

PHÂN TÍCH TĨNH CỦA TẤM FGM SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP MESH-FREE VÀ LÝ THUYẾT ĐƠN GIẢN BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT

NGUYỄN NGỌC HÙNG

Trường Đại học Thủ Dầu Một - hungnn@tdmu.edu.vn,

VŨ TÂN VÂN

Trường Đại học Kiến Trúc Thành phố Hồ Chí Minh - van.vutan@uah.edu.vn

NGUYỄN TRỌNG PHƯỚC

Trường Đại học Mở Thành phố Hồ Chí Minh – phuoc.nt@ou.edu.vn

NGUYỄN HUỲNH TẤN TÀI

Trường Đại học Thủ Dầu Một - tainht@tdmu.edu.vn

(Ngày nhận: 9/9/2016; Ngày nhận lại: 08/11/16; Ngày duyệt đăng: 14/11/2016)

TÓM TẮT

Bài báo này giới thiệu một mô hình số mới phân tích chuyển vị uốn của tấm vật liệu chức năng với các đặc tính vật liệu thay đổi theo chiều dày tấm. Mô hình này dựa trên phương pháp không lưới sử dụng hàm nội suy Moving Kriging (MK) kết hợp với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản (S-FSD). Các ví dụ số được thực hiện để so sánh kết quả đạt được với các kết quả của các nghiên cứu đã công bố nhằm kiểm chứng sự chính xác của mô hình phân tích được đề xuất.

Từ khóa: Chuyển vị; tấm vật liệu chức năng; lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản; nội suy Moving Kriging; phương pháp không lưới.

Static bending analysis of FGM plates based on the meshless method and simple first-order shear deformation theory

ABSTRACT

This paper presents a new numerical model for analysing static bending of Functionally Graded Material (FGM) plates which material properties vary through the thickness. This model employed the mesh-free method with Moving Kriging (MK) interpolation with the simple first-order shear deformation (S-FSD) theory. Numerical examples are solved and the results are compared with reference solutions to confirm the accuracy of the proposed method.

Keywords: Deflections; Functionally graded plates; Simple first-order shear deformation theory; Moving Kriging interpolation; mesh-free method.

1. Giới thiệu

Vật liệu biến đổi chức năng (Functionally Graded Material- FGM) là một loại composite có đặc tính vật liệu biến đổi liên tục trong vật thể do đó sẽ loại bỏ được hiện tượng tập trung ứng suất thường gặp ở loại composite thông thường. FGM thường được chế tạo từ hỗn hợp gốm gốm và kim loại. Đây là loại vật liệu đẳng hướng nhưng không đồng nhất. Hiện

nay, FGM được quan tâm vì có thể tạo ra những kết cấu có khả năng thích ứng với những điều kiện vận hành. Thông thường, phân tích ứng xử của tấm vật liệu chức năng dựa trên các lý thuyết cơ bản sau: (i) Tấm cổ điển (CP), (ii) Biến dạng cắt bậc nhất (FSD), (iii) Biến dạng cắt bậc cao (HSD).

Lý thuyết CP (Kirchhoff G, 1850) không xét đến ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang đến

ứng xử của tấm mỏng. Khi chiều dày tấm tăng lên, biến dạng cắt ngang có ảnh hưởng đáng kể đến đáp ứng của tấm. Lý thuyết FSD đề xuất bởi Mindlin R. D. (1951) và Reissner E. (1945) xét đến ảnh hưởng biến dạng cắt này bằng cách xây dựng trường chuyển vị tuyến tính bậc nhất trong mặt phẳng dọc theo chiều dày của tấm. Tuy vậy, các phương trình cân bằng, ổn định được xây dựng dựa trên lý thuyết CPT và FSDT đều không thỏa mãn điều kiện biên về sự triệt tiêu ứng suất ở mặt trên và dưới của tấm. Nhằm giải quyết được khó khăn này, một hệ số điều chỉnh biến dạng cắt được sử dụng để điều chỉnh mối quan hệ kết hợp giữa ứng suất cắt và biến dạng cắt ngang. Giá trị hệ số điều chỉnh này phụ thuộc vào các thông số như: hình học, tải trọng tác dụng, điều kiện biên của tấm. Lý thuyết HSD đề xuất bởi Reddy J. N. (2000), Neves A. M. A. và cộng sự (2013) xét đến ảnh hưởng biến dạng cắt ngang bằng cách xây dựng các trường chuyển vị bậc cao ở trong mặt phẳng dọc theo chiều dày của tấm, hoặc theo mặt phẳng ngang của tấm. Các phương trình cân bằng, ổn định dựa trên trường chuyển vị đã thỏa mãn các tất cả điều kiện biên. Tuy vậy, việc phân tích ứng xử của tấm dựa trên các lý thuyết HSD này rất phức tạp do số lượng biến số ở các phương trình cân bằng, ổn định tăng lên, chẳng hạn hàm chuyển vị được xây dựng trên lý thuyết HSD đề xuất bởi Pradyumna và Bandyopadhyay (2008), Neves và cộng sự (2012-2013) sử dụng 9 ẩn số; Reddy (2011), Talha và Singh (2010) sử dụng lần lượt gồm 11, 13 ẩn số.

Dù cho một số lý thuyết HSD khác sử dụng hàm chuyển vị gồm 5 ẩn số tương tự như lý thuyết FSD chẳng hạn như: lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (TSD) (Reddy J. N., 2000), lý thuyết biến dạng cắt hàm sin (Zenkour A. M., 2006), lý thuyết biến dạng cắt hàm lượng giác (Mantari J. L., Oktem A. S., Guedes Soares C., 2012) và (Mantari J. L., Oktem A. S., Guedes Soares C., 2012). Tuy vậy, phương trình cân bằng, ổn định đặt được từ các lý thuyết này vẫn phức tạp hơn so với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSD). Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản (S-FSD) được đề xuất đầu tiên bởi Huffington

N.J. (1963) với hàm chuyển vị chỉ gồm 4 ẩn số. Khác với lý thuyết FSD, thành phần góc xoay được biểu diễn thông qua thành phần uốn và cắt tạo nên trường chuyển vị trong mặt phẳng, chuyển vị ngang của tấm.

Mặt khác, khi khảo sát ứng xử mất ổn định của tấm FGM chịu tác dụng của tải trọng phân bố phi tuyến trong mặt phẳng tại các cạnh biên của tấm, Chen X. L., Liew K. M. (2004) cũng khẳng định rằng phương pháp không lưới-sử dụng trường chuyển vị xây dựng dựa trên tọa độ của các nút rời rạc trong cấu trúc sẽ tránh được những sự phức tạp về số khi sử dụng các loại phần tử trong phương pháp phần tử hữu hạn. Gu L. (2003) giới thiệu dạng thức mới của phương pháp không lưới dựa trên dạng yếu Galerkin kết hợp với hàm nội suy Moving Kriging (MK) gọi là phương pháp MKG. Một trong những ưu điểm của hàm nội suy MK là thỏa mãn tính chất của hàm delta Kronecker, khắc phục được những trở ngại về điều kiện biên trọng yếu xảy ra đối với phương pháp không lưới.

Nội dung bài báo đề xuất mô hình phân tích chuyển vị của tấm FGM dựa vào lý thuyết S-FSD kết hợp với phương pháp MKG. Mô hình vật liệu chức năng được trình bày ở mục 2. Lý thuyết đơn giản biến dạng cắt bậc nhất được trình bày ở mục 3. Mô hình phân tích được đề xuất ở mục 4. Ví dụ số được thực hiện để kiểm chứng độ tin cậy của mô hình được trình bày ở mục 5. Sau cùng là các kết luận thu được từ mô hình được nghiên cứu nêu trên.

2. Tấm vật liệu chức năng

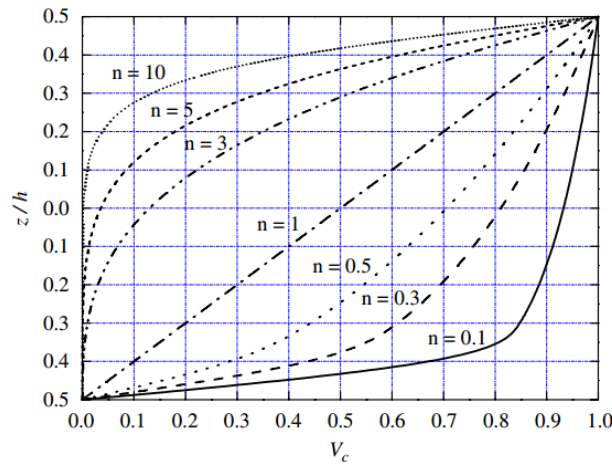
Xét một tấm FGM được chế tạo từ vật liệu kim loại và gốm có chiều dày h . Mặt dưới và trên của tấm hoàn toàn là kim loại và gốm. Mặt phẳng xy nằm ở giữa tấm. Chiều dương của trục z hướng lên trên. Trong bài báo này, tỷ số Possion's ν được xem là hằng số. Ngược lại, mô đun đàn hồi E , mật độ khối lượng ρ được xem là thay đổi liên tục theo chiều dày tấm FGM với luật hỗn hợp Voigt hay theo lược đồ Mori-Tanaka. Theo đó, mô đun đàn hồi $E(z)$, mật độ khối lượng $\rho(z)$ được xác định như sau:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V_c \quad (1)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)V_c \quad (2)$$

Trong đó chỉ số m và c đại diện cho thành phần kim loại và gốm tương ứng;

$V_c = \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^n$ là thể tích thành phần gốm; n là chỉ số của hàm mũ, thể hiện sự gia tăng tỷ lệ của phần thể tích; z là biến tọa độ theo chiều dày $-0.5h \leq z \leq 0.5h$.



Hình 1. Quan hệ giữa V_c và tỷ lệ chiều dày z/h theo chỉ số n

Hình 1 biểu diễn sự thay đổi của thể tích thành phần gốm V_c đối với tỷ số chiều dày tấm FGM khi trị số n thay đổi. Đối với giá trị n rất lớn $n > 100$ thì V_c rất bé - có thể xem như vật liệu của tấm chỉ bao gồm là kim loại. Đối với giá trị n rất bé $n < 0.01$ - có thể xem như vật liệu của tấm chỉ bao gồm là gốm. Sự thay đổi của việc kết hợp giữa hai vật liệu kim loại và gốm là tuyến tính khi $n = 1$.

3. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản

Đối với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSD, trường chuyển vị của tấm (u_1, u_2, u_3) có thể được biểu diễn đối với 5 biến số như sau:

$$u_1(x, y, z) = u(x, y) - z \partial w_b(x, y) / \partial x \quad (3)$$

$$u_2(x, y, z) = v(x, y) - z \partial w_b(x, y) / \partial y \quad (4)$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y) \quad (5)$$

Trong đó $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$ là những ẩn số chuyển vị của mặt giữa của tấm theo các phương x, y, z tương ứng; $\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)$ là các góc xoay của pháp tuyến của mặt phẳng giữa tấm theo trục x, y . Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản (S-FSD) sử dụng các giả

thuyết sau để làm đơn giản lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSD): (i) chuyển vị theo phương đứng gồm thành phần chuyển vị do uốn w_b và cắt w_s gây ra, nghĩa là: $w(x, y) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$; (ii) thành phần góc xoay chỉ do thành phần chuyển vị do uốn gây ra: $\varphi_x(x, y) = -\partial w_b(x, y) / \partial x$, $\varphi_y(x, y) = -\partial w_b(x, y) / \partial y$; . Vì vậy các công thức (3), (4) và (5) có thể viết lại như sau:

$$u_1(x, y, z) = u(x, y) + z \varphi_x(x, y) \quad (6)$$

$$u_2(x, y, z) = v(x, y) + z \varphi_y(x, y) \quad (7)$$

$$u_3(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (8)$$

Không giống với lý thuyết FSD, trường chuyển vị được xác định theo công thức công thức (6)-(8) chỉ gồm 4 ẩn số: $u(x, y), v(x, y), w_b(x, y)$ và $w_s(x, y)$. Bởi vì thành phần góc xoay là đạo hàm bậc nhất của thành phần chuyển vị do uốn tương thích với sự rời rạc của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản (S-FSD) tránh được hiện tượng khóa cắt (shear locking).

Dựa trên giả thiết biến dạng nhỏ, mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị được

biểu diễn như sau:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{zy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Công thức (9) viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z\kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Trong đó

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \kappa = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \gamma = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (11.a,b,c)$$

Mối quan hệ kết hợp thiết lập dựa trên luật Hooke bởi phương trình sau:

$$\sigma = D_m(z)(\varepsilon_0 - z\kappa) \quad \tau = D_s(z)\gamma \quad (12a,b)$$

với

$$\sigma = D_m(z)(\varepsilon_0 - z\kappa) \quad \tau = [\tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T \quad (13a,b)$$

và

$$D_m(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$D_s(z) = \frac{kE(z)}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Trong đó k là hệ số hiệu chỉnh cắt.

4. Mô hình phân tích

4.1. Hàm dạng MK

Phương pháp MK được dùng để xây dựng

hàm dạng và các đạo hàm theo Gu L. (2003) và Tongsuk P., Kanok-Nukulchai W. (2004). Giả thiết hàm phân bố $u(x_i)$ được xấp xỉ trong miền con Ω_x sao cho $\Omega_x \subseteq \Omega$. Giả sử rằng các giá trị của hàm số được nội suy dựa trên các giá trị tại các điểm nút $x_i (i \in [1, n])$ với n là tổng số điểm nút trong miền Ω_x . Hàm nội suy MK $u^h(x)$, $\forall x \in \Omega_x$ được xác định như sau:

$$u^h(x) = [p^T(x)A + r^T(x)B]u(x) \quad (16)$$

Hay

$$u^h(x) = \sum_1^n \Phi_I(x)u_I \quad (17)$$

Trong đó $\Phi_I(x)$ là hàm dạng MK, được xác định như sau

$$\Phi_I(x) = [p^T(x)A + r^T(x)B] \quad (18)$$

A , B được định nghĩa như sau:

$$A = (P^T R^{-1} P)^{-1} P^T R^{-1} \quad (19)$$

$$B = R^{-1}(I - PA) \quad (20)$$

Trong đó I là ma trận đơn vị, véc tơ $p(x)$ là đa thức với m hàm cơ sở:

$$p^T(x) = [p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots, p_m(x)] \quad (21)$$

Cụ thể, đối với ma trận P kích thước $n \times m$, các giá trị của hàm cơ sở đa thức (13) được cho bởi như sau:

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_m) & p_2(x_m) & \cdots & p_m(x_m) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Véc tơ $r(x)$ trong phương trình (16) được định nghĩa như sau:

$$r^T(x) = [R(x_1, x), R(x_2, x), \dots, R(x_n, x)] \quad (23)$$

$R(x_i, x_j)$ là hàm tương quan giữa các cặp của n nút x_i và x_j nó được biểu hiện bằng các phương sai của các trường giá trị $u(x)$:

$R(x_i, x_j) = \text{cov}[u(x_i), u(x_j)]$ và

$R(x_i, x) = \text{cov}[u(x_i), u(x)]$. Có nhiều cách để xác định hàm $R(x_i, x_j)$ nhưng phương pháp hàm Gauss là phương pháp thường sử dụng vì tính đơn giản, hiệu quả

$$R(x_i, x_j) = e^{-\theta \|x_i - x_j\|^2} \quad (24)$$

Với: $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$, và $\theta > 0$ là hệ số tương quan. Trong bài báo này sử dụng $p^T(x)$ là một hàm bậc hai như sau:

$$p^T(x) = [1, x, y, x^2, y^2, xy] \quad (25)$$

Ngoài ra, ma trận $R[R(x_i, x_j)]_{n,n}$ được biểu diễn dưới dạng tường minh như sau:

$$R[R(x_i, x_j)] = \begin{bmatrix} 1 & R(x_1, x_2) & \cdots & R(x_1, x_n) \\ R(x_2, x_1) & 1 & \cdots & R(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(x_n, x_1) & R(x_n, x_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Đối với bài toán tìm FGM, không chỉ đạo hàm bậc 1 được sử dụng mà còn đạo hàm bậc 2 của hàm dạng cũng được thiết lập như sau:

$$\phi_{I,i}(x) = \sum_j^m p_{j,i}(x) A_{jI} + \sum_k^n r_{k,i}(x) B_{kI} \quad (27)$$

$$\phi_{I,ii}(x) = \sum_j^m p_{j,ii}(x) A_{jI} + \sum_k^n r_{k,ii}(x) B_{kI} \quad (28)$$

Cần lưu ý ảnh hưởng của hệ số tương quan θ đối với hàm dạng là rõ ràng. Một trong những điểm quan trọng nhất của hàm dạng MK, đó là sở hữu tính chất Kronecker's delta. Điều này sẽ loại bỏ những trở ngại đáng kể nhất của hầu hết các phương pháp không lưới khi áp đặt điều kiện biên để giải bài toán cơ học. Để chứng minh cho điều này, chúng ta khảo sát lại hàm dạng MK xác định bởi biểu thức (18).

$$\phi_I(x_j) = \sum_j^m p_j(x_j) A_{jI} + \sum_k^n r_k(x_j) B_{kI} \quad (29)$$

Hay biểu thức (29) có thể viết dưới dạng sau:

$$[\Phi_I(x_j)] = PA + RB \quad (30)$$

Trong đó ma trận P và B được định nghĩa bởi công thức (19) (20) và (22). Thay công thức (20) vào (30) ta được:

$$[\Phi_I(x_j)] = PA + RR^{-1}(I - PA) = I \quad (31)$$

Biểu thức (31) dẫn đến tính chất Kronecker's delta xác định bởi biểu thức (32).

$$\Phi_I(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi } i = j \\ 0 & \text{khi } i \neq j \end{cases} \quad (32)$$

Ngoài ra, hàm nội suy MK sở hữu tính nhất quán, nghĩa là có thể xây dựng lại bất cứ hàm có bậc thấp hơn. Để đơn giản, thuộc tính này có thể tóm tắt như sau: Nếu u_I đạt được từ đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng m nghĩa là

$$u = P\alpha \quad (33)$$

trong đó, P được xác định từ công thức (22) và α là hệ số bất kỳ, thì sự xấp xỉ đó là chính xác. Sự xấp xỉ của trường chuyển vị như sau:

$$u^h(x) = p^T(x)\alpha = u(x) \quad (34)$$

Đặc biệt, nếu sử dụng hàm $p(x)$ là hàm tuyến tính khi xây dựng hàm dạng MK thì tất cả hằng số, số hạng tuyến tính có thể xác định lại hoàn toàn:

$$\sum_j^n \phi_I(x) = 1, \sum_j^n \phi_I(x) x_I = x, \sum_j^n \phi_I(x) y_I = y \quad (35)$$

Mặt khác, một trong các yếu tố quan trọng đối với phương pháp không lưới là miền ảnh hưởng, trong đó bán kính miền ảnh hưởng được dùng để xác định số lượng các nút rời rạc trong phạm vi miền nội suy đang xét. Bán kính miền ảnh hưởng d_m được xác định như sau:

$$d_s = \alpha d_c \quad (36)$$

Trong đó α là hệ số của miền giá đỡ, thông thường α nằm trong khoảng từ 2.0 đến 3.0. Giá trị d_c là chiều dài đặc trưng cho khoảng cách các nút với điểm đang xét.

4.2. Các phương trình rời rạc

Những chuyển vị trong hệ tọa độ tổng quát trong mặt phẳng giữa được xấp xỉ theo biểu thức (17) trong đó :

$$\mathbf{u}^h = [\mathbf{u}^h \quad \mathbf{v}^h \quad \mathbf{w}_b^h \quad \mathbf{w}_s^h]^T \quad (37)$$

Và

$$\mathbf{u}_I = [\mathbf{u}_I \quad \mathbf{v}_I \quad \mathbf{w}_{bI} \quad \mathbf{w}_{sI}]^T \quad (38)$$

Thay biểu thức (17) vào biểu thức (11,a,b,c) nhận được

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \sum_I \mathbf{B}_I^m \mathbf{u}_I \quad \boldsymbol{\kappa} = \sum_I \mathbf{B}_I^b \mathbf{u}_I \quad \boldsymbol{\gamma} = \sum_I \mathbf{B}_I^s \mathbf{u}_I \quad (39)$$

Trong đó:

$$\mathbf{B}_I^m = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} & 0 & 0 \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_I^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \phi_{I,xx} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{I,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{I,xy} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_I^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \phi_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{I,y} \end{bmatrix} \quad (40a,b,c)$$

Với bài toán chuyển vị, dạng yếu được biểu diễn như sau:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}^s \boldsymbol{\gamma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} d\Omega \quad (41)$$

Trong đó

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^m & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{D}^b \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{D}_s(z) dz$$

(42a,b,c)

$$\mathbf{D}^m = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{D}_m(z) dz \quad \bar{\mathbf{B}} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{D}_m(z) dz \quad (43a,b)$$

$$\mathbf{D}^b = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathbf{D}_m(z) dz \quad (44)$$

với

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} I_0 & I_1 \\ I_1 & I_2 \end{bmatrix} \quad (I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz \quad (45a,b)$$

$$\text{và} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^h \\ \mathbf{v}^h \\ \mathbf{w}_b^h + \mathbf{w}_s^h \end{Bmatrix} = \sum_I \mathbf{N}_I^1 \mathbf{u}_I \quad (47)$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} \partial \mathbf{w}_b^h / \partial x \\ \partial \mathbf{w}_b^h / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} = \sum_I \mathbf{N}_I^2 \mathbf{u}_I \quad (48)$$

$$\mathbf{N}_I^1 = \begin{bmatrix} \phi_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_I & \phi_I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_I^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{I,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49a,b)$$

Thay thế biểu thức (39) và (42a,b,c) vào biểu thức (41) bài toán chuyển vị của tấm FGM có thể viết lại như sau:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = 0 \quad (50)$$

Trong đó ma trận độ cứng, khối lượng trong hệ tọa độ tổng thể xác định như sau:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}^m & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{D}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s d\Omega \quad (51)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}^m & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{D}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s d\Omega \quad (52)$$

5. Kết quả số

Trong phần này, chuyển vị của tấm FGM với chỉ số n suy giảm thay đổi cùng với các điều kiện biên khác nhau được khảo sát dựa trên mô hình phân tích kết hợp giữa lý thuyết S-FSD với phương pháp không lưới MKG (S-FSD-MKG). Lược đồ bậc 2 Gauss 4×4 được sử dụng trong phương pháp không lưới MKG để tích phân dạng yếu. Điều kiện biên của tấm được ký hiệu như sau: gối tựa đơn giản (S), ngàm (C), và tự do (F). Các điều kiện biên này được áp đặt thông qua các phương trình được đề xuất bởi Shuohui Y và cộng sự (2014) như sau:

(i) Cạnh biên gối tựa đơn:

$$v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0, \text{ tại } x = 0, a.$$

$$u = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0, \text{ tại } y = 0, b.$$

(ii) Cạnh biên gối tựa ngàm:

$$u = v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0,$$

tại $x = 0, a$ và $y = 0, b$.

Bài toán 1: Tấm FGM hình vuông có chiều dày tấm $h = 0,01m$ được sản xuất từ vật liệu Al / Al_2O_3 . Thuộc tính vật liệu của Al là: $\nu_m = 0,3, E_m = 70GPa$, và $\rho_m = 2707kg / m^3$, thuộc tính vật liệu của Al_2O_3 là: $\nu_c = 0,3, E_c = 380GPa$ và $\rho_c = 3800kg / m^3$. Tấm sử dụng số lượng điểm nút là 13×13 . Hệ số hiệu chỉnh cắt $k_s = 0,8601$. Phương pháp không lưới MKG sử dụng các thông số:

$$\alpha = 3, \theta = 3.$$

Kết quả chuyển vị của tấm FGM có số liệu như trên với lực tác dụng vào tấm FGM là lực phân bố đều có giá trị là $P = 1$. Chuyển vị được kiểm chứng trong bài toán là chuyển vị của điểm chính giữa tấm và không thứ nguyên được định nghĩa như sau:

$$\bar{w} = \frac{100w_mE_mh^3}{12(1-\nu_m^2)PL^4}.$$

Bảng 1

Chuyển vị không thứ nguyên của tấm FGM so sánh với các phương pháp khác

Type	a/h	Method	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$	$n = 2$
SSSS	5	S-FSDT - IGA (Shuohui)	0.1717	0.2324	0.2719	0.3115
		FSDT - IGA (Shuohui)	0.1717	0.2324	0.2719	0.3115
		FSDT - kpRitz (Shuohui)	0.1722	0.2403	0.2811	0.3221
		FSDT- ES-DSG3 (Shuohui)	0.1703	0.2232	0.2522	0.2827
		Bài báo	0.1777	0.2402	0.2803	0.3204
		%(BB/Ritz)	3.18	-0.05	-0.29	-0.52
	20	S-FSDT - IGA (Shuohui)	0.1440	0.1972	0.2310	0.2628
		FSDT - IGA (Shuohui)	0.1440	0.1972	0.2310	0.2628
		Bài báo	0.1507	0.2058	0.2403	0.2728
		%(LV/ FSDT)	4.65	4.34	4.04	3.81
	100	S-FSDT - IGA (Shuohui)	0.1423	0.1949	0.2284	0.2597
		FSDT - IGA (Shuohui)	0.1423	0.1949	0.2284	0.2597
		Bài báo	0.1490	0.2036	0.2378	0.2698
		%(BB/ FSDT)	4.69	4.44	4.11	3.88
SFSF	5	S-FSDT - IGA (Shuohui)	0.5083	0.6918	0.8099	0.9247
		FSDT - IGA (Shuohui)	0.5089	0.6926	0.8108	0.9258

	Bài báo	0.4939	0.6717	0.7858	0.8968
	%(BB/ FSDT)	-2.95	-3.01	-3.08	-3.13
20	S-FSDT - IGA (Shuohui)	0.4614	0.6319	0.7404	0.8420
	FSDT - IGA (Shuohui)	0.4615	0.6321	0.7406	0.8422
	Bài báo	0.4483	0.6135	0.7183	0.8164
	%(BB/ FSDT)	-2.86	-2.94	-3.02	-3.07
100	S-FSDT - IGA (Shuohui)	0.4584	0.6281	0.7360	0.8367
	FSDT - IGA (Shuohui)	0.4584	0.6281	0.7360	0.8367
	Bài báo	0.4454	0.6098	0.7139	0.8112
	%(BB/ FSDT)	-2.84	-2.91	-3.00	-3.05

Bài toán 2: Tiếp tục kiểm chứng kết quả chuyển vị của tấm FGM có số liệu như Bài toán 1, hệ nút 13×13 , $a/h=100$, hệ số $\alpha=3$, $\theta=3$, hệ số hiệu chỉnh cắt $k_s=0.8601$. Lực tác dụng vào tấm là lực phân bố đều có giá trị là $P=1$. Chuyển vị được kiểm chứng trong bài toán là chuyển vị của điểm chính giữa tấm và chuyển vị này không thứ nguyên được định nghĩa như sau:

$$\bar{w} = \frac{10w_c E_m h^3}{PL^4}.$$

Bảng 2

Chuyển vị chính giữa tấm FGM có $a/h=100$ với các điều kiện biên khác nhau

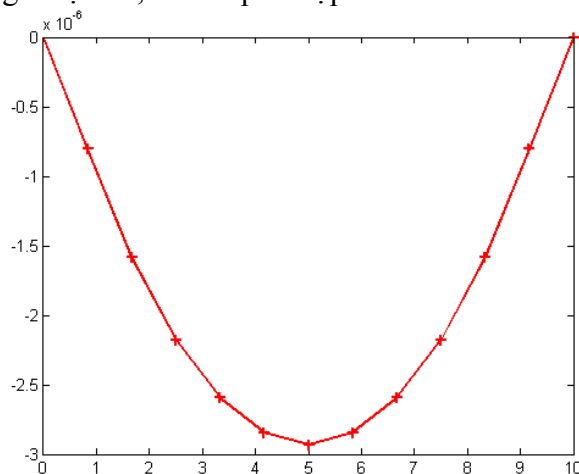
Type	Method	n = 0	n = 0.5	n = 1	n = 2	n = 5	n = 10
SSSS	S-FSDT	0.4438	0.6846	0.8904	1.1411	1.3494	1.4816
	FSDT	0.4438	0.6847	0.8904	1.1411	1.3494	1.4816
	Bài báo	0.4648	0.7132	0.9204	1.1696	1.3873	1.5357
	%(BB/FSDT)	4.73	4.16	3.37	2.50	2.81	3.65
SFSF	S-FSDT	1.4302	2.2062	2.8692	3.6770	4.3483	4.7740
	FSDT	1.4302	2.2062	2.8693	3.6770	4.3483	4.7740
	Bài báo	1.3896	2.1405	2.7781	3.5525	4.2042	4.6257
	%(BB/FSDT)	-2.84	-2.98	-3.18	-3.39	-3.31	-3.11
SCSC	S-FSDT	0.2096	0.3232	0.4204	0.5387	0.6372	0.6996
	FSDT	0.2097	0.3234	0.4205	0.5389	0.6375	0.7000
	Bài báo	0.2066	0.3158	0.4053	0.5123	0.6088	0.6777
	%(BB/FSDT)	-1.48	-2.35	-3.60	-4.94	-4.50	-3.19
CCCC	S-FSDT	0.1384	0.2135	0.2776	0.3557	0.4208	0.4621
	FSDT	0.1384	0.2135	0.2776	0.3558	0.4209	0.4622
	Bài báo	0.1370	0.2104	0.2719	0.3460	0.4103	0.4535
	%(BB/FSDT)	-1.02	-1.46	-2.07	-2.76	-2.53	-1.87

Bảng 1 và Bảng 2 cho thấy rằng các chuyển vị chính giữa của tấm FGM khi được so sánh với kết quả của những phương pháp khác có độ sai số chấp nhận được ($<5\%$). Sai số này xuất phát từ việc áp đặt giá trị các hệ số α, β trong phương pháp không lưới MGK. Hơn nữa, phương pháp không lưới MGK bản chất là một phương pháp nội suy nên không trách khỏi vấn đề sai số.

6. Kết luận

Bài báo đã đề xuất một mô hình tính toán chuyển vị của tấm FGM sử dụng mô hình phân tích kết hợp giữa lý thuyết S-FSD với phương pháp không lưới MKG (S-FSD-MKG). Các ví dụ số về tính chuyển vị của tấm FGM được thực hiện và thảo luận chi tiết. Các yếu tố ảnh hưởng đến chuyển vị của tấm FGM chẳng hạn như: điều kiện biên, chỉ số độ suy giảm n cũng được khảo sát. Kết quả cho thấy việc sử dụng mô hình đề xuất mới với số ẩn số ít hơn, nhưng vẫn cho kết quả phù hợp với những kết quả giải được từ các phương pháp số khác.

Các thông số $\alpha=3$, $\theta=3$ trong phương pháp không lưới MGK được sử dụng khảo sát tất cả các trường hợp tính toán trong bài báo này và luôn có sai số của giá trị tần số dao động thứ nhất $<5\%$. Vì thế khi sử dụng phương pháp không lưới MGK với yêu cầu tính toán chính xác vừa phải thì việc sử dụng giá trị $\alpha=3$, $\theta=3$ là phù hợp.



Hình 2. Đường chuyển vị chính giữa của tấm FGM với 4 cạnh tựa đơn

Tài liệu tham khảo

- Kirchhoff G (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J. Reine und Angewante Mathematik (Crelle), 40, 51-88.
- Mindlin R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. J. Appl. Mech, 18, 31-38. Reissner E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Applied Mechanics, 12, 68-77.
- Reddy J. N. (2000). Analysis of functionally graded plates", Int.J. Numer. Methods. Eng., 47(1-3), 663-84.
- Reddy J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. J. Appl. Mech., 51, 745-52
- Reddy J.N. (2011). A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. Int. J. Aerosp. Lightweight Struct, 1(1), 1-21.
- Pradyumna S., Bandyopadhyay J.N. (2008). Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. J.Sound Vib., 318(1-2), 176-192.
- Neves A. M. A. ,Ferreira A. J. M. ,Carrera E., Cinefra M., Roque C.M.C., Jorge R. M. N. (2013). Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. Compos. PartB: Eng., 44(1), 657-674.
- Zenkour A. M. (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. Appl. Math. Model, 30(1), 67-84.
- Mantari J. L. ,Oktem A. S. ,Guedes Soares C. (2012). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. Compos. PartB: Eng., 43(3), 1489-1499.
- Mantari J. L. ,Oktem A. S. , GuedesSoares C. (2012). Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. Compos. Struct., 94(2), 714-723.

- Neves A. M. A., Ferreira A. J. M., Carrera E., Cinefra M., Roque C. M. C., Jorge R. M. N. (2012). A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.*, 94(5), 1814–1825.
- Huffington N.J. (1963). Response of elastic columns to axial pulse loading. *A.I.A.A. J.*, 1(9), 2099–2104.
- Chen X. L. ,Liew K. M. (2004). Buckling of rectangular functionally graded material plates subjected to nonlinearly distributed in-plane edge loads. *Smart. Mater. Struct.*, 13(6), 1430-1441.
- Gu L. (2003). Moving Kriging interpolation and element free Galerkin method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 56, 1–11.
- Tongsuk P., Kanok-Nukulchai W. (2004). Further investigation of element free Galerkin method using moving Kriging interpolation. *Int. J. Com. Meth.*, 1, 1–21.
- Shuohui Y., Jack S. H., Tiantang Y., Tinh Q. B., Stéphane P.A.B. (2014). Isogeometric locking-free plate element: A simple first order shear deformation theory for functionally graded plates. *Comp. Strut.*, 118, 121-138.