



DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH KIỂU THỦY ĐỘNG LỰC HỌC NGẪU NHIÊN CÓ TRỄ

Nguyễn Tiến Đà¹

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu tính ổn định mũ theo kỳ vọng và ổn định mũ hầu chắc chắn của một lớp phương trình kiểu thủy động lực học ngẫu nhiên có trễ thời gian thông qua mô hình trù tượng:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au(t) - B(u(t)) - R(t, u(t)) + G(u(t - \rho(t))) + \sigma(t, u(t - \rho(t))) \frac{dW(t)}{dt}$$

trên miền bị chặn thỏa mãn bất đẳng thức Poincar'e.

Từ khóa: *Phương trình vi phân ngẫu nhiên có trễ, ổn định mũ theo kỳ vọng, ổn định mũ hầu chắc chắn, trễ thời gian.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tính chất ổn định của dòng chảy theo thời gian đã và đang được đánh giá là một trong những vấn đề quan trọng và thú vị trong lý thuyết của động lực học chất lỏng. Đặc biệt chúng đã và đang nhận được rất nhiều sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học nổi tiếng trong và ngoài nước, trong đó có các chuyên gia hàng đầu về phương trình vi phân đạo hàm riêng ngẫu nhiên như Capinski. M và Gatarek. D. Một số kết quả hiện nay về lĩnh vực này đã được một số tác giả trình bày trong các bài báo [1-3,5,6,8,9]. Một trong những mô hình quen thuộc nhất là phương trình Navier-Stokes hai chiều ngẫu nhiên không nén được. Bên cạnh đó, một số mô hình quan trọng khác cũng được nhiều chuyên gia trong nước nghiên cứu về phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên, điển hình là PGS. TS. Cung Thế Anh và các cộng sự nghiên cứu về sự tồn tại của tập hút toàn cục cũng như dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình khi tham số thời gian đủ lớn.

Tuy nhiên hầu hết các kết quả kể trên đều xem xét trong trường hợp tất định và không có trễ của biến thời gian. Điều này dẫn đến một câu hỏi khá tự nhiên và thú vị là nghiệm của hệ tất định sẽ bị ảnh hưởng thế nào nếu nó chịu tác động bởi một nhiễu ngẫu nhiên có độ trễ thời gian? Để trả lời cho câu hỏi trên, trong bài báo này, chúng ta xem xét sự ổn định của một lớp các phương trình vi phân đạo hàm riêng có trễ trong cơ học chất lỏng được biểu diễn bởi một mô hình trù tượng có dạng:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au(t) - B(u(t)) - R(t, u(t)) + G(u(t - \rho(t))) + \sigma(t, u(t - \rho(t))) \frac{dW(t)}{dt} \quad (1.1)$$

¹ Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

Trong đó $u = u(x, t) = (u_1, u_2)$ là vector vận tốc chưa biết, $G(u(t - \rho(t)))$ là trường ngoại lực bên ngoài có trễ và $\sigma(t, u(t - \rho(t))) \frac{dW(t)}{dt}$ là trường ngoại lực ngẫu nhiên với $W(t)$ là một quá trình Wiener vô hạn chiều.

2. NỘI DUNG

2.1. Một số không gian nghiệm và các khái niệm liên quan

Giả sử $(H, |.,.|)$ là không gian Hilbert khả li, A là một toán tử tuyến tính không bị chặn và xác định dương trên H . Kí hiệu $V = \text{Dom}(A^{1/2})$. Với mỗi $v \in V$ ta có $\|v\| = |A^{1/2}v|$, gọi V' là không gian đối ngẫu của V (tương ứng với tích vô hướng $\langle ., . \rangle$ trên H). Đồng thời ta có quan hệ $V \subset H \equiv H' \subset V'$. Ta gọi $\langle u, v \rangle$ là ký hiệu tích đối ngẫu giữa $u \in V$ và $v \in V'$. sao cho $\langle u, v \rangle = (u, v)$ với mọi $u \in V, v \in H$, cuối cùng $B : V \times V \rightarrow V'$ là ánh xạ thỏa mãn các điều kiện dưới đây:

(C1) $B : V \times V \rightarrow V'$ là ánh xạ liên tục.

(C2) Với mọi $u, v, w \in V$, ta có:

$$(B(u, v), w) = -(B(u, w), v);$$

(C3) Tồn tại không gian Banach nội suy H_1 sao cho:

$$V \subset H_1 \subset H$$

$$\|u\|_{H_1}^2 \leq a_0 \|u\| \|u\|$$

$$|(B(u, v), w)| \leq \eta \|w\|^2 + C_\eta \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_1}, \forall u, v, w \in V$$

Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là một không gian xác suất đầy đủ được trang bị một bộ lọc tự nhiên $\mathcal{F}_t$ ($t \geq 0$) thỏa mãn một số điều kiện thông thường, ta kí hiệu $\beta_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) là một dãy độc lập các chuyển động Brown một chiều nhận giá trị thực. Khi đó quá trình Wiener vô hạn chiều được biểu diễn bởi:

$$W(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda'_n} \beta_n(t) e_n, \quad t \geq 0$$

Trong đó $\lambda'_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) là dãy các số thực không âm sao cho $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda'_n < +\infty$ và $\{e_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) là một cơ sở trực giao đầy đủ trong không gian Hilbert thực khả li K . Gọi $Q \in L(K, K)$ là toán tử tuyến tính liên tục trên K xác định bởi $Qe_n = \lambda'_n e_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Quá trình ngẫu nhiên nhận giá trị trong K nói trên được gọi là quá trình Q -Wiener. $L(K, H)$ là

không gian các toán tử tuyến tính bị chặn từ K vào H . Với $\sigma \in L(K, H)$ ta sử dụng định

nghĩa: $\|\sigma\|_{L^2(K^0; H)}^2 := \text{tr}(\sigma Q \sigma^*) = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \|\sqrt{\lambda_n} \sigma e_n\|^2 \right\}.$

Nếu $\|\sigma\|_{L^2(K^0; H)}^2 < +\infty$, thì σ được gọi là toán tử Q -Hilbert-Schmidt và kí hiệu

$L^2(K^0, H)$, với $K^0 = Q^{\frac{1}{2}}K$ là không gian các toán tử Q -Hilbert-Schmidt $\sigma: [0, T] \times H \rightarrow L^2(K^0, H)$.

Về định nghĩa của tích phân ngẫu nhiên nhận giá trị trong H của một quá trình $\Phi(t)$ dự đoán được và $\mathcal{F}_0$ -thích nghi nhận giá trị trong $L^2(K^0, H)$ tương ứng với quá trình Q -Wiener $W(t)$, có thể tham khảo trong [8].

Với việc thiết lập này hệ phương trình kiểu thủy động lực học hai chiều ngẫu nhiên có trễ thời gian được viết như sau:

$$\begin{cases} du(t) = [-Au(t) - B(u(t)) - R(t, u(t)) + G(u(t - \rho(t)))]dt \\ \quad + \sigma(u(t - \rho(t)))dW(t), \quad t \geq 0, \\ u_0(\theta) = \varphi \in L^2(\Omega, C([- \tau, 0], H)), \quad \theta \in [- \tau, 0], \end{cases} \quad (2.1)$$

Trong đó $L^2(\Omega, C([- \tau, 0], H))$ là kí hiệu của một họ các quá trình ngẫu nhiên $\mathcal{F}_t$ ($t \geq 0$)- đo được và bị chặn hầu chắc chắn nhận giá trị trong $C([- \tau, 0], H)$ được trang bị với chuẩn $\|\varphi\|_0 = E \sup_{\theta \in [- \tau, 0]} |\varphi(\theta)|^2$; hàm $\rho: [0, +\infty) \rightarrow [0, \tau]$ ($\tau > 0$) là bị chặn và đo được;

$G: V \rightarrow V'$ và $\sigma: [0, T] \times H \rightarrow L^2(K^0, H)$ là các hàm đo được theo nghĩa Borel.

Phương trình tắt định tương ứng của hệ (2.1) có thể viết như sau:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = -Au(t) - B(u(t)) - R(t, u(t)) + G(u(t - \rho(t))) \\ u_0(\theta) = \varphi \in C([- \tau, 0], H), \quad t \geq 0, \quad \theta \in [- \tau, 0]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Định nghĩa 1 [12]. Một quá trình ngẫu nhiên $u(t)$ ($t \geq -\tau$) được gọi là nghiệm yếu của hệ (2.1) nếu $u(t)$ là $\mathcal{F}_t$ -thích nghi; $u(t) \in L^\infty(-\tau, T; H) \cap L^2(-\tau, T; V)$ hầu chắc chắn với mọi $T > 0$;

Phương trình sau đây xảy ra hầu chắc chắn như một đồng nhất thức trong V' với mọi $t \in [0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} u(t) = u(0) + \int_0^t [-Au(s) - B(u(s)) - R(t, u(t)) + G(u(s - \rho(s)))]ds \\ + \int_0^t \sigma(u(s - \rho(s)))dW(s). \end{aligned}$$

Kí hiệu $C^{(1,2)}([0; +\infty) \times H, R^+)$ là không gian tất cả các hàm Φ nhận giá trị trong R xác định trên $[0; +\infty) \times H$ với các giả thiết sau đây:

$\Phi(t, u)$ khả vi theo $t \in [0; +\infty)$ và khả vi Fréchet hai lần theo u với $\Phi_t(t, \cdot)$, $\Phi_u(t, \cdot)$ và $\Phi_{uu}(t, \cdot)$ bị chặn địa phương trên H ;

$\Phi(t, \cdot)$, $\Phi_t(t, \cdot)$ và $\Phi_u(t, \cdot)$ là các hàm liên tục trên H ;

Các toán tử lớp vết Z , $tr(\Phi_{uu}(t, \cdot)Z)$ là liên tục từ H vào R với mỗi Z ;

Nếu $v \in V$, thì $\Phi_u(t, v) \in V$ và $x \rightarrow \langle \Phi_u(t, x), v_\infty \rangle$ là liên tục với mỗi $v_\infty \in V'$;

$\|\Phi_u(t, x)\| \leq C_0(t)(1 + \|x\|)$, $C_0(t) > 0$, với mọi $x \in V$.

Bổ đề 1. (Công thức Ito) [7]. *Nếu quá trình ngẫu nhiên $u(t)$ là nghiệm yếu của hệ (2.1), thì ta có đẳng thức*

$$\Phi(t, u(t)) = \Phi(0, u(0)) + \int_0^t L\Phi(s, u(s))ds + \int_0^t (\Phi_u(s, u(s)), \sigma(u(s - \rho(s))))dW(s),$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} L\Phi(t, u(t)) = & \Phi_t(t, u(t)) + \langle -Au(t) - B(u(t)) - R(t, u(t)) + f(t) \\ & + G(u(t - \rho(t))), \Phi_x(t, u(t)) \rangle \\ & + \frac{1}{2} tr(t, u(t)) \sigma(u(t - \rho(t))) Q \sigma(u(t - \rho(t)))^*. \end{aligned}$$

Định nghĩa 2 [7]. *Ta nói nghiệm yếu $u(t)$ của (2.1) hội tụ mũ tới $u_\infty \in H$ theo bình phương kỳ vọng nếu tồn tại $a > 0$ và $M_0(u(0)) > 0$ sao cho*

$$\mathbb{E}|u(t) - u_\infty|^2 \leq M_0 e^{-at}, \forall t \geq 0.$$

Đặc biệt, nếu u_∞ là nghiệm của (2.1), thì ta nói u_∞ là ổn định mũ theo bình phương kỳ vọng.

Định nghĩa 3 [7]. *Ta nói nghiệm yếu $u(t)$ của hệ (2.1) hội tụ mũ hầu chắc chắn tới $u_\infty \in H$ nếu tồn tại $\gamma > 0$ sao cho: $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |u(t) - u_\infty| \leq -\gamma$, hầu chắc chắn.*

Đặc biệt, nếu u_∞ là nghiệm của hệ (2.1), thì ta nói u_∞ là ổn định mũ hầu chắc chắn.

Bổ đề 2 [7]. *Giả sử γ là số dương tùy ý, khi đó luôn tồn tại các số $\lambda' > 0$, $\lambda'' > 0$ và các hàm $y: [-\tau; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ sao cho nếu $\lambda'' < \gamma$ thì bất đẳng thức:*

$$y(t) \leq \begin{cases} \lambda' e^{-\gamma t} + \lambda'' \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \sup_{\theta \in [-\tau; 0]} y(s + \theta) ds & t \geq 0, \\ \lambda' e^{-\gamma t}, & t \in [-\tau; 0], \end{cases} \quad (2.3)$$

xảy ra. Hơn nữa, ta có $y(t) \leq \lambda' e^{-\lambda t}$ ($t \geq -\tau$), trong đó $\mu \in (0, \gamma)$ sao cho $\frac{\lambda''}{\gamma - \mu} e^{\mu \tau} = 1$.

2.2. Các kết quả chính

Để đưa ra các kết quả về tính ổn định mũ theo kỳ vọng và ổn định mũ hầu chắc của nghiệm yếu của hệ (2.1), chúng ta cần đưa thêm vào một số giả thiết sau:

(H1) Tồn tại $c_1 > 0$ sao cho

$$\|G(u) - G(v)\|_{V'} \leq c_1 |u - v|, \text{ với mọi } u, v \in H \text{ và } G(0) = 0.$$

(H2) Tồn tại số dương $L > 0$ thỏa mãn:

$$|R(t, u) - R(t, v)| \leq L |u - v|, \text{ với } u, v \in H$$

Chúng ta nhắc lại rằng $|u|^2 \leq \lambda_1 \|u\|^2, \forall u \in V$, hơn nữa chúng ta cũng sử dụng khái niệm

$$\|\sigma(t, u)\|_{L^2(K^0, H)}^2 = \text{tr}(\sigma(t, u) Q \sigma(t, u)^*)$$

Cuối cùng chúng ta giả sử $\sigma(t, \cdot): H \rightarrow L^2(K^0, H)$ và thỏa mãn các điều kiện:

$$(H3) \begin{cases} a) & \sigma(t, u_\infty) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0, \\ b) & \|\sigma(t, u) - \sigma(t, v)\|_{L^2(K^0, H)} \leq c_2 |u - v|, \quad \forall u, v \in H. \end{cases}$$

Định nghĩa 4. Nghiệm dừng yếu của bài toán (2.2) là một phần tử $u_\infty \in V$ sao cho

$$Au_\infty + B(u_\infty, u_\infty) + Ru_\infty = Gu_\infty \text{ trong } V' \quad (2.4)$$

2.2.1. Sự ổn định mũ theo bình phương kỳ vọng

Định lý 1. Giả sử rằng các điều kiện (H1), (H2) và (H3) được thỏa mãn. Nếu

$$2 - \frac{2C}{\sqrt{\lambda_1}} \|u_\infty\| - 2L - \frac{2c_1 + c_2^2}{\lambda_1} > 0 \quad (2.5)$$

thì nghiệm yếu $u(t)$ của (2.1) hội tụ mũ theo bình phương kỳ vọng tới nghiệm dừng u_∞ của (2.4),

nghĩa là tồn tại hằng số dương $\lambda > 0$ sao cho: $\mathbb{E}|u(t) - u_\infty|^2 \leq \mathbb{E}|u(0) - u_\infty|^2 e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$

Chứng minh.

Từ điều kiện (2.5), chúng ta có thể chọn số thực dương $a > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$a > \lambda_1 \left(2 - \frac{2C}{\sqrt{\lambda_1}} \|u_\infty\| - 2L - \frac{2c_1 + c_2^2}{\lambda_1} \right). \text{ Khi đó, áp dụng công thức Ito cho hàm}$$

$e^{at} |u(t) - u_\infty|^2$, ta được:

$$\begin{aligned} e^{at} \mathbb{E}|u(t) - u_\infty|^2 &= \mathbb{E}|u(0) - u_\infty|^2 + \int_0^t a e^{as} \mathbb{E}|u(s) - u_\infty|^2 ds \\ &\quad - 2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E}(Au(s), u(s) - u_\infty) ds \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & -2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E} \left(B(u(s)), u(s) - u_\infty \right) ds - 2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E} \left(R(s, u(s)), u(s) - u_\infty \right) ds \\ & + 2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E} \left(G(u(s - \rho(s))), u(s) - u_\infty \right) ds \\ & - 2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E} \left(\sigma(u(s - \rho(s))), u(s) - u_\infty \right) dW(s). \end{aligned}$$

$$\text{Hơn nữa, } \left(B(u(s)) - B(u_\infty), u(s) - u_\infty \right) = \left(u(s) - u_\infty, u_\infty, u(s) - u_\infty \right)$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} e^{at} \mathbb{E} |u(t) - u_\infty|^2 & \leq \mathbb{E} |u(0) - u_\infty|^2 + \int_0^t a e^{as} \mathbb{E} |u(s) - u_\infty|^2 ds - 2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E} \left(A(u - u_\infty), u(s) - u_\infty \right) ds \\ & - 2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E} \left(R(u) - R(u_\infty), u(s) - u_\infty \right) ds - 2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E} \left(B(u(s) - u_\infty, u_\infty, u(s) - u_\infty) \right) ds \\ & + 2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E} \left(G(u(s - \rho(s))) - G(u_\infty), u(s) - u_\infty \right) ds \\ & - 2 \int_0^t e^{as} \mathbb{E} \left(\sigma(u(s - \rho(s))) - \sigma(u_\infty), u(s) - u_\infty \right) dW(s) \\ & \leq \mathbb{E} |u(0) - u_\infty|^2 + \int_0^t \left(a - 2\lambda_1 \left(1 - \sqrt{\lambda_1^{-1}} C \right) \|u_\infty\| - 2L - \lambda_1^{-1} (2c_1 + c_2^2) \right) e^{as} \sup_{\theta \in [-\tau; 0]} \mathbb{E} \|u(s + \theta) - u_\infty\|^2 ds. \end{aligned}$$

Do vậy,

$$\begin{aligned} & \sup_{\theta \in [-\tau; 0]} \mathbb{E} |u(\theta) - u_\infty|^2 e^{-at} + \left(a - \lambda_1 \left(2 - \frac{2C}{\sqrt{\lambda_1}} \|u_\infty\| - 2L - \frac{2c_1 + c_2^2}{\lambda_1} \right) \right) \\ & \quad \times \int_0^t e^{-a(t-s)} \sup_{\theta \in [-\tau; 0]} \mathbb{E} |u(s + \theta) - u_\infty|^2 ds, \end{aligned}$$

với $t \geq 0$. Rõ ràng, ta có được

$$\mathbb{E} |u(t) - u_\infty|^2 \leq \sup_{\theta \in [-\tau; 0]} \mathbb{E} |u(\theta) - u_\infty|^2 e^{-at}, \quad t \in [-\tau; 0].$$

Chúng ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $a = \lambda_1 \left(2 - \frac{2C}{\sqrt{\lambda_1}} \|u_\infty\| - 2L - \frac{2c_1 + c_2^2}{\lambda_1} \right)$, ta có điều cần phải chứng minh.

Trường hợp 2. Nếu $a > \lambda_1 \left(2 - \frac{2C}{\sqrt{\lambda_1}} \|u_\infty\| - 2L - \frac{2c_1 + c_2^2}{\lambda_1} \right)$, từ Bổ đề 2, ta suy ra

$$\mathbb{E} |u(t) - u_\infty|^2 \leq M e^{-at}, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

trong đó, $\alpha \in (0; a)$ và

$$M = \max \left\{ \sup_{\theta \in [-\tau; 0]} \mathbb{E} |u(\theta) - u_\infty|^2 (a - \alpha) \times \left(\left[a - \lambda_1 \left(2 - \frac{2C}{\sqrt{\lambda_1}} \|u_\infty\| - 2L - \frac{2c_1 + c_2^2}{\lambda_1} \right) \right] e^{\alpha\tau} \right)^{-1}, \right. \\ \left. \sup_{\theta \in [-\tau; 0]} \mathbb{E} |u(\theta) - u_\infty|^2 \right\} > 0.$$

Như vậy, định lý đã được chứng minh hoàn toàn.

Ý tưởng chứng minh của định lý sau được dựa theo [7]. Do vậy nó có thể được bỏ qua ở đây.

2.2.2. Ổn định mũ hầu chắc chắn

Định lý 2. Giả sử u_∞ là nghiệm dừng duy nhất của (2.4) và các điều kiện (H1), (H2), (H3)

xảy ra. Khi đó, nếu $2 - \frac{2C}{\sqrt{\lambda_1}} \|u_\infty\| - 2L - \frac{2c_1 + c_2^2}{\lambda_1} > 0$, thì nghiệm yếu bất kỳ $u(t)$ của (2.1) cũng

hội tụ mũ hầu chắc chắn tới nghiệm dừng u_∞ của (2.4). Nghĩa là, tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao

cho $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |u(t) - u_\infty| \leq -\gamma$, hầu chắc chắn.

3. KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi đã chứng minh được tính ổn định mũ theo bình phương kỳ vọng và ổn định mũ hầu chắc chắn của một lớp các phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên kiểu thủy động lực học trong cơ học chất lỏng, lớp phương trình này bao gồm nhiều phương trình quan trọng như phương trình Navier-Stokes cổ điển hai chiều không nén được ngẫu nhiên, phương trình Maxwell biểu thị sự chuyển động của chất lỏng trong từ trường hay còn gọi là hệ MHD (magnetohydrodynamic equation), mô hình 3D Leray- α và một số phương trình quan trọng khác. Hơn nữa, trong trường hợp số hạng $R=0$, chúng ta thu được các kết quả hoàn toàn tương tự như trong [7].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Barbu V and Sritharan S. (2003), *Navier-Stokes equation with hereditary viscosity*, Z. Angew. Math. Phys. 54, 449-461.
- [2] Bensoussan A (1995), *Stochastic Navier-Stokes equations*, Acta Appl. Math. 38, 267-304.
- [3] Capinski M and Gatarek D (1994), *Stochastic equations in Hilbert spaces with applications to Navier-Stokes equations in any dimension*, J. Funct. Anal. 126, 26-35.
- [4] Caraballo T, Langa J and Taniguchi T (2002), *The exponential behavior and stabilizability of stochastic 2D-Navier-Stokes equations*, J. Diff. Equations 179, 714-737.

- [5] Caraballo T and Real J (2001), *Navier-Stokes equations with delays*, R. Soc. London A457, 2441-2453.
- [6] Caraballo T and Real J (2003), *Asymptotic behavior of Navier-Stokes equations with delays*, R. Soc. London A459, 3181-3194.
- [7] Chen. H (May,2012), *Asymptotic behavior of stochastic two dimensional Navier-Stokes equations with delays*, Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 122, No. 2, pp. 283-295.
- [8] Planas G and Hernandez E (2008), *Asymptotic behavior of two-dimensional time-delayed Navier-Stokes equations*, Discrete Contin. Dynam. Syst. 31,1245-1258.
- [9] Prato G Da and Zabczyk J (1992), *Stochastic Equations in Infinite Dimensions* (Cambridge University Press).
- [10] Sundar P and Yin H (2009), *Existence and uniqueness of solutions to the backward 2D stochastic Navier-Stokes equations*, Stoch. Proc. Appl. 119, 1216-1234. Stochastic Navier-Stokes equations 295.
- [11] Temam R, *Navier-Stokes Equations* (1979), *Theory and Numerical Analysis* (Amsterdam: North-Holland).
- [12] Temam R (1995), *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, 2nd edition (Philadelphia: SIAM).

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF STOCHASTIC TWO-DIMENSIONAL HYDRODYNAMIC TYPE EQUATIONS WITH DELAYS

Nguyen Tien Da

ABSTRACT

The aim of this paper is to study the exponential behavior and stabilizability of stochastic 2D hydrodynamic type equation with delay

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au - B(u) - R(t, u(t)) + G(u(t - \rho(t))) + \sigma(t, u(t - \rho(t))) \frac{dW(t)}{dt} \text{ in a bounded}$$

domain satisfying the Poincar'e inequality.

Keywords: *The 2D stochastic hydrodynamic type equations, exponential stability in mean square, almost surely exponential stability, delay.*