từ X vào X thỏa mãn:

i) T đơn ánh và liên tục;

ii) Tồn tại $\psi \in \mathcal{L}$, $\varphi \in \Phi$ và các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \left[0, \frac{1}{s^2+1}\right]$ sao cho

$$\psi(d(Tfx,Tfy)) \le \psi(\max\{\alpha_1 sd(Tx,Ty), \alpha_2 d(Tx,Tfy) + \alpha_3 d(Ty,Tfx), \alpha_4 s[d(Tx,Tfx) + d(Ty,Tfy)]\})$$
$$-\varphi(\alpha_2 d(Tx,Tfy) + \alpha_4 d(Tx,Tfx), \alpha_3 d(Ty,Tfx) + \alpha_4 d(Ty,Tfy)) \quad (2.2.1)$$

với mọi $x, y \in X$.

Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng hoặc:

Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{Tf^n x_0\}$ hội tụ.

2) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy con thì f có duy nhất điểm bất động trong X.

3) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{f^n x_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của f.

Chứng minh.

1) Lấy bất kỳ $x_0 \in X$. Ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ bởi $x_{n+1} = fx_n = f^{n+1}x_0 \quad \forall n = 0,1,...$

Đặt $y_n = Tx_n, n = 0,1,...$

Đầu tiên, ta chứng minh $d(y_n, y_{n+1}) \to 0$ khi $n \to \infty$. Từ điều kiện (2.2.1), với mọi $n = 1,2,...$ ta có:

$$\psi(d(y_n, y_{n+1})) = \psi(d(Tfx_{n-1}, Tfx_n))$$
$$\le \psi(\max\{\alpha_1 sd(y_n, y_{n-1}), \alpha_2 d(y_n, y_n) + \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}), \alpha_4 s(d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n-1}, y_n))\})$$
$$-\varphi(\alpha_4 d(y_n, y_{n+1}), \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}) + \alpha_4 d(y_{n-1}, y_n))$$
$$\le \psi(\max\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\} s(d(y_{n-1}, y_n) + d(y_n, y_{n+1})))$$
$$-\varphi(\alpha_4 d(y_n, y_{n+1}), \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}) + \alpha_4 d(y_{n-1}, y_n)). \quad (2.2.2)$$

Đặt $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ thì $\alpha \in \left[0, \frac{1}{s^2+1}\right]$. Từ φ là hàm không âm và ψ là hàm tăng cùng (2.2.2) suy ra $d(y_{n+1}, y_n) \le \alpha s(d(y_{n-1}, y_n) + d(y_n, y_{n+1}))$ với mọi $n = 1,2,...$

Do đó, $d(y_{n+1},y_n)\le \dfrac{\alpha s}{1-\alpha s}d(y_{n-1},y_n)\ \ \forall n=1,2,...$

Từ $\alpha s\le \dfrac{1}{2}$ suy ra $\dfrac{\alpha s}{1-\alpha s}\le 1$ nên $d(y_{n+1},y_n)\le d(y_{n-1},y_n)$ với mọi $n=1,2,...$ Như vậy $\{d(y_n,y_{n+1})\}$ là dãy các số thực không âm và giảm. Do đó, nó hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_{n+1},y_n)=\mathrm{r}\ge 0.$ Từ (2.2.2) và tính chất của ánh xạ φ, cho $n\to\infty$, ta được

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{r})&\le \psi(2\alpha s\mathrm{r})-\varphi(\alpha_4\mathrm{r},\alpha_4\mathrm{r}+\liminf_{n\to\infty}\alpha_3 d(y_{n-1},y_{n+1}))\\ &\le \psi(\mathrm{r})-\varphi(\alpha_4\mathrm{r},\alpha_4\mathrm{r}+\liminf_{n\to\infty}\alpha_3 d(y_{n-1},y_{n+1}))\end{aligned}$$

Từ đó $\varphi(\alpha_4\mathrm{r},\alpha_4\mathrm{r}+\liminf\limits_{n\to\infty}\alpha_3 d(y_{n-1},y_{n+1}))=0.$ Kết hợp với tính chất của φ suy ra

$$\alpha_4\mathrm{r}=\alpha_3\liminf_{n\to\infty} d(y_{n-1},y_{n+1})=0. \tag{2.2.3}$$

Nếu $\alpha_4\ne 0$ thì $\mathrm{r}=0$. Giả sử $\alpha_4=0$. Khi đó, nếu $\alpha_3=0$ thì theo điều kiện (2.2.1) suy ra

$$\psi(d(y_{n+1},y_n))\le \psi(\alpha_1 s d(y_n,y_{n-1}))\ \ \forall n=1,2,...$$

Do đó, $\psi(\mathrm{r})\le\psi(\alpha_1 s\mathrm{r})$. Do ψ tăng ngặt nên $\mathrm{r}\le\alpha_1 s\mathrm{r}$. Mà $\alpha_1\le\dfrac{1}{s^2+1}<\dfrac{1}{s}$ nên $\mathrm{r}=0$. Nếu $\alpha_4=0$ và $\alpha_3\ne 0$ thì từ (2.2.3) ta có $\liminf\limits_{n\to\infty} d(y_{n-1},y_{n+1})=0$. Từ (2.2.1) và ψ là hàm tăng nên:

$$d(y_{n+1},y_n)\le \alpha_1 s(d(y_n,y_{n-1})+\alpha_3 d(y_{n-1},y_{n+1})\ \ \forall n=1,2,...$$

Cho $n\to\infty$ ta có $\mathrm{r}\le\alpha_1 s\mathrm{r}+\alpha_3\liminf\limits_{n\to\infty} d(y_{n-1},y_{n+1})=\alpha_1 s\mathrm{r}$. Tương tự như trên ta có được $\mathrm{r}=0$. Như vậy ta luôn có

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n,y_{n+1})=\mathrm{r}=0 \tag{2.2.4}$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\{y_n\}$ là dãy Cauchy. Giả sử $\{y_n\}$ không là dãy Cauchy. Khi đó, tồn tại $\varepsilon>0$ sao cho có thể tìm được hai dãy con $\{y_{n_k}\}$ và $\{y_{m_k}\}$ của dãy $\{y_n\}$ thỏa mãn n_k là chỉ số bé nhất để cho $n_k>m_k>k$ và:

$$d(y_{n_k},y_{m_k})\ge\varepsilon \tag{2.2.5}$$

Từ đó suy ra

$$d(y_{n_k-1},y_{m_k})<\varepsilon,\ \forall k=1,2,... \tag{2.2.6}$$

Từ (2.2.5), (2.2.6) và bất đẳng thức tam giác ta có

$$\varepsilon\le d(y_{m_k},y_{n_k})\le s[d(y_{m_k},y_{n_k-1})+d(y_{n_k-1},y_{n_k})]<s\varepsilon+sd(y_{n_k-1},y_{n_k}),\ \forall k=1,2,...$$

Lấy $\limsup\limits_{k\to\infty}$ hai vế ta được

$$\varepsilon \le \limsup_{k\to\infty} d(y_{m_k}, y_{n_k}) \le s\varepsilon \tag{2.2.7}$$

Từ $\varepsilon \le d(y_{m_k}, y_{n_k}) \le s[d(y_{m_k}, y_{n_k-1}) + d(y_{n_k-1}, y_{n_k})]$ cùng với (2.2.6) suy ra

$$\frac{\varepsilon}{s} \le \limsup_{k\to\infty} d(y_{m_k}, y_{n_k-1}) \le \varepsilon \tag{2.2.8}$$

Mặt khác, từ $\varepsilon \le d(y_{m_k}, y_{n_k}) \le s[d(y_{m_k}, y_{m_k-1}) + d(y_{m_k-1}, y_{n_k})]$ và

$$d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) \le s[d(y_{m_k-1}, y_{m_k}) + d(y_{m_k}, y_{n_k})]$$

cùng (2.2.4) và (2.2.7) suy ra

$$\frac{\varepsilon}{s} \le \limsup_{k\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) \le s^2\varepsilon \tag{2.2.9}$$

Tương tự như trên, ta chứng minh được rằng

$$\frac{\varepsilon}{s} \le \liminf_{k\to\infty} d(y_{m_k}, y_{n_k-1}) \le \varepsilon \tag{2.2.10}$$

Và

$$\frac{\varepsilon}{s} \le \liminf_{k\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) \le s^2\varepsilon \tag{2.2.11}$$

Từ $d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}) \le s[d(y_{m_k-1}, y_{m_k}) + d(y_{m_k}, y_{n_k-1})]$ cùng (2.2.4) và (2.2.8) ta có

$$\limsup_{k\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}) \le s\varepsilon \tag{2.2.12}$$

Áp dụng (2.2.5) và điều kiện (2.2.1) ta có

$$\psi(\varepsilon) \le \psi(d(y_{m_k}, y_{n_k})) = \psi(d(Tfx_{m_k-1}, Tfx_{n_k-1}))$$
$$\le \psi(\max\{\alpha_1 s d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}), \alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) + \alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k}),$$
$$\alpha_4 s(d(y_{m_k-1}, y_{m_k}) + d(y_{n_k-1}, y_{n_k}))\})$$
$$-\varphi(\alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) + \alpha_4 d(y_{m_k-1}, y_{m_k}), \alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k}) + \alpha_4 d(y_{n_k-1}, y_{n_k})).$$

Từ (2.2.4), (2.2.10), (2.2.11), (2.2.12) và sử dụng tính chất của φ, ψ suy ra

$$\psi(\varepsilon) \le \psi(\limsup_{k\to\infty}(\max\{\alpha_1 s d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}), \alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) + \alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k}),$$
$$\alpha_4 s(d(y_{m_k-1}, y_{m_k}) + d(y_{n_k-1}, y_{n_k}))\}))$$
$$-\varphi(\liminf_{k\to\infty}(\alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) + \alpha_4 d(y_{m_k-1}, y_{m_k})), \liminf_{k\to\infty}(\alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k}) + \alpha_4 d(y_{n_k-1}, y_{n_k})))$$
$$\le \psi(\max\{\alpha_1 s^2\varepsilon, \alpha_2 s^2\varepsilon + \alpha_3\varepsilon, 0\}) - \varphi(\liminf_{k\to\infty} \alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}),$$
$$\liminf_{k\to\infty} \alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k})) \tag{2.2.13}$$

Mặt khác, $\max\{\alpha_1 s^2, \alpha_2 s^2 + \alpha_3\} \le 1$ nên $\psi(\varepsilon) \ge \psi(\max\{\alpha_1 s^2\varepsilon, \alpha_2 s^2\varepsilon + \alpha_3\varepsilon, 0\})$. Kết hợp với (2.2.13) và tính chất của φ ta có:

$$\alpha_2 \liminf_{k\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) = 0 \tag{2.2.14}$$

và

$$\alpha_3 \liminf_{k\to\infty} d(y_{n_k-1}, y_{m_k}) = 0 \tag{2.2.15}$$

Từ (2.2.10), (2.2.11), (2.2.14) và (2.2.15) suy ra $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Từ (2.2.13) ta có $\psi(\varepsilon) \le \psi(\alpha_1 s^2 \varepsilon)$. Do đó, $\varepsilon \le \alpha_1 s^2 \varepsilon$ hay $\alpha_1 \ge \frac{1}{s^2}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\alpha_1 \in \left[0, \frac{1}{s^2+1}\right]$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $\{y_n\}$ là dãy Cauchy. Vì (X,d) đầy đủ nên tồn tại $y \in X$ sao cho $y_n \to y$ khi $n \to \infty$, tức là

$$\lim_{n\to\infty} Tf^{n+1}x_0 = \lim_{n\to\infty} Tfx_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = y \tag{2.2.16}$$

2) Bây giờ, giả sử T là ánh xạ hội tụ dãy con. Ta chứng minh f có điểm bất động. Vì T hội tụ dãy con và $\{Tfx_n\}$ là dãy hội tụ nên $\{fx_n\}$ có dãy con $\{fx_{n_i}\}$ sao cho $fx_{n_i} \to x \in X$ khi $n_i \to \infty$. Do T liên tục nên $Tfx_{n_i} \to Tx$. Kết hợp với (2.2.16) suy ra $y = Tx$. Sử dụng điều kiện (2.2.1) ta có

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{1}{s} d(Tfx, Ty)\right) &\le \psi(\liminf_{n\to\infty} d(Tfx, Tfx_n)) \le \liminf_{n\to\infty} \psi(d(Tfx, Tfx_n)) \\
&\le \limsup_{n\to\infty}(\psi(\max\{\alpha_1 sd(y,y_n), \alpha_2 d(y,y_{n+1}) + +\alpha_3 d(y_n, Tfx), \alpha_4 s(d(y,Tfx) + d(y_n, y_{n+1}))\})) \\
&\le \psi(\limsup_{n\to\infty}(\max\{\alpha_1 sd(y,y_n), \alpha_2 d(y,y_{n+1}) + +\alpha_3 d(y_n, Tfx), \alpha_4 s(d(y,Tfx) + d(y_n, y_{n+1}))\})) \\
&\le \psi(\max\{\alpha_3 sd(y,Tfx), \alpha_4 sd(y,Tfx)\}) \le \psi\left(\frac{s}{s^2+1} d(y,Tfx)\right).
\end{aligned}$$

Vì ψ là hàm tăng ngặt nên từ bất đẳng thức trên ta có: $d(y,Tfx) = 0$ hay $Tx = Tfx$. Vì T đơn ánh nên $x = fx$ hay x là điểm bất động của f.

Cuối cùng, giả sử x và x' là hai điểm bất động của f. Theo điều kiện (2.2.1) ta có

$$\begin{aligned}
\psi(d(Tx,Tx')) &= \psi(d(Tfx,Tfx')) \le \psi(\max\{\alpha_1 sd(Tx,Tx'), \alpha_2 d(Tx,Tx') + \alpha_3 d(Tx',Tx) \\
&\quad + \alpha_4 s(d(Tx,Tx) + d(Tx',Tx')\}) - \varphi(\alpha_2 d(Tx,Tx'), \alpha_3 d(Tx,Tx')) \\
&= \psi(\max\{\alpha_1 s, \alpha_2 + \alpha_3\} d(Tx,Tx')) - \varphi(\alpha_2 d(Tx,Tx'), \alpha_3 d(Tx,Tx'))
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Vì $\max\{\alpha_1 s, \alpha_2 + \alpha_3\} \le 1$, ψ là hàm tăng ngặt nên:

$$\varphi(\alpha_2 d(Tx,Tx'), \alpha_3 d(Tx,Tx')) = 0$$

Do đó,

$$\alpha_2 d(Tx,Tx') = \alpha_3 d(Tx,Tx')) = 0 \tag{2.2.18}$$

Nếu $\alpha_2 \neq 0$ hoặc $\alpha_3 \neq 0$ thì từ (2.2.18) ta có $d(Tx,Tx') = 0$. Nếu $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ thì từ (2.2.17), kết hợp với $\alpha_1 < \frac{1}{s}$ và tính chất của hàm ψ ta có $d(Tx,Tx') = 0$. Như vậy, ta luôn có $d(Tx,Tx') = 0$, tức $Tx = Tx'$. Do T đơn ánh nên $x = x'$. Vậy điểm bất động của f là duy nhất.

3) Giả sử T là ánh xạ hội tụ dãy. Khi đó, trong chứng minh 2) ở trên thay n_i bởi n ta có $\lim_{n\to\infty} f^n x_0 = \lim_{n\to\infty} fx_{n-1} = x$.

Sau đây là vài hệ quả của Định lý 2.2.1.

2.2.2. Hệ quả 1 ([9], Định lý 4)

Giả sử (X,d) là không gian b-mêtric đầy đủ, T và $f:\ X \to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn:

i) T đơn ánh và liên tục;

ii) Tồn tại $\psi \in \mathcal{L}$, $\varphi \in \Phi$ sao cho với mọi $x, y \in X$ ta có

$$\psi(sd(Tfx,Tfy)) \leq \psi\left(\frac{d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)}{s+1}\right) - \varphi(d(Tx,Tfy),d(Ty,Tfx)) \quad (2.2.19)$$

Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:

1) Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{Tf^n x_0\}$ hội tụ.

2) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy con thì f có duy nhất điểm bất động trong X.

3) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{f^n x_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của f.

Chứng minh.

Ta xác định các hàm $\psi_1 : [0,\infty) \to [0,\infty), \varphi_1 : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ bởi các công thức:

$$\psi_1(t) = \psi(st),\ \forall t \in [0,\infty)$$

$$\varphi_1(t,u) = \varphi(s(s+1)t, s(s+1)u),\ \forall (t,u) \in [0,\infty)^2.$$

Khi đó, từ $s \geq 1, \psi \in \mathcal{L}$ và $\varphi \in \Phi$ suy ra $\psi_1 \in \mathcal{L}$, $\varphi_1 \in \Phi$. Mặt khác, từ điều kiện (2.2.19) ta có

$$\psi_1(d(Tfx,Tfy)) = \psi(sd(Tfx,Tfy)) \leq \psi\left(\frac{d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)}{s+1}\right) - \varphi(d(Tx,Tfy),d(Ty,Tfx))$$
$$= \psi_1(\alpha[d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)]) - \varphi_1(\alpha d(Tx,Tfy), \alpha d(Ty,Tfx))$$

với mọi $x, y \in X$, trong đó $\alpha = \frac{1}{s(s+1)}$. Từ đó suy ra

$$\psi(d(Tfx,Tfy)) \leq \psi(\max\{\alpha_1 sd(Tx,Ty), \alpha_2 d(Tx,Tfy)+\alpha_3 d(Ty,Tfx), \alpha_4 s[d(Tx,Tfx)+d(Ty,Tfy)]\})$$
$$-\varphi_1(\alpha_2 d(Tx,Tfy)+\alpha_4 d(Tx,Tfx), \alpha_3 d(Ty,Tfx)+\alpha_4 d(Ty,Tfy))$$

Với mọi $x, y \in X$, trong đó $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = \dfrac{1}{s(s+1)}, \alpha_4 = 0.$ Như vậy các điều kiện của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn. Do đó, các khẳng định của Hệ quả 2.2.2 được suy ra từ Định lý 2.2.1.

2.2.3. Hệ quả 2 ([9], Định lý 5)

Giả sử (X, d) là không gian b-mêtric đầy đủ, T và $f : X \to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn:

i) T đơn ánh và liên tục;

ii) Tồn tại $\psi \in \mathcal{L}$, $\varphi \in \Phi$ sao cho với mọi $x, y \in X$ ta có

$$\psi(d(Tfx, Tfy)) \le \psi\left(\frac{d(Tx, Tfx) + d(Ty, Tfy)}{s+1}\right) - \varphi(d(Tx, Tfx), d(Ty, Tfy)) \quad (2.2.20)$$

Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:

1) Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{Tf^n x_0\}$ hội tụ.

2) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy con thì f có duy nhất điểm bất động trong X.

3) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{f^n x_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của f.

Chứng minh.

Ta xác định các hàm $\psi_1 : [0, \infty) \to [0, \infty), \varphi_1 : [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ bởi các công thức

$$\psi_1(t) = \psi(t),\ \forall t \in [0, \infty)$$

$$\varphi_1(t, u) = \varphi(s(s+1)t, s(s+1)u),\ \forall (t, u) \in [0, \infty)^2.$$

Khi đó, từ $\psi \in \mathcal{L}$ và $\varphi \in \Phi$ suy ra $\psi_1 \in \mathcal{L}$, $\varphi_1 \in \Phi$. Tương tự như chứng minh Hệ quả 2.2.2 ta chứng minh được các điều kiện của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn với $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \alpha_4 = \dfrac{1}{s(s+1)}.$ Do đó, các khẳng định của Hệ quả 2.2.3 được suy ra từ Định lý 2.2.1.

Trong các Hệ quả 2.2.2 và Hệ quả 2.2.3 lấy $s = 1$ ta được hệ quả sau:

2.2.4. Hệ quả 3 ([10])

Giả sử (X, d) là không gian mêtric đầy đủ, T và $f : X \to X$ là hai ánh xạ sao cho T đơn ánh và liên tục. Khi đó, nếu f là ánh xạ T-co yếu suy rộng kiểu Chatterjea hoặc kiểu Kannan thì các khẳng định sau đây là đúng:

1) Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{Tf^n x_0\}$ hội tụ.

2) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy con thì f có duy nhất điểm bất động trong X.

3) Nếu T là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{f^n x_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của f.

Ví dụ sau đây chứng tỏ Định lý 2.2.1 thực sự tổng quát hơn Định lý 4 và Định lý 5 trong [9].

2.2.5. Ví dụ

Giả sử $X = \{1,2,3,4\}$ và $d : X \times X \to \mathbb{R}$ là hàm được cho bởi

$$d(x,y) = d(y,x)\ \ \forall x,y \in X;$$

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$d(1,2) = d(1,4) = 1, d(2,4) = \frac{5}{2};$$

$$d(1,3) = d(2,3) = d(3,4) = \frac{9}{4}.$$

Khi đó, d là *b*-mêtric trên X với $s = \frac{5}{4}$ và (X,d) là không gian *b*-mêtric đầy đủ.

Giả sử T và $f : X \to X$ là hai ánh xạ được cho bởi

$$f1 = f2 = f3 = 1, f4 = 3,$$

$$T1 = 1, T2 = 2, T3 = 4, T4 = 3.$$

Ta thấy *T* đơn ánh và liên tục, tức là điều kiện i) của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn.

Lấy $\alpha_1 = \frac{16}{45}, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Khi đó $\alpha_1 = \frac{1}{s(s+1)}$. Ta có

$$d(Tf1,Tf2) = d(Tf1,Tf3) = d(Tf2,Tf3) = 0.$$

$$d(Tf1,Tf4) = d(Tf2,Tf4) = d(Tf3,Tf4) = 1 = \frac{16}{45}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}.$$

Vì thế T và f thỏa mãn điều kiện co trong Định lý 2.2.1 với mọi $x,y \in X$, $\psi \in \mathcal{L}$, $\varphi \in \Phi$. Do vậy, Định lý 2.2.1 được áp dụng cho T và f. Bây giờ, ta chỉ ra rằng Định lý 4 và Định lý 5 trong [9] không thể áp dụng được cho T và f. Thật vậy,

Chọn $x = 3, y = 4$ thì từ điều kiện co trong Định lý 4 [9] ta có

$$\psi(sd(Tf3,Tf4)) = \psi\left(\frac{5}{4}\right) \le \psi\left(\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}}\right) - \varphi\left(0,\frac{9}{4}\right) = \psi(1) - \varphi\left(0,\frac{9}{4}\right) < \psi(1).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết ψ là hàm tăng ngặt.

Chọn $x = 1, y = 4$ thì từ điều kiện co trong Định lý 5 [9] ta có

$$\psi(d(Tf1,Tf4)) = \psi(1) \le \psi\left(\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}}\right) - \varphi\left(0,\frac{9}{4}\right) = \psi(1) - \varphi\left(0,\frac{9}{4}\right) < \psi(1)$$

Đây là một điều vô lý.

3. KẾT LUẬN

Bài báo đưa ra được kết quả mới đó là Định lý 2.2.1 về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ T-co suy rộng trong không gian b-mêtric và một số Hệ quả của nó (Hệ quả 2.2.3, 2.2.4), các hệ quả này chính là nội dung các Định lý 4 và Định lý 5 trong tài liệu tham khảo [9]. Đồng thời đưa ra Ví dụ 2.2.5 chứng tỏ Định lý 2.2.1 là mở rộng thực sự của Định lý 4 và Định lý 5 trong tài liệu tham khảo [9].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] K. Chatterjea (1972), *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 25, 727-730.

[2] S. Choudhury (2009), *Unique fixed point theorems for weak C-contractive mappings,* Kathamandu Univ. J. Sci. Eng. Technol. 5(1), 6-13.

[3] S. Czerwik (1993), *Contraction mappings in b-mêtric spaces,* Acta Math. Inform Univ. Ostrav. 1, 5-11.

[4] N. Hussain, V. Parvaneh, R. Roshan, Z. Kadelburg (2013), *Fixed points of cyclic weakly* (ψ, φ, L, A, B) *- Contractive mappings in ordered b-metric with applicatons,* Fixed Point Theory Apply, 256.

[5] Kannan (1968), *Some results on fixed points,* Bull. Calcutta Math. Soc. 60, 71-76.

[6] M. S. Khan, M. Sessa (1984), *Fixed point theorems by altering distances bet ween the points,* Bull. Aust. Math. Soc. 30, 1-9.

[7] M. Kir, H.Kiziltunc (2013), *On some well known fixed point theorems in b-metric,* Turkish Journal of Analysis and Number Theory, Vol. 1, No. 1, 13-16.

[8] S. Moradi (2011), *Kannan fixed point theorem on complete metric spaces and On generalized metric spaces depended on another function,* arXiv: 0903. 577vl [math.FA].

[9] Z. Mustafa, J.R. Roshan, V. Parvaneh and Z. Kadelburg (2014), *Fixed poin theorems for weakly T-Chatterjea and weakly T-Kannan contractions in b-metric spaces,* Journal of Inequalities and Applications, Vol. 1, No. 46 (2014), 1-14.

[10] A. Razani, V. Paraneh (2013), *Some fixed point theorems for weakly T-Chatterjea nd weakly T-Kannan contractive mappings in complete metric spaces,* Russ. Math. (Izv. VUZ) 57(3), 38-45.

SOME FIXED POINT RESULTS IN *B*-METRIC SPACE

Dinh Huy Hoang, Do Thi Thuy

ABSTRACT

In this paper, we obtain some fixed point results for generalized weakly T-Kannan contractive and generalized weakly T-Chatterjea contractive mappings in b-metric spaces. The results of this paper extend and generalize well-known comparable results in the literature [9,10].

Keywords: *Fixed point, complete metric spaces, b-metric space, weak T-contraction.*