HNUE JOURNAL OF SCIENCE DOI: 10.18173/2354-1059.2019-0002
Natural Sciences, 2019, Volume 64, Issue 3, pp. 18-25
This paper is available online at http://stdb.hnue.edu.vn

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG ỨNG VỚI ĐƠN THỨC THUỘC $(I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$

Hà Thị Thu Hiền
Khoa Cơ bản, Trường Đại học Ngoại thương, Hà Nội

Tóm tắt. Cho I là iđêan cạnh của một đồ thị Γ. Bằng cách sử dụng khái niệm đồ thị có trọng đỉnh và các kết quả trước đó của H.M. Lam và N.V. Trung (Transactions of the American Mathematical Society, 2018) về $(I^t : \mathfrak{m}) \setminus I^t$ tác giả đã đưa ra một số tính chất của đồ thị có trọng $\Gamma_{\mathbf{a}}$ ứng với đơn thức $x^{\mathbf{a}}$ của hiệu $(I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$.
Từ khóa: Đồ thị có trọng, chỉ số ghép cặp, liên thông.

1. Mở đầu

Cho vành R và M là R- môđun, ρ là iđêan của R, đặt $\Gamma_\rho(M) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(0 :_M \rho^n)$ thì $\Gamma_\rho(M)$ là một môđun con của M và được gọi là *môđun con xoắn*. Lấy một giải nội xạ của M, giả sử là

$$I^* : 0 \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{i-1}} I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots .$$

Từ giải nội xạ này ta có phức

$$0 \xrightarrow{\Gamma_\rho(d^{-1})} \Gamma_\rho(I^0) \xrightarrow{\Gamma_\rho(d^0)} \Gamma_\rho(I^1) \xrightarrow{\Gamma_\rho(d^1)} \cdots \xrightarrow{\Gamma_\rho(d^{i-1})} \Gamma_\rho(I^i) \xrightarrow{\Gamma_\rho(d^i)} \Gamma_\rho(I^{i+1}) \xrightarrow{\Gamma_\rho(d^{i+1})} \cdots .$$

trong đó đồng cấu $\Gamma_\rho(d^i)$ được xác định bởi

$$\begin{aligned}\Gamma_\rho(d^i) : \Gamma_\rho(I^i) &\to \Gamma_\rho(I^{i+1})\\ p &\mapsto d^i(p).\end{aligned}$$

Môđun $\operatorname{Ker}(\Gamma_\rho(d^i))/\operatorname{Im}(\Gamma_\rho(d^{i-1}))$ không phụ thuộc vào sự lựa chọn giải nội xạ I^* của M và gọi là môđun *đối đồng điều địa phương thứ i* của M ứng với iđêan ρ, ký hiệu $H^i_\rho(M)$.

Các vấn đề chi tiết hơn về đối đồng điều địa phương độc giả có thể xem trong [1].

Cho $R := k[x_1, .., x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k và $J, \mathfrak{m}$ lần lượt là iđêan thuần nhất, iđêan thuần nhất cực đại của R. Khi đó trong [2], N. Terai và N.V. Trung đã đưa ra kết quả sau:

Mệnh đề 1.1. *[2, Lemma 15.2] Cho* $\widetilde{J} := \cup_{s\in\mathbb{N}}(J : \mathfrak{m}^s)$ *là iđêan bão hòa của* J. *Khi đó* $H^0_{\mathfrak{m}}(R/J) = \widetilde{J}/J$.

Ngày nhận bài: 12/3/2019. Ngày sửa bài: 22/3/2019. Ngày nhận đặng: 29/3/2019.
Liên hệ: Hà Thị Thu Hiền, địa chỉ e-mail: thuhienha504@gmail.com

Như vậy để biết được sự triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương $H^0_{\mathfrak{m}}(R/J)$ của R/J ứng với $\mathfrak{m}$ ta cần biết iđêan bão hòa $\widetilde{J}$. Hơn nữa ta biết rằng $J \subseteq \widetilde{J}$, do đó ta chỉ cần xem xét hiệu $\widetilde{J} \setminus J$. Nếu J là iđêan đơn thức thì $\widetilde{J}$ cũng vậy, do đó hiệu $\widetilde{J} \setminus J$ gồm các đơn thức. Đặc biệt nếu J là lũy thừa của iđêan đơn thức không chứa bình phương I mà mọi phần tử sinh tối tiểu của nó đều có bậc 2 thì do I có thể tương ứng với một số đối tượng tổ hợp nên mỗi đơn thức trong $\widetilde{J} \setminus J = \widetilde{I^t} \setminus I^t$ cũng có tương ứng như vậy. Trong trường hợp ấy tác giả muốn xem xét một số tính chất của các đối tượng tổ hợp đó. Từ định nghĩa của $\widetilde{J}$ ta có

$$\widetilde{I^t} \setminus I^t = [\cup_{s\in\mathbb{N}}(I^t : \mathfrak{m}^s)] \setminus I^t = \cup_{s\in\mathbb{N}}[(I^t : \mathfrak{m}^s) \setminus I^t].$$

Trong [3], H.M. Lam và N.V. Trung đã miêu tả tính chất của các đối tượng tổ hợp ứng với các đơn thức thuộc $(I^t : \mathfrak{m}) \setminus I^t$. Việc hiểu được các lớp $(I^t : \mathfrak{m}^s) \setminus (I^t : \mathfrak{m}^{s-1})$ còn lại (với số tự nhiên $s \geq 2$ tùy ý) là một nhu cầu tất yếu. Hơn nữa, ta có thể xem $(I^t : \mathfrak{m}) \setminus I^t$ là đại diện của "lớp lẻ", tức là $(I^t : \mathfrak{m}^{2s+1}) \setminus (I^t : \mathfrak{m}^{2s})$, do vậy việc nghiên cứu đại diện của "lớp chẵn" là cần thiết. Ngoài ra, theo hiểu biết của tác giả, hiện tại chưa có kết quả nào tương tự với các lớp iđêan khác iđêan cạnh. Trong khuôn khổ bài báo này, với hy vọng có thể sử dụng các kết quả của [3], tác giả sẽ nghiên cứu tính chất của đối tượng tổ hợp ứng với mỗi đơn thức $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Đồ thị và đồ thị với trọng đỉnh

Đồ thị (vô hướng) là cặp $\Gamma := (V, E)$ trong đó V là tập đỉnh, E là *tập cạnh*, mỗi cạnh là tập con hai phần tử của V (để chỉ rõ tập đỉnh và tập cạnh của đồ thị Γ ta còn viết $V(\Gamma)$ và $E(\Gamma)$). Ở đây ta chỉ xét đồ thị mà tập đỉnh có hữu hạn phần tử, do đó ta có thể lấy $V = \{1, \ldots, n\}$. Nếu $c = \{v_1, v_2\}$ là một cạnh của đồ thị thì ta nói rằng hai đỉnh v_1, v_2 là *kề nhau* và cạnh c *liên kết* với các đỉnh v_1, v_2. Một cạnh $\{v_1, v_2\}$ mà $v_1 \equiv v_2$ được gọi là *cạnh vòng*. Hai cạnh c, c' gọi là *song song* nếu chúng liên kết với cùng một cặp đỉnh. Ta có thể hiểu rằng cạnh c được tính nhiều hơn 1 lần trong đồ thị đang xét và gọi c là *cạnh bội*. Một đồ thị được gọi là *đơn* nếu nó không có cạnh bội và cạnh vòng.

Một đồ thị *con* của đồ thị Γ là đồ thị Ω sao cho $V(\Omega) \subseteq V(\Gamma), E(\Omega) \subseteq E(\Gamma)$. Đồ thị con Ω của Γ được gọi là đồ thị *cảm sinh* nếu hai đỉnh của $V(\Omega)$ là kề nhau trong Ω khi và chỉ khi chúng kề nhau trong Γ. Đồ thị cảm sinh Ω của Γ được gọi là đồ thị cảm sinh thực sự nếu $V(\Omega) \subsetneq V(\Gamma)$.

Một *ghép cặp* của Γ là một tập con của E sao cho hai cạnh khác nhau tùy ý trong đó không có đỉnh nào chung. Số cạnh lớn nhất của một ghép cặp được gọi là *chỉ số ghép cặp* của Γ và được ký hiệu là $\nu(\Gamma)$.

Cho số nguyên dương s. Một *hành trình* độ dài s trong Γ là một dãy luân phiên các đỉnh và cạnh $P := v_0c_0v_1c_1v_2\ldots v_{s-1}c_{s-1}v_s$ (v_i là đỉnh và c_i là cạnh) trong đồ thị thỏa mãn điều kiện c_i liên kết với các đỉnh v_i, v_{i+1} với mọi $i = 0, \ldots, s-1$. Khi đó ta gọi v_0 là *đỉnh đầu* và v_s là *đỉnh cuối* của P. Nếu các đỉnh của hành trình P đôi một khác nhau trừ cặp đỉnh đầu và cuối thì P được gọi là một *đường dẫn*. Nếu $s \geq 3$ và đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối thì đường dẫn P được gọi là một *chu trình*.

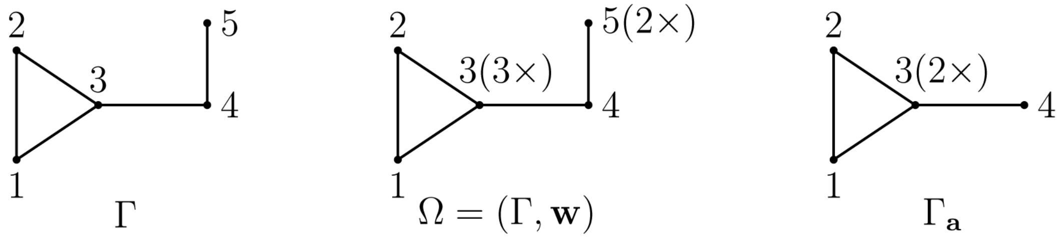
Cho M là một ghép cặp của đồ thị Γ. Một đường dẫn P với hai đỉnh đầu mút không nằm trong M, các đỉnh còn lại thuộc M, bắt đầu với cạnh nối đỉnh đầu mút với một đỉnh nằm trong M và cứ thế các cạnh của nó xen kẽ giữa cạnh thuộc M và không thuộc M được gọi là *đường M-mở rộng*.

Cho trước đồ thị Γ trên tập đỉnh $V = \{1, \dots, n\}$. Nếu ta gán cho mỗi đỉnh i của V số nguyên dương w_i thì ta gọi cặp $\Omega := (\Gamma, w)$ là đồ thị *có trọng*, trong đó $w := (w_1, \dots, w_n)$. Ta gọi Γ là *đế* của Ω và w là *véc tơ trọng*. Hai đỉnh được gọi là *kề nhau* trong Ω nếu chúng kề nhau trong đồ thị đế. Chú ý rằng mỗi đồ thị Γ thông thường luôn có thể được xem là đồ thị có trọng bằng cách gán cho mọi đỉnh của nó trọng 1.

Một *ghép cặp* của đồ thị có trọng Ω là một họ M các cạnh của Ω không nhất thiết khác nhau sao cho mỗi đỉnh của Ω có số lần xuất hiện trong M không lớn hơn trọng của nó. Tương tự như với đồ thị thông thường, ta có khái niệm chỉ số ghép cặp của Ω và cũng kí hiệu là $\nu(\Omega)$. Khái niệm hành trình trong đồ thị có trọng cũng được xác định nếu ta yêu cầu số lần xuất hiện của một đỉnh trong đó không vượt quá trọng của nó.

Cho Ω là đồ thị có trọng trên tập đỉnh V và Γ là đế của Ω. Với $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ ta ký hiệu $V_\mathbf{a} := \{i \in V \mid a_i > 0\}$. Gán cho mỗi đỉnh $i \in V_\mathbf{a}$ trọng mới là a_i ta thu được đồ thị có trọng trên tập đỉnh $V_\mathbf{a}$ với đế là đồ thị cảm sinh $\Gamma_{V_\mathbf{a}}$. Ta kí hiệu đồ thị này là $\Gamma_\mathbf{a}$.

Ví dụ: Các hình vẽ dưới đây lần lượt cho ta một đồ thị Γ trên tập đỉnh $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, đồ thị có trọng $\Omega = (\Gamma, \mathbf{w})$ với $\mathbf{w} = (1, 1, 3, 1, 2)$ và đồ thị $\Gamma_\mathbf{a}$ với $\mathbf{a} = (1, 1, 2, 4, 0)$ (trọng của mỗi đỉnh nếu lớn hơn 1 thì được viết bên phải kí hiệu đỉnh đó, trọng 1 không được viết).



Hình 1. Đồ thị và đồ thị có trọng

Chi tiết hơn về đồ thị và đồ thị có trọng độc giả có thể xem thêm trong [4] và [5].

2.2. Một số tính chất tổ hợp của $\Gamma_\mathbf{a}$

Trong mục này, ta luôn giả thiết Γ là đồ thị đơn và I là idean cạnh của Γ, tức là

$$I = (x_i x_j \mid \{i, j\} \in \Gamma).$$

Trong [5], H.T.T. Hien, H.M. Lam và N.V. Trung đã đưa ra đặc trưng tổ hợp để một đơn thức nằm trong một lũy thừa nào đó của I.

Bổ đề 2.1. *[5, Lemma 15.2] Cho $\mathbf{a}$ là véc tơ có các tọa độ không âm. Khi đó $x^\mathbf{a} \in I^t$ khi và chỉ khi $\nu(\Gamma_\mathbf{a}) \geq t$.*

Trong [3], H.M. Lam và N.V. Trung đã phân loại các đơn thức của hiệu $(I^t : \mathfrak{m}) \setminus I^t$.

Bổ đề 2.2. *[3, Lemma 15.2] Nếu $x^\mathbf{a} \in (I^t : \mathfrak{m}) \setminus I^t$ và $\Gamma_\mathbf{a}$ liên thông thì hoặc với mọi $i \in V_\mathbf{a}$ ta có $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in I^{t-1}$ hoặc tồn tại $i \in V_\mathbf{a}$ sao cho $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m}) \setminus I^{t-1}$.*

Tương tự như Bổ đề 2.2 ta cũng phân loại được các đơn thức của hiệu $(I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$. Hơn nữa khi đồ thị có trọng $\Gamma_\mathbf{a}$ ứng với đơn thức $x^\mathbf{a}$ trong hiệu trên liên thông thì ta biết được bậc của $x^\mathbf{a}$ và chỉ số ghép cặp của $\Gamma_\mathbf{a}$.

Mệnh đề 2.1. *Nếu* $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$ *thì*

1. Hoặc với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$ *ta có* $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ *hoặc tồn tại* $i \in V_{\mathbf{a}}$ *sao cho* $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^{t-1} : \mathfrak{m})$,

2. Nếu trường hợp đầu tiên của 1 xảy ra và $\Gamma_{\mathbf{a}}$ *liên thông thì ta có* $\deg x^{\mathbf{a}} = 2t - 2$ *và* $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = t - 1$.

Chứng minh. 1. Vì $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2)$ nên $x^{\mathbf{a}}x_ux_v \in I^t$ với mọi $u, v \in V$. Điều này có nghĩa là $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_u+\mathbf{e}_v}) \geq t$ với mọi $u, v \in V$. Khi đó với đỉnh i tùy ý trong $V_{\mathbf{a}}$, ta có

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_u+\mathbf{e}_v}) \geq \nu(\Gamma_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_u+\mathbf{e}_v}) - 1 \geq t - 1$$

với mọi $u, v \in V$, do vậy ta nhận được $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m}^2)$. Vì $(I^{t-1} : \mathfrak{m}^2) \supseteq (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ nên nếu $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \notin (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ với đỉnh i nào đó thì $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^{t-1} : \mathfrak{m})$. Ngược lại với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$ ta có $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$.

2. Vì $x^{\mathbf{a}} \notin (I^t : \mathfrak{m})$ nên tồn tại đỉnh $i \in V$ sao cho $x^{\mathbf{a}}x_i \notin I^t$. Đặt $x^{\mathbf{b}} = x^{\mathbf{a}}x_i$ ta nhận được $x^{\mathbf{b}} \in (I^t : \mathfrak{m}) \setminus (I^t$. Ta sẽ chứng tỏ $x^{\mathbf{b}-\mathbf{e}_j} \in I^{t-1}$ với mọi $j \in V_{\mathbf{b}}$. $(*)$ Thật vậy, ta thấy rằng điều kiện $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_j} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ với mọi $j \in V_{\mathbf{a}}$ tương đương với điều kiện $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_j}\mathfrak{m} \subseteq I^{t-1}$ với mọi $j \in V_{\mathbf{a}}$. Từ đó $x^{\mathbf{b}-\mathbf{e}_j} = x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_j}x_i \in I^{t-1}$ với mọi $j \in V_{\mathbf{a}}$. Nếu $i \in V_{\mathbf{a}}$ thì $V_{\mathbf{b}} = V_{\mathbf{a}}$, do vậy $(*)$ đúng. Nếu $i \notin V_{\mathbf{a}}$ thì $V_{\mathbf{b}} = V_{\mathbf{a}} \cup \{i\}$. Ta chỉ cần chứng tỏ $(*)$ đối với đỉnh i. Vì $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ nên $x^{\mathbf{a}} = x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}x_i \in I^{t-1}$, do đó $x^{\mathbf{b}-\mathbf{e}_i} = x^{\mathbf{a}+\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_i} = x^{\mathbf{a}} \in I^{t-1}$. Ta nhận được $x^{\mathbf{b}} \in (I^t : \mathfrak{m}) \setminus I^t$ và $x^{\mathbf{b}-\mathbf{e}_j} \in I^{t-1}$ với mọi $j \in V_{\mathbf{b}}$. Hơn nữa, trong trường hợp này, dễ thấy rằng i kề với ít nhất một đỉnh của $V_{\mathbf{a}}$. Vì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ liên thông nên $\Gamma_{\mathbf{b}}$ cũng liên thông. Theo H.M. Lam and N.V. Trung (2015), $\deg x^{\mathbf{b}} = 2t - 1$ và $\nu(\Gamma_{\mathbf{b}}) = t - 1$. Do đó $\deg x^{\mathbf{a}} = 2t - 2$ và

$$t - 2 = \nu(\Gamma_{\mathbf{b}}) - 1 \leq \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \leq \nu(\Gamma_{\mathbf{b}}) = t - 1.$$

Ở trên ta đã chứng tỏ $x^{\mathbf{a}} \in I^{t-1}$, mà điều này tương đương với $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \geq t - 1$. Vậy $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = t - 1$. □

Bây giờ ta xem xét cấu trúc của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ khi $V_{\mathbf{a}}$ gồm các đỉnh nằm trong các thành phần liên thông khác nhau của đồ thị Γ đã cho.

Định lí 2.1. *Cho các vành đa thức* $A := k[x_1, .., x_s], B := k[x_{s+1}, .., x_n], R := k[x_1, .., x_n]$. *Cho* Γ *là đồ thị đơn trên tập đỉnh* $V := \{1, \ldots, n\}$, *không có đỉnh cô lập và có hai thành phần liên thông với hai tập đỉnh là* $V_1 := \{1, \ldots, s\}, V_2 := \{s + 1, \ldots, n\}$. *Cho các iđean* $I := I(\Gamma)$ *và* I_1, I_2 *là các iđean cạnh của hai thành phần liên thông đó xét trong các vành A, B tương ứng,* $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ *tương ứng là các iđean thuần nhất cực đại trong các vành* R, A, B. *Khi đó*

$$x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m}) \text{ và } x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m}) \text{ với mọi } i \in V_{\mathbf{a}}$$

khi và chỉ khi $x^{\mathbf{a}_1} \in (I_1^{t_1} : \mathfrak{m}_1) \setminus I_1^{t_1}, x^{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_i} \in I_1^{t_1-1}$ *với mọi* $i \in V_{\mathbf{a}_1}$ *và*

$$x^{\mathbf{a}_2} \in (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2^2) \setminus (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2), x^{\mathbf{a}_2-\mathbf{e}_j} \in (I_2^{t_2-1} : \mathfrak{m}_2) \text{ với mọi } j \in V_{\mathbf{a}_2}, t = t_1 + t_2 - 1,$$

trong đó $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *là các véctơ thu được từ* $\mathbf{a}$ *bằng cách cho các tọa độ ứng với các tập đỉnh* V_2, V_1 *lần lượt bằng 0.*

Chứng minh. Giả sử $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$ và $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$. Khi đó vì $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ nên $x^{\mathbf{a}} = x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}x_i \in I^{t-1}$, do đó $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \geq t-1$. Nếu $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \geq t$ thì ta nhận được mâu thuẫn với giả thiết $x^{\mathbf{a}} \notin (I^t : \mathfrak{m})$. Vì vậy $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = t-1$. Giả sử

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) = t_1 - 1, \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2}) = t_2 - 1,$$

ta suy ra $t_1 + t_2 - 1 = t$. Vì $x^{\mathbf{a}} \notin (I^t : \mathfrak{m})$ nên tồn tại $i \in V$ sao cho $x^{\mathbf{a}}x_i \notin I^t$. Do vai trò của các thành phần liên thông là như nhau nên ta có thể giả sử $i \in V_2$. Khi đó

$$t-1 = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2}) \leq \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_i}) \leq t-1.$$

Ta suy ra $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2}) = t_2 - 1$, do đó $x^{\mathbf{a}_2}x_i \notin I_2^{t_2}$. Vì vậy $x^{\mathbf{a}_2} \notin (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2)$. Mặt khác, từ giả thiết $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2)$ và $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) = t_1 - 1$ ta dễ thấy rằng $x^{\mathbf{a}_2} \in (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2^2)$. Ta nhận được

$$x^{\mathbf{a}_2} \in (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2^2) \setminus (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2).$$

Tương tự, vì $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) = t_1 - 1$ nên $x^{\mathbf{a}_1} \notin I_1^{t_1}$. Ta sẽ chứng tỏ $x^{\mathbf{a}_1}x_j \in I_1^{t_1}$ với mọi $j \in V_1$. Giả sử ngược lại, tồn tại $j \in V_1$ sao cho $x^{\mathbf{a}_1}x_j \notin I_1^{t_1}$. Ta có

$$t_1 - 1 = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) \leq \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1+\mathbf{e}_j}) \leq t_1 - 1,$$

do đó $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1+\mathbf{e}_j}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) = t_1 - 1$. Ta nhận được

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1+\mathbf{e}_j}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i}) = t_1 - 1 + t_2 - 1 = t - 1.$$

Điều này có nghĩa là $x^{\mathbf{a}}x_ix_j \notin I^t$, mâu thuẫn với giả thiết $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2)$. Vậy

$$x^{\mathbf{a}_1} \in (I_1^{t_1} : \mathfrak{m}_1) \setminus I_1^{t_1}.$$

Chọn $i \in V_2$ cố định sao cho $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2}) = t_2 - 1$ như kết quả ở trên. Từ giả thiết $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ với mọi $i \in V_{\mathbf{a}} = V_{\mathbf{a}_1} \cup V_{\mathbf{a}_2}$, ta xét $i \in V_{\mathbf{a}_1}$. Khi đó ta có $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}x_j \in I^{t-1}$. Điều này tương đương với

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}) \geq t-1 \Leftrightarrow \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_i}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_j}) \geq t-1 \Leftrightarrow \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_i}) \geq t_1 - 1.$$

Vì vậy $x^{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_i} \in I_1^{t_1-1}$ với mọi $i \in V_{\mathbf{a}_1}$. Lại sử dụng giả thiết $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ với mọi $j \in V_{\mathbf{a}} = V_{\mathbf{a}_1} \cup V_{\mathbf{a}_2}$, ta chọn $j \in V_{\mathbf{a}_2} \subseteq V_2$ cố định. Khi đó ta có $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_j}x_i \in I^{t-1}$ với mọi $i \in V$. Điều này tương đương với $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i}) \geq t-1$.

Xét $i \in V_2$ thì ta được

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2-\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i}) \geq t-1 \Leftrightarrow \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2-\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i}) \geq t_2 - 1.$$

Do vậy $x^{\mathbf{a}_2-\mathbf{e}_j} \in (I_2^{t_2-1} : \mathfrak{m}_2)$ với mọi $j \in V_{\mathbf{a}_2}$.

Ngược lại, giả sử $x^{\mathbf{a}_1} \in (I_1^{t_1} : \mathfrak{m}_1) \setminus I_1^{t_1}, x^{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_i} \in I_1^{t_1-1}$ với mọi $i \in V_{\mathbf{a}_1}$ và

$$x^{\mathbf{a}_2} \in (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2^2) \setminus (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2), x^{\mathbf{a}_2-\mathbf{e}_j} \in (I_2^{t_2-1} : \mathfrak{m}_2) \text{ với mọi } j \in V_{\mathbf{a}_2}, t = t_1 + t_2 - 1.$$

Không mất tổng quát, ta có thể giả sử $\Gamma_{\mathbf{a}_1}, \Gamma_{\mathbf{a}_2}$ liên thông. Khi đó từ [3, Lemma] và Mệnh đề 2.1, ta có $\deg x^{\mathbf{a}_1} = 2t_1 - 1, \deg x^{\mathbf{a}_2} = 2t_2 - 2$ và $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) = t_1 - 1, \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2}) = t_2 - 1$. Do đó với đỉnh tùy ý $i \in V_{\mathbf{a}_2}$ ta có $(x^{\mathbf{a}_2}x_i) \notin I_1^{t_2}$. Điều này tương đương với

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i}) \leq t_2 - 1.$$

Vì $\Gamma_{\mathbf{a}_1}$ và $\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i}$ thuộc hai thành phần liên thông nên

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_i}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i}) \leq t_1 - 1 + t_2 - 1 = t - 1.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $x^{\mathbf{a}} \notin (I^t : \mathfrak{m})$. Mặt khác, ta có $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2}) = t - 1$ và $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1+\mathbf{e}_i}) = t_1$ với mọi $i \in V_1$, $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}) = t_2$ với mọi $i, j \in V_2$. Vì vậy với hai đỉnh tùy ý $i, j \in V$, nếu có ít nhất một đỉnh thuộc V_1, giả sử là i, thì

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}) \geq \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1+\mathbf{e}_i}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2}) = t_1 + t_2 - 1 = t.$$

Nếu $i, j \in V_2$ thì

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}) = t_1 - 1 + t_2 = t.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2)$. Ta nhận được $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$. Bây giờ ta sẽ chứng tỏ $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$. Nếu $i \in V_{\mathbf{a}_1}$ thì từ giả thiết ta có $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_i}) \geq t_1 - 1$ nên

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_i}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2} \geq t_1 - 1 + t_2 - 1 = t - 1.$$

Nếu $i \in V_{\mathbf{a}_2}$ thì từ giả thiết ta có $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2-\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}) \geq t_2 - 1$ với mọi $j \in V_{\mathbf{a}_2}$. Ta suy ra

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i+e_j}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2-\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}) \geq t_1 - 1 + t_2 - 1 = t - 1$$

với mọi $j \in V_{\mathbf{a}_2}$. Với $j \in V_{\mathbf{a}_1}$ thì

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i+e_j}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1+e_j}) + \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_2-\mathbf{e}_i)} \geq t_1 + t_2 - 2 = t - 1.$$

Vì vậy $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}x_j \in I^{t-1}$ với mọi $j \in V_{\mathbf{a}}$. □

Để chuẩn bị cho việc chứng minh kết quả cuối cùng của bài báo ta sẽ nhắc lại một kết quả của Berge [6].

Bổ đề 2.3. *[6, Theorem 1.2.1] Cho ghép cặp M của đồ thị Γ. Khi đó $\mid M \mid = \nu(\Gamma)$ khi và chỉ khi Γ không có đường M-mở rộng.*

Đối với đồ thị có trọng, tương tự với khái niệm đường M-mở rộng, trong [5] các tác giả H.T.T. Hien, H.M. Lam và N.V. Trung đã định nghĩa hành trình M-mở rộng. Họ cũng chứng tỏ rằng với khái niệm đó ta có một phiên bản của Bổ đề 2.3 dành cho đồ thị có trọng. Để cho tiện ta sẽ gọi nó là phiên bản có trọng.

Cho $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$. Từ Mệnh đề 2.1, ta có hai trường hợp đối với các đỉnh của $V_{\mathbf{a}}$. Hơn nữa Mệnh đề 2.1 và Định lí 2.1 đã cho ta các tính chất của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ nếu $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m})$ với mọi $i \in V_{\mathbf{a}}$. Sử dụng Định lý 2.1 và Bổ đề 2.3 (phiên bản có trọng) ta có một kết quả về ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ đối với trường hợp còn lại.

Định lí 2.2. *Cho* $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m}), \Gamma_{\mathbf{a}}$ *liên thông và tồn tại đỉnh* $i \in V_{\mathbf{a}}$ *sao cho* $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^{t-1} : \mathfrak{m})$. *Khi đó* $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = t - 1$.

Chứng minh. Vì $x^{\mathbf{a}} \notin (I^t : \mathfrak{m})$ nên tồn tại $j \in V$ sao cho $x^{\mathbf{a}} x_j \notin I^t$, do đó

$$\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \leq \nu(\Gamma_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_j}) \leq t - 1.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có $t-1$ cạnh bằng quy nạp theo số đỉnh $i \in V_{\mathbf{a}}$ thỏa mãn điều kiện $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} \in (I^{t-1} : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^{t-1} : \mathfrak{m})$. Nếu $V_{\mathbf{a}}$ chỉ có duy nhất một đỉnh như vậy thì ta có thể chứng tỏ được $x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j} \in (I^{t-2} : \mathfrak{m})$ với mọi $j \in V_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$. Nếu $\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$ liên thông thì theo Mệnh đề 3.3, $\deg x^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i} = 2(t-1) - 2 = 2t - 4$. Khi đó $\deg x^{\mathbf{a}+2\mathbf{e}_i} = 2t - 1$ nên $x^{\mathbf{a}} x_i^2 \notin I^t$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2)$. Ta suy ra $\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$ không liên thông. Theo Định lí 2.1, $\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$ gồm hai phần rời nhau, giả sử là $\Gamma_{\mathbf{a}_1}$ và $\Gamma_{\mathbf{a}_2}$ trong đó $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ là các véctơ nhận được từ $\mathbf{a} - \mathbf{e}_i$ bằng cách lần lượt cho các tọa độ ứng với các tập đỉnh $V_{\mathbf{a}_1}, V_{\mathbf{a}_2}$ bằng 0 và

$$x^{\mathbf{a}_1} \in (I_1^{t_1} : \mathfrak{m}_1) \setminus I_1^{t_1}, x^{\mathbf{a}_2} \in (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2^2) \setminus (I_2^{t_2} : \mathfrak{m}_2), (t_1 - 1) + (t_2 - 1) - 1 = t - 1.$$

Vì $\Gamma_{\mathbf{a}}$ liên thông nên i chính là đỉnh nối hai phần này, do đó i phải kề với một đỉnh của $V_{\mathbf{a}_1}$, giả sử là j. Ta biết rằng một ghép cặp cực đại của $\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$ gồm một ghép cặp cực đại M_1 của $\Gamma_{\mathbf{a}_1}$ và một ghép cặp cực đại M_2 của $\Gamma_{\mathbf{a}_2}$. Hơn nữa, $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_j}) = \nu(\Gamma_{\mathbf{a}_1})$ nên ta có thể lấy M_1 là một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}_1-\mathbf{e}_j}$. Vì $M = M_1 \cup M_2$ có $(t_1 - 2) + (t_2 - 2) = t - 2$ cạnh nên $M \cup \{\{i, j\}\}$ là một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có $t - 1$ cạnh. Giả sử $V_{\mathbf{a}}$ có ít nhất hai đỉnh giảm được. Nếu $V_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$ không có đỉnh nào giảm được thì bằng cách lập luận như trên ta cũng có điều tương tự. Nếu $V_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$ có ít nhất một đỉnh giảm được thì theo giả thiết quy nạp, ta có $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = t - 2$. Từ giả thiết $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2)$ ta suy ra $x^{\mathbf{a}} x_i^2 \in I^t$. Điều này tương đương với $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+2\mathbf{e}_i}) \geq t$. Mặt khác, vì $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) \leq t - 1$ nên $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+2\mathbf{e}_i}) \leq t + 1$. Nếu $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+2\mathbf{e}_i}) = t + 1$ thì rõ ràng $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}}) = t - 1$. Vì vậy ta giả sử $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}+2\mathbf{e}_i}) = t$ và M là một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}+2\mathbf{e}_i}$ có t cạnh. Dễ thấy rằng mọi láng giềng của i đều thuộc $V_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$. Nếu số lần xuất hiện của đỉnh i trong M nhiều nhất là $a_i + 1$ thì bằng cách bỏ đi một cạnh chứa i, ta nhận được một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có $t - 1$ cạnh. Ngược lại, giả sử số lần xuất hiện của đỉnh i trong M là $a_i + 2$. Vì $a_i \geq 1$ nên có ít nhất 3 cạnh trong M chứa đỉnh i, giả sử j_1, j_2, j_3 là các láng giềng của i trong các cạnh đó. Rõ ràng $j_1, j_2, j_3 \in V_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$. Khi đó từ M ta nhận được ghép cặp $M' = M \setminus \{\{i, j_1\}, \{i, j_2\}, \{i, j_3\}\}$ của $\Gamma_{\mathbf{a}+2\mathbf{e}_i}$ có $t - 3$ cạnh. Vì $\nu(\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}) = t - 2$ nên theo Bổ đề 3.5 (phiên bản có trọng) tồn tại một hành trình P là M'-mở rộng chứa các đỉnh đầu mút là hai trong ba đỉnh j_1, j_2, j_3, giả sử là j_1, j_2. Từ P ta nhận được một ghép cặp mới của $\Gamma_{\mathbf{a}-\mathbf{e}_i}$ có $t - 2$ cạnh. Ghép cặp này cùng với cạnh $\{i, j_3\}$ cho ta một ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ có $t - 1$ cạnh.

□

3. Kết luận

Như vậy các kết quả mới của tác giả là đã đưa ra bậc chính xác của mỗi đơn thức $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$ khi $\Gamma_{\mathbf{a}}$ liên thông và một bất biến tổ hợp rất quan trọng đó là chỉ số ghép cặp của $\Gamma_{\mathbf{a}}$ trong cả hai trường hợp $\Gamma_{\mathbf{a}}$ liên thông và không liên thông. Những hiểu biết này cho phép tác giả có thể tiếp tục nghiên cứu sâu hơn về $\Gamma_{\mathbf{a}}$ với $x^{\mathbf{a}} \in (I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$, cũng như tiếp tục với các đơn thức của hiệu $(I^t : \mathfrak{m}^s) \setminus (I^t : \mathfrak{m}^{s-1})$ với một số tự nhiên $s > 2$ tùy ý.

Lời cảm ơn: Tác giả trân trọng cảm ơn sự tài trợ của trường Đại học Ngoại thương, thông qua Đề tài cấp trường với mã số NTCS2018-27.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Brodmann and R.Y. Sharp, 1998, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 60, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] N. Terai and N.V. Trung, 2014, *On the associated primes and the depth of the second power of squarefree monomial ideals*, J. Pure Appl. Algebra **218**, 1117-1129.

[3] H.M. Lam, N.V. Trung, 2018, *Associated primes of powers of edge ideals and ear decompositions of graphs*, Transactions of the American Mathematical Society.

[4] C. Godsil, G. Royle, 2001, *Algebraic graph theory*, Springer-Verlag New York.

[5] H.T.T. Hien, H.M. Lam, N.V. Trung, 2015, *Saturation and associated primes of powers of edge ideals*, J. Algebra **439**, 225-244.

[6] L. Lovasz, M.D. Plummer, 2009, *Matching Theory*, AMS Chelsea Publishing.

ABSTRACT

Some properties of a weighted graph corresponding to a monomial in $(I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$

Ha Thị Thu Hien

Faculty of Basic Sciences, Foreign Trade University, Ha Noi

Let I be edge ideal of a graph Γ. By using the notion of vertex weighted graph and H.M. Lam and N.V. Trung's results on $(I^t : \mathfrak{m})\setminus I^t$ (Transactions of the American Mathematical Society, 2018), the author gave some combinatorial properties of a weighted graph $\Gamma_{\mathbf{a}}$ corresponding to a monomial $x^{\mathbf{a}}$ in $(I^t : \mathfrak{m}^2) \setminus (I^t : \mathfrak{m})$.