

# DẠY VÀ HỌC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VỚI SỰ TRỢ GIÚP PHẦN MỀM TOÁN HỌC MAPLE

Nguyễn Hữu Học<sup>1</sup>

## TÓM TẮT

*Mục tiêu của bài báo này là viết chương trình toán học bằng phần mềm Maple để phân tích quá trình giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Từ đó áp dụng trong dạy và học phương trình vi phân. Bước đầu định hướng cho sinh viên sử dụng phần mềm Maple lập trình để giải quyết các bài toán cao cấp, từ đó có thể mở rộng, phát triển tạo ra các chương trình giải quyết các bài toán khác nội cách hiệu quả, chính xác.*

**Từ khóa:** Phương trình vi phân, Maple.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phương trình vi phân xuất hiện trên cơ sở phát triển của khoa học, kỹ thuật và những yêu cầu đòi hỏi thực tế. Đã có những tài liệu, giáo trình đề cập đến những bài toán cơ học, vật lý dẫn đến sự nghiên cứu các phương trình vi phân tương ứng. Cùng với những thành tựu tuyệt vời trong lĩnh vực công nghệ thông tin, người ta đã xây dựng những phần mềm mà nhờ nó việc giải toán được thực hiện dễ dàng bằng những câu lệnh đơn giản, không phải lập trình phức tạp như trước. Nhiều phần mềm hỗ trợ tính toán ưu việt phải kể đến như: Maple, Mathematica, Matlab... Với mục đích tìm hiểu về phương pháp, phân tích quá trình giải bài toán phương trình vi phân bằng chương trình toán học. Bài báo đi sâu tìm hiểu về phần mềm Maple và sử dụng nó trong việc dạy và học phương trình vi phân, được minh họa các ý tưởng giải phương trình vi phân qua phần mềm Maple.

## 2. NỘI DUNG

### 2.1. Vai trò của phương tiện trực quan trong dạy học toán

Ngày nay khoa học máy tính và công nghệ thông tin đã xâm nhập vào mọi lĩnh vực hoạt động của con người. Đối với ngành Toán đã có những phần mềm tương đối hữu dụng và nhiều chương trình chuyên dụng cho từng bộ môn của Toán học. Những phần mềm này giúp ích rất nhiều trong việc giảng dạy toán học. Chính vì vậy việc sử dụng nhiều loại hình phương tiện trực quan, đáng chú ý là các phần mềm dạy học (Cabri, Power Point, Violet, Maple, Mathlab, Mathematica...) nhằm hỗ trợ, thúc đẩy hoạt động tích cực của học sinh, góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn toán.

### 2.2. Giới thiệu phần mềm Maple

Maple là phần mềm do một nhóm các nhà khoa học của Canada thuộc Trường Đại học Waterloo xây dựng và đưa vào sử dụng năm 1985, với mục đích giải quyết mọi công

<sup>1</sup> Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

việc liên quan đến tính toán, bao gồm cả tính toán số và tính toán hình thức, cũng như hiển thị. Ngoài các câu lệnh có chức năng kiểm tra, tính toán, minh họa hình ảnh, nó còn cho phép các giáo viên có thể sử dụng ngôn ngữ lập trình của Maple để tạo các công cụ mới, các gói câu lệnh mới. Vì thế Maple có khả năng đầy đủ để giảng dạy và học tập từ bậc phổ thông (các gói chức năng về đại số, số học, giải tích, hình học) lên đại học (đại số tuyến tính, phương trình vi phân, hình học cao cấp, đại số hiện đại).

Hiện nay sách, báo viết về những ứng dụng của Maple trong việc hỗ trợ tính toán, vẽ đồ thị... phục vụ cho việc giảng dạy toán học ở phổ thông cũng như đại học khá nhiều, những chủ yếu khai thác hệ thống câu lệnh có sẵn của Maple, những sách hướng dẫn lập trình trên Maple cũng có nhưng những chương trình viết trên Maple để phục vụ việc dạy và học Toán chưa có nhiều. Bài báo này nhằm mục đích từng bước khuyến khích, hướng dẫn sinh viên sư phạm viết các chương trình để Maple tiến hành giải và hiển thị từng bước cách giải các bài toán minh họa phương pháp trong giảng dạy Toán học.

### 2.3. Về phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Khi  $q(x) \equiv 0$  thì phương trình gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

Khi  $q(x) \neq 0$  thì phương trình gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất.

### 2.4. Phương pháp giải (Phương pháp biến thiên hằng số)

Giải phương trình thuần nhất:  $y' + p(x)y = 0$ . Đây là phương trình biến số phân ly ta được nghiệm tổng quát:  $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ .

Xem  $C = C(x)$  là hàm số theo x, Tính  $y'$ :  $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$ .

Thay vào phương trình đã cho ta được:

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + K$$

Từ đó ta được nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ K + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right]$$

*Ví dụ 1:* Giải phương trình vi phân:  $y' + xy = x^3$

Giải. Phương trình thuần nhất:  $y' + xy = 0$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:  $y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$

Xem  $C = C(x)$  là hàm theo x, ta có:  $y'(x) = C'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} - xC(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Thay vào phương trình đã cho, ta được:

$$C'(x) = x^3 e^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)e^{-\frac{1}{2}x^2} + C_1$$

Vậy nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính là:  $y(x) = x^2 - 2 + C_1 e^{-\frac{1}{2}x^2}$

**Nhận xét 1.** Đây là lời giải chi tiết theo từng bước của một phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, dù là một ví dụ rất đơn giản nhưng việc tính toán cũng rất mất thời gian và có thể nhầm lẫn. Maple có thể giúp ta khắc phục những vấn đề này.

## 2.5. Giải phương trình vi phân bằng phần mềm Maple

Cấu trúc lệnh:

>dsolve({các phương trình, điều kiện}, các hàm số).

*Ví dụ 2:* Ta kiểm tra lại Ví dụ 1: Giải phương trình vi phân:  $y' + xy = x^3$

Ta nhập như sau:

>pt:=diff(y(x),x)+x\*y(x)=x^3;

Kết quả:  $pt := \frac{d}{dx} y(x) + xy(x) = x^3$

>dsolve(pt,y(x));

Kết quả:  $y(x) = x^2 - 2 + e^{-\frac{1}{2}x^2} C_1$

*Ví dụ 3:*

Giải phương trình vi phân:  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Ta nhập như sau:

>pt:=diff(y(x),x)+2\*x\*y(x)=x\*exp(-x^2);

Kết quả:  $pt := \frac{d}{dx} y(x) + 2xy(x) = xe^{-x^2}$

>dsolve(pt,y(x));

Kết quả:  $y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)e^{-x^2}$

**Nhận xét 2.** Khi tiến hành giải phương trình vi phân bằng Maple, kết quả chúng ta thu được rất nhanh và chính xác. Tuy nhiên, trong giảng dạy và học tập ta cần lời giải chi tiết theo từng bước để minh họa cho phương pháp. Để khắc phục những điều này ta có thể sử dụng ngôn ngữ lập trình của Maple để tạo ra một công cụ mới giúp ta giải phương trình vi phân theo từng bước như lời giải được trình bày trong Ví dụ 1.

## 2.6. Chương trình toán học giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

### 2.6.1. Lệnh xuất nhập dữ liệu

Hàm readstat("<prompt>"): hiện dấu nhắc <prompt> trả về dữ liệu nhập từ bàn phím.

Hàm print(data1,data2,...): hiển thị dữ liệu ra màn hình.

Lưu ý: chuỗi ký tự đặt trong dấu ``.

### 2.6.2. Xây dựng thủ tục trong Maple

Maple là một ngôn ngữ lập trình hướng thủ tục (procedure). Chế độ thủ tục được thực hiện bằng cách đóng gói một dãy các lệnh xử lý cùng một công việc vào một thủ tục duy nhất, sau đó chỉ cần gọi thủ tục này và Maple tự động thực hiện các lệnh có trong chu trình đó một cách tuần tự sau đó trả lại kết quả cuối cùng.

*Khai báo thủ tục như sau:*

```
Procedure_name:=proc(parameter_sequence)
[local local_sequence]
[global global_sequence]
[options options_sequence]
statements_sequence
end;
```

*Chương trình giải phương trình vi phân tuyến tính*

```
> restart;
> myproc:=proc()#Thu tuc giai Phuong trinh tuyen tinh
local p,q,pttt,pttn,phanmu,tngh,nghiemtn,daoham,pths,hs,kq;
global global_pttt;
p:=readstat("p(x)=");
q:=readstat("q(x)=");
global_pttt:=pttt;
pttt:=diff(y(x),x)+p*y(x)=q(x);pttt;
print(-----Bai giai-----);
print('Phuong trinh vi phan tuyen tinh co dang la:');
print(pttt);
pttn:=diff(y(x),x)+p*y(x)=0;pttn;
print('Phuong trinh thuan nhat la:');
print(pttn);
phanmu:=int(p,x);phanmu;
tngh=exp(-phanmu);tngh;
nghiemtn:=y(x)=C.tngh;nghiemtn;
print('Nghiem tong quat cua Phuong trinh thuan nhat la:');
print(nghiemth);
daoham:=y'(x)=diff(C(x)*tngh,x);daoham;
print('Xem "C=C(x)" la ham so theo x. Ta co:');
print(daoham);
pths:=diff(C(x),x)=q*exp(phanmu);pths;
print('Thay vao Phuong trinh tuyen tinh da cho ta duoc:');
print(pths);
```

```

hs:=dsolve(pths);hs;
print(Giai ra ta duoc:);
print(hs);
kq:=dsolve(pttt,y(x));kq;
print(`Vay, nghiem tong quat cua Phuong trinh tuyen tinh la:`);
print(kq);
end proc;
#Ket thuc chuong trinh

```

### 2.6.3. Lưu và nạp chương trình

Maple cho phép lưu chương trình để sử dụng một cách thuận tiện như sau:

```
> save myproc(); "\thu_tuc.m";
```

Trong file có sử dụng chương trình thực hiện lệnh read file proc, trong đó file proc là tên file (có cả đường dẫn) chứa chương trình biên dịch, được tạo bởi lệnh save:

```

> restart;
> read "\thu_tuc.m";

```

### 2.6.4. Sử dụng chương trình

Trước hết ta kiểm tra lại Ví dụ đã xét ở mục 2.1 để kiểm tra và so sánh kết quả thu được.

*Ví dụ 4:* Giải phương trình vi phân:  $y' + xy = x^3$

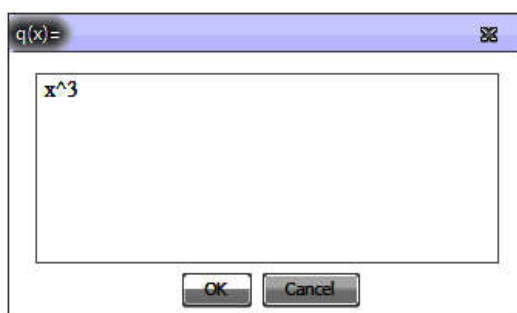
Nhập các tham số cho chương trình như sau:

```
> myproc(); #goi chuong trinh giai phuong trinh vi phan tuyen tinh
```

Khai báo hàm p(x):



Khai báo hàm q(x):



Bài giải chi tiết như sau:

-----Bai giai-----

Phuong trình vi phan tuyen tinh co dang la:

$$\frac{d}{dx}y(x) + y(x)x = x^3$$

Phuong trình thuan nhat la:

$$\frac{d}{dx}y(x) + y(x)x = 0$$

Nghiem cua Phuong trình thuan nhat la:

$$y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Xem “ $C = C(x)$ ” la ham theo x. Ta co:

$$\frac{d}{dx}y(x) = \left(\frac{d}{dx}C(x)\right)e^{-\frac{1}{2}x^2} - C(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}x$$

Thay vao Phuong trình tuyen tinh da cho ta duoc:

$$\frac{d}{dx}C(x) = x^3e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Giai ra ta duoc:

$$C(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)e^{\frac{1}{2}x^2} + C_1$$

Vay nghiem tong quat cua Phuong trình tuyen tinh la:

$$y(x) = x^2 - 2 + e^{-\frac{1}{2}x^2} C_1$$

Như vậy ta thu được kết quả hoàn toàn phù hợp với lời giải của Ví dụ 1. Và chương trình có thể xem như đảm bảo được yêu cầu đặt ra. Ta xét một vài ví dụ khác:

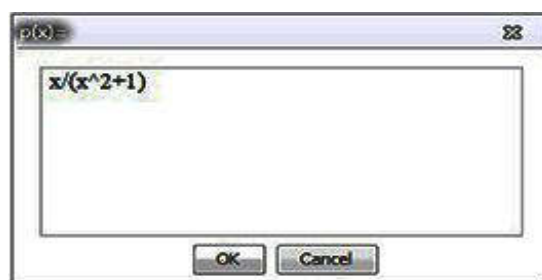
*Ví dụ 5:* Giải phương trình vi phân:  $(x^2 + 1)y' + xy = 1$

Chuyển về phương trình vi phân tuyến tính:  $y' + \frac{x}{x^2 + 1}y = \frac{1}{x^2 + 1}$

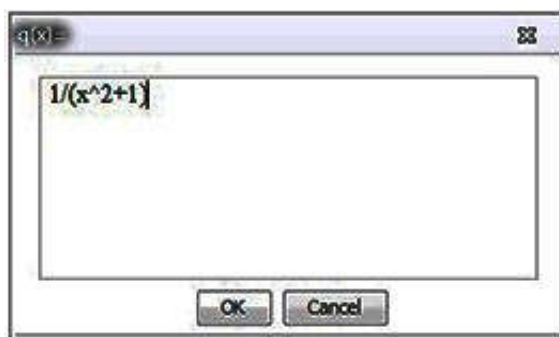
Nhập các tham số cho chương trình như sau:

> myproc(); #goi chuong trinh giai phuong trình vi phan tuyen tinh

Khai báo hàm p(x):



Khai báo hàm q(x):



Bài giải chi tiết như sau:

-----Bai giai-----

Phuong trình vi phan tuyen tinh co dang la:

$$\frac{d}{dx}y(x) + \frac{xy(x)}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

Phuong trình thuan nhat la:

$$\frac{d}{dx}y(x) + \frac{xy(x)}{x^2+1} = 0$$

Nghiem cua Phuong trình thuan nhat la:

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$$

Xem “ $C = C(x)$ ” la ham theo x. Ta co:

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{\frac{d}{dx}C(x)}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{C(x)x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Thay vao Phuong trình tuyen tinh da cho ta duoc:

$$\frac{d}{dx}C(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Giai ra ta duoc:

$$C(x) = \arcsin h(x) + \_ C1$$

Vay nghiem tong quat cua Phuong trình tuyen tinh la:

$$y(x) = \frac{\arcsin h(x) + \_ C1}{\sqrt{x^2+1}}$$

*Chú thích:* Maple biểu diễn nghiệm theo hàm hyperbolic ngược:

$$\arcsin h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

**Ví dụ 6:** Giải phương trình vi phân:  $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

Nhập các tham số cho chương trình như sau:

> myproc(); #gọi chương trình giải phương trình vi phân tuyến tính

Khai báo hàm p(x):



Khai báo hàm q(x):



Bài giải chi tiết như sau:

-----Bài giải-----

Phương trình vi phân tuyến tính có dạng là:

$$\frac{d}{dx} y(x) + \frac{y(x)}{x} = \sin(x)$$

Phương trình thuần nhất là:

$$\frac{d}{dx} y(x) + \frac{y(x)}{x} = 0$$

Nghiệm của Phương trình thuần nhất là:

$$y(x) = \frac{C}{x}$$

Xem “ $C = C(x)$ ” là hàm theo x. Ta có:

$$\frac{d}{dx} y(x) = \frac{d}{dx} \frac{C(x)}{x} = \frac{d}{dx} C(x) \cdot \frac{1}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

Thay vào Phương trình tuyến tính đã cho ta được:

$$\frac{d}{dx}C(x) = \sin(x)x$$

Giai ra ta được:

$$C(x) = \sin(x) - \cos(x)x + C_1$$

Vậy nghiệm tổng quát của Phương trình tuyến tính là:

$$y(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)x + C_1}{x}$$

### 3. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày các bước cơ bản giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 bằng chương trình toán học. Kinh nghiệm cho thấy là nếu viết một chương trình phức tạp thì trước hết ta viết và chạy từng lệnh một để xem kết quả thế nào, khi thấy kết quả tốt ta nhóm các lệnh trên thành một chương trình hoàn chỉnh. Chương trình có thể mở rộng để giải quyết bài toán Cauchy hoặc giải các phương trình vi phân khác như phương trình Becnoully, phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số, hệ phương trình vi phân tuyến tính.

Trên cơ sở chương trình như trên ta có thể xây dựng các chương trình minh họa phương pháp giải các bài toán khác, nhất là những bài liên quan đến tính toán phức tạp. Bản thân tôi từng sử dụng những chương trình tương tự minh họa phương pháp và hướng dẫn sinh viên giải quyết các bài toán Giải tích số mang lại hiệu quả ban đầu khá tốt.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Trần Quốc Chiến (2008), *Giáo trình phần mềm toán học*, Trường Đại học Đà Nẵng.
- [2] Phạm Huy Điền, Đinh Thế Lục, Tại Duy Phương (1998), *Hướng dẫn thực hành tính toán trên chương trình Maple V*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.
- [3] Nguyễn Đình Trí (2006), *Toán cao cấp tập 3*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

## TEACHING AND LEARNING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE HELP OF MAPLE SOFTWARE

Nguyen Huu Hoc

### ABSTRACT

*This paper presents a new approach to solve linear differential equations first order with the help of program written with the Maple software. This program is then applied in teaching and learning to some linear equations. Initially oriented to students using Maple software programmers to solve problems, can be expanded, developed to create programs to solve other problems.*

**Keywords:** *Differential Equations, Maple.*