

LUẬT MẠNH SỐ LỚN CHO CÁC PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP ĐÔI MỘT TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Nguyễn Thị Nga¹

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập luật mạnh số lớn cho dãy các phần tử ngẫu nhiên độc lập đôi một nhận giá trị trong không gian Banach.

Từ khóa: Luật mạnh số lớn (SLLN), hội tụ hầu chắc chắn (Hcc), compact khả tích đều (CUI).

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lý thuyết xác suất trên không gian Banach là một lĩnh vực được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu và phát triển mạnh mẽ, thu được nhiều kết quả sâu sắc. Trong bài báo này chúng tôi chứng minh một bổ đề về luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên thực đôi một độc lập. Từ đó chúng tôi thu được luật mạnh số lớn cho dãy các phần tử ngẫu nhiên đôi một độc lập nhận giá trị trong không gian Banach.

2. NỘI DUNG

2.1. Phần chuẩn bị

Trong bài báo này $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ. Ξ là không gian Banach, không gian liên hợp của Ξ được ký hiệu là Ξ^* và $B(\Xi)$ là σ -đại số các tập Borel của Ξ .

Định nghĩa 2.1.1 Ta nói ánh xạ $X: \Omega \rightarrow \Xi$ là một *phần tử ngẫu nhiên* nếu $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ với mọi $B \in B(\Xi)$.

Dưới đây, ta nêu lên một số khái niệm hội tụ của họ các phần tử ngẫu nhiên.

Định nghĩa 2.1.2 Giả sử $\{X, X_n: n \geq 1\}$ là họ các phần tử ngẫu nhiên cùng xác định trên Ω và nhận giá trị trong Ξ . Ta nói dãy $\{X_n: n \geq 1\}$ hội tụ đến phần tử ngẫu nhiên X :

Theo xác suất nếu với mọi $\varepsilon > 0$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|X_n - X\| > \varepsilon) = 0$$

Hầu chắc chắn nếu

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0\right) = 1$$

Định nghĩa 2.1.3. Dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{X_n: n \geq 1\}$ gọi là “*Compact khả tích đều*” nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại tập compact K_ε của Ξ sao cho

¹ Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

$$\sup_{n \geq 1} E(\|X_n\| I\{X_n \notin K_\varepsilon\}) \leq \varepsilon.$$

Giá trị kỳ vọng của một phần tử ngẫu nhiên được định nghĩa bởi tích phân Pettis [6] như sau:

Định nghĩa 2.1.4. Giả sử $X: \Omega \rightarrow \Xi$ là một phần tử ngẫu nhiên. Phần tử $EX \in \Xi$ được gọi là kỳ vọng của X nếu: $f(EX) = E(f(X))$ với mọi $f \in \Xi^*$.

2.2. Luật mạnh số lớn cho các phần tử ngẫu nhiên đôi một độc lập

Để thiết lập kết quả chính trong phần này, đầu tiên ta cần chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 2.2.1. Cho $\{X_i: i \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên không âm đôi một độc lập với moment bậc hai hữu hạn sao cho:

$$(a) \sup_{i \geq 1} EX_i < \infty$$

$$(b) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{EX_i^2}{i^2} < \infty$$

$$\text{Khi đó ta thu được luật mạnh số lớn } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow{hcc} 0, \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

Chứng minh.

Cho $a > 1$, đặt $n_k = [a^k]$. Với C là một hằng số tùy ý nào đó và δ là số dương bất kỳ, theo bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_{n_k} - ES_{n_k}}{n_k}\right| > \delta\right) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var S_{n_k}}{n_k^2} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n_k} EX_i^2}{n_k^2} \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{EX_i^2}{i^2} < \infty \quad (\text{theo (b)})$$

$$\text{Bởi bổ đề Borel-Cantelli, ta thu được } \frac{S_{n_k} - ES_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{hcc} 0, \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

Với mỗi n nguyên dương, tồn tại số tự nhiên k sao cho $n_k \leq n < n_{k+1}$. Ta có đánh giá sau:

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \leq \frac{|S_{n_{k+1}} - ES_{n_{k+1}}|}{n} + \frac{ES_{n_{k+1}} - ES_{n_k}}{n} \leq \frac{|S_{n_{k+1}} - ES_{n_{k+1}}|}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k} + \frac{ES_{n_{k+1}} - ES_{n_k}}{n_k}$$

và

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \geq -\frac{|S_{n_k} - ES_{n_k}|}{n} - \frac{ES_{n_{k+1}} - ES_{n_k}}{n} \geq -\frac{|S_{n_k} - ES_{n_k}|}{n_k} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k} - \frac{ES_{n_{k+1}} - ES_{n_k}}{n_k}$$

Khi $n \rightarrow \infty$ thì $k \rightarrow \infty$. Từ đó kéo theo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - ES_n}{n} \leq \sup_i (EX_i)(a-1) \quad (hcc)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - ES_n}{n} \geq -\sup_i (EX_i)(a-1) \quad (hcc)$$

Cho $a \downarrow 1$ ta thu được điều phải chứng minh

Định lý 2.2.2. Cho $\{X_i : i \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên đôi một độc lập và CUI.

Giả sử $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E\|X_i\|^2}{i^2} < \infty$, khi đó ta thu được luật mạnh số lớn

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i - EX_i}{n} \xrightarrow{hcc} 0, \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

Chứng minh.

Với $\varepsilon > 0$, từ giả thiết suy ra tồn tại tập compact K_ε của Ξ sao cho $E(\|X_i\|I\{X_i \notin K_\varepsilon\}) < \varepsilon$ với mọi i . Từ tính compact của K_ε , tồn tại hữu hạn các điểm $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ sao cho $K_\varepsilon \subset \bigcup_{t=1}^p B(x_t, \varepsilon)$, với $B(x_t, \varepsilon) = \{x \in \Xi : \|x - x_t\| < \varepsilon\}$.

Với mỗi $i \geq 1$, ta định nghĩa phần tử ngẫu nhiên sau

$$Y_i = Z_i I(X_i \in K_\varepsilon),$$

$$\text{với } Z_i = x_1 I[X_i \in B(x_1, \varepsilon)] + \sum_{j=2}^p x_j I\left[X_i \in B(x_j, \varepsilon) \cap \bigcup_{k=1}^{j-1} B(x_k, \varepsilon)^c\right]$$

Ta thấy Y_i là phần tử ngẫu nhiên nhận hữu hạn giá trị và dãy $\{Y_i : i \geq 1\}$ là đôi một độc lập. Bởi bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \frac{X_i - EX_i}{n} \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \frac{X_i - X_i I(X_i \in K_\varepsilon)}{n} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{X_i I(X_i \in K_\varepsilon) - Y_i}{n} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - EY_i}{n} \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{EY_i - EX_i I(X_i \in K_\varepsilon)}{n} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{EX_i I(X_i \in K_\varepsilon) - EX_i}{n} \right\| \\ &:= (A_1) + (A_2) + (A_3) + (A_4) + (A_5) \end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ đánh giá lần lượt tương ứng từ $(A_1) - (A_5)$:

Với (A_1) , ta có

$$\begin{aligned} (A_1) &= \left\| \sum_{i=1}^n \frac{X_i I(X_i \notin K_\varepsilon)}{n} \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\|X_i I(X_i \notin K_\varepsilon)\| - E\|X_i I(X_i \notin K_\varepsilon)\|) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\|X_i I(X_i \notin K_\varepsilon)\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\|X_i I(X_i \notin K_\varepsilon)\| - E\|X_i I(X_i \notin K_\varepsilon)\|) + \varepsilon \end{aligned}$$

Đề ý rằng dãy $\{\|X_i I(X_i \notin \mathcal{K}_\varepsilon)\| : i \geq 1\}$ là độc lập đôi một với $\sup_{i \geq 1} E\|X_i I(X_i \notin \mathcal{K}_\varepsilon)\| < \infty$

$$\text{Và } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E\|X_i I(X_i \notin \mathcal{K}_\varepsilon)\|}{i^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E\|X_i\|}{i^2} < \infty$$

Do đó, áp dụng bổ đề 2.2.1 ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n \frac{X_i I(X_i \notin \mathcal{K}_\varepsilon)}{n} \right\| \leq \varepsilon \quad (hcc)$$

Với (A_2) , bởi định nghĩa của Y_i , ta có

$$(A_2) = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{X_i I(X_i \in \mathcal{K}_\varepsilon) - Y_i}{n} \right\| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i I(X_i \in \mathcal{K}_\varepsilon) - Y_i\| < \varepsilon$$

Với (A_3) , ta có: $Y_i = Z_i I(X_i \in \mathcal{K}_\varepsilon) = \sum_{j=1}^p x_j I(X_i = x_j)$

$$\text{và } EY_i = \sum_{j=1}^p x_j P(X_i = x_j)$$

$$\text{Do đó } (A_3) = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - EY_i}{n} \right\| \leq \sum_{j=1}^p \|x_j\| \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [I(X_i = x_j) - P(X_i = x_j)] \right\|$$

Vì với mỗi $j = 1, 2, \dots, p$ thì dãy biến ngẫu nhiên thực $\{I(X_i = x_j) : i \geq 1\}$ là đôi một độc lập thỏa mãn bổ đề 2.2.1, nên ta có: $(A_3) \xrightarrow{hcc} 0, n \rightarrow \infty$.

Với (A_4) , ta có:

$$\begin{aligned} (A_4) &= \left\| \sum_{i=1}^n \frac{EY_i - EX_i I(X_i \in \mathcal{K}_\varepsilon)}{n} \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|E(Y_i - X_i I(X_i \in \mathcal{K}_\varepsilon))\| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\|Y_i - X_i I(X_i \in \mathcal{K}_\varepsilon)\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Với (A_5) , ta có:

$$(A_5) = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{EX_i I(X_i \in \mathcal{K}_\varepsilon) - EX_i}{n} \right\| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\|X_i I(X_i \notin \mathcal{K}_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$$

Từ đó ta có:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n \frac{X_i - EX_i}{n} \right\| \leq 4\varepsilon$$

Cho $\varepsilon \rightarrow 0$, ta có điều phải chứng minh.

3. KẾT LUẬN

Kết quả chính trong bài báo là Định lý 2.2.2. Trong định lý này nếu không gian là hữu hạn chiều thì điều kiện CUI tương đương với điều kiện khả tích đều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Duy Tiến, Vũ Việt Yên (2001), *Lý thuyết xác suất*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.
- [2] A. Bozorgnia and M. Bhaskara Rao (1978), *Some Remarks on the Strong Law of Large Numbers for Banach Space Valued Weakly Integrable Random Variables*, Journal of multivariate analysis 8, 579-583.
- [3] B. J. Pettis (1938), *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 44, 277-304.
- [4] J. A. Cuesta and C. Matrán (1988), *Strong Convergence of Weighted Sums of Random Elements through the Equivalence of Sequences of Distributions*, Journal of multivariate analysis 25, 311-322.
- [5] N. Etemadi (1983), *On the Laws of Large Numbers for Nonnegative Random Variables*, Journal of multivariate analysis 13, 187-193.

**THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR PAIRWISE
INDEPENDENT RANDOM ELEMENTS
IN BANACH SPACE**

Nguyễn Thị Nga

ABSTRACT

In this paper, we establish the strong law of large numbers for sequence of pairwise independent random elements taking valued in Banach space.

Keywords: *Strong law of large number, almost sure convergence, compactly uniformly integrable (CUI).*